

波形钢腹板连续箱梁桥振动频率的参数分析*

冀 伟, 刘世忠, 蔺鹏臻, 李爱军

(兰州交通大学土木工程学院 兰州, 730070)

摘要 为准确计算和分析波形钢腹板连续箱梁桥的弯曲振动频率,首先,运用能量变分原理和 Hamilton 原理,推导出波形钢腹板简支箱梁桥弯曲振动频率的计算公式;然后,在简支箱梁桥频率计算公式的基础上,根据连续梁自由振动的三弯矩方程,得到任意等跨等截面波形钢腹板连续箱梁桥弯曲振动频率的计算公式,该公式的正确性得到已建实桥频率实测值和 Ansys 三维有限元计算值的验证;最后,对波形钢腹板连续箱梁桥弯曲振动频率的影响参数进行了分析。研究表明,波形钢腹板剪切效应对波形钢腹板连续箱梁桥弯曲振动频率的影响较大,而其余参数对该桥型弯曲振动频率的影响较小,在实际工程中为了计算的简便性,可以忽略这些因素的影响。研究结论可为同类型桥梁的设计提供参考。

关键词 波形钢腹板; 振动频率; 能量变分原理; 组合箱梁

中图分类号 U441+.3; TH113

引 言

波形钢腹板组合箱梁桥作为一种新型的钢-混凝土组合结构桥梁,可以减轻梁体自重,并可充分发挥钢材和混凝土各自的优点,即波形钢腹板的抗剪强度高,适于承担剪切力,而混凝土翼板的纵向刚度较大,适于承担纵向拉力和压力。由于波形钢腹板具有的特殊形状可以提高腹板的稳定性和抗裂性,还可以提高桥梁的预应力施加效率,因此波形钢腹板组合箱梁桥已在国内外的桥梁建设中得到了大量应用。

现有的文献表明,国外学者主要对波形钢腹板组合箱梁的抗扭性能^[1]、波形钢腹板 I 型钢梁的抗弯性能^[2-3]、波形钢腹板的剪切屈曲性能^[4]及疲劳性能^[5]进行了研究。国内学者对波形钢腹板 PC 简支箱梁桥的研究较多。文献[6]研究了波形钢腹板 PC 简支箱梁桥混凝土顶板在局部荷载作用下的横向内力及有效分布宽度。文献[7]研究了波形钢腹板简支箱梁桥的挠度计算理论。文献[8]研究了波形钢腹板组合箱梁在纯扭转作用下的力学性能。国内外文献对波形钢腹板、波形钢腹板 I 型钢梁及波形钢腹板 PC 简支箱梁桥的静力学特性的研究较为全面,而对波形钢腹板连续体系桥梁自振频率的研究相对滞后,还未有给出该桥型自振频率的计算方法。

我国现行的《公路桥涵设计通用规范》(JTG D60-2015)^[9]中规定可根据桥梁结构的基频计算桥梁的冲击系数,但规范中未给出针对波形钢腹板连续箱梁桥振动频率的计算公式,这不利于合理计算该类桥型的冲击系数。

笔者针对国内外研究文献和我国现行规范中尚无波形钢腹板连续箱梁桥弯曲振动频率的解析解这一问题展开研究。首先,运用能量变分原理和 Hamilton 原理,推导出波形钢腹板简支箱梁桥弯曲振动频率的计算公式;然后,在简支箱梁桥弯曲振动频率计算公式的基础上,根据连续梁自由振动的三弯矩方程,得到了任意等跨等截面波形钢腹板连续箱梁桥弯曲振动频率的计算公式,该公式的正确性得到了已建实桥频率实测值和 Ansys 三维有限元计算值的验证;最后,对波形钢腹板连续箱梁桥弯曲振动频率的影响参数进行了分析。本研究结论可为我国实际工程中波形钢腹板连续箱梁桥弯曲振动频率的计算提供参考。

1 波形钢腹板构造对其剪切模量影响

如图 1 所示,波形钢腹板的几何形状会对其剪切模量产生一定程度的影响。图中:width 为波形钢腹板的波高; a_1 为波形钢腹板斜板段在水平面的

* 国家自然科学基金资助项目(51368032);中国博士后科学基金资助项目(2014M562103);甘肃省高等学校科研项目(2015A-053);甘肃省基础研究创新群体资助项目(1506RJIA029)

收稿日期:2015-03-20;修回日期:2015-06-16

投影长度; a_2 与 a_3 分别为平板段及斜板段的长度。波形钢腹板考虑几何形状影响的剪切模量 G_g 的计算公式^[10]为

$$G_g = \alpha \frac{E_g}{2(1 + \nu_g)} \quad (1)$$

其中: $\alpha = (a_1 + a_2) / (a_2 + a_3)$ 为波形钢腹板剪切模量的修正因子; E_g 为钢材的弹性模量; ν_g 为钢材的泊松比。

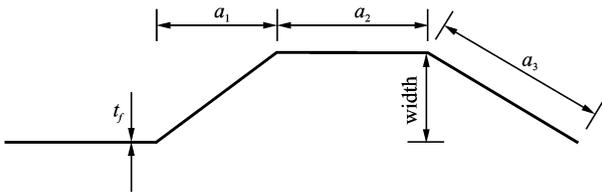


图1 单位波长的波形钢腹板尺寸示意图

Fig. 1 Dimension of corrugated steel web with one wavelength

2 波形钢腹板筒支箱梁桥的振动方程

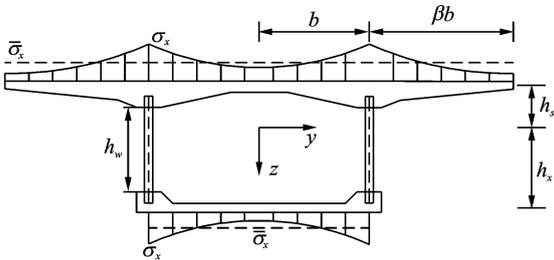
2.1 基本假定

1) 由于波形钢腹板具有手风琴效应,可忽略其在桥梁纵向抵抗弯矩的能力。

2) 波形钢腹板组合箱梁桥在发生弯曲变形时,其混凝土上、下翼板的纵向应变计算服从“拟平截面假定”^[11]。

3) 图2所示的波形钢腹板组合箱梁,当计算其翼板的应变能时,忽略翼板的竖向应变、横向应变及板平面外的剪应变,仅考虑翼板的纵向应变和面内的剪应变。

4) 混凝土翼板与波形钢腹板在弹性范围内共同工作,两者连接紧密且无相对滑移。



σ_x -考虑剪力滞效应的正应力; $\bar{\sigma}_x$ -初等梁理论计算的正应力

图2 波形钢腹板组合箱梁的截面示意图

Fig. 2 Cross section of the box girder with corrugated steel webs

如图3所示,当波形钢腹板组合箱梁桥在外荷载 $p(x, t)$ 的作用下产生弯曲变形时会产生剪滞效

应(如图2所示),这时需要引入两个动位移函数描述其位移模式,即梁的竖向动位移函数 W 与纵向动位移函数 U ^[12],其表达式分别为

$$W = W(x, t) \quad (2)$$

$$U(x, y, z, t) = h_i [\varphi(x, t) + (1 - \bar{\alpha}^3) \zeta(x, t)] \quad (3)$$

其中: $\zeta(x, t)$ 为波形钢腹板组合箱梁桥发生弯曲振动时混凝土上、下翼板的最大纵向位移差函数; $\varphi(x, t)$ 为波形钢腹板组合箱梁桥的横截面由于弯曲振动变形引起的角位移。

$\bar{\alpha}$ 按下式计算

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} y/b & (0 \leq y \leq b) \\ (b + \beta b - y)/\beta b & (b \leq y \leq b + \beta b) \end{cases} \quad (4)$$

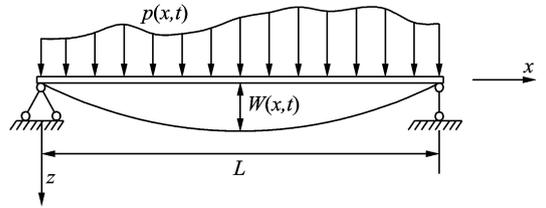


图3 波形钢腹板组合箱梁桥的弯曲变形

Fig. 3 Bending deformation of the box girder bridge with corrugated steel webs

2.2 控制微分方程与自然边界条件

波形钢腹板组合箱梁桥发生自由弯曲振动时,外荷载 $p(x, t)$ 为零,其外力势能也为零,这时梁的总势能 V 由上、下翼板的弯曲应变能 \bar{V}_s, \bar{V}_x 和波形钢腹板剪切应变能 \bar{V}_g 组成,其表达式为

$$\begin{aligned} V = & \bar{V}_s + \bar{V}_x + \bar{V}_g = \frac{1}{2} E_c I \int_0^L [\varphi'(x, t)]^2 dx + \\ & \frac{1}{2} E_c I \int_0^L \frac{3}{2} \varphi'(x, t) \zeta'(x, t) dx + \\ & \frac{1}{2} E_c I \int_0^L \frac{9}{14} [\zeta'(x, t)]^2 dx + \\ & \frac{1}{2} E_c I \int_0^L \frac{9 G_c}{5 E_c b^2} [\zeta'(x, t)]^2 dx + \\ & \frac{1}{2} G_g A_g \int_0^L [W'(x, t) - \varphi(x, t)]^2 dx \end{aligned} \quad (5)$$

其中: I 为忽略波形钢腹板抗弯作用的箱梁截面惯性矩; E_c 与 G_c 分别为混凝土的弹性模量和剪切模量; A_g 为波形钢腹板横截面的剪切面积。

波形钢腹板组合箱梁桥发生竖向弯曲振动时的动能 T 为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \dot{W}^2 (\rho_c A_c + \rho_g A_g) dx \quad (6)$$

其中: \dot{W} 为 $W(x, t)$ 对时间的导数; ρ_c 与 ρ_g 分别为混凝土与钢材的质量密度; A_c 为混凝土翼板的横截面面积。

根据 Hamilton 原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dt = 0 \quad (7)$$

得到波形钢腹板组合箱梁桥发生自由弯曲振动时的控制微分方程,如式(8)~(10)所示。与控制方程相对应的自然边界条件如式(11)~(13)所示。

$$E_c I \varphi''(x, t) + \frac{3}{4} E_c I \zeta''(x, t) + G_g A_g [W'(x, t) - \varphi(x, t)] = 0 \quad (8)$$

$$G_g A_g [W''(x, t) - \varphi'(x, t)] - (\rho_c A_c + \rho_g A_g) \dot{W}(x, t) = 0 \quad (9)$$

$$E_c I \left[\frac{9G_c}{5E_c b^2} \zeta(x, t) - \frac{9}{14} \zeta''(x, t) - \frac{3}{4} \varphi'(x, t) \right] = 0 \quad (10)$$

$$\left[E_c I \varphi'(x, t) + \frac{3}{4} E_c I \zeta'(x, t) \right] \delta \varphi \Big|_0^L = 0 \quad (11)$$

$$\left[\frac{3}{4} E_c I \varphi'(x, t) + \frac{9}{14} E_c I \zeta'(x, t) \right] \delta \zeta \Big|_0^L = 0 \quad (12)$$

$$G_g A_g [W'(x, t) - \varphi(x, t)] \delta W \Big|_0^L = 0 \quad (13)$$

2.3 自由弯曲振动方程的解

设波形钢腹板简支箱梁桥自由振动的位移函数、最大纵向位移差函数及截面角位移函数分别为

$$W(x, t) = W(x) \sin(\omega t + \phi) \quad (14)$$

$$\zeta(x, t) = \xi(x) \sin(\omega t + \phi) \quad (15)$$

$$\varphi(x, t) = \varphi(x) \sin(\omega t + \phi) \quad (16)$$

其中: ω 与 ϕ 分别为波形钢腹板简支箱梁桥自由弯曲振动的圆频率和初始相位角。

将式(14)~(16)代入式(8)~(10),得到波形钢腹板简支箱梁桥的动位移函数。由于 $\sin(\omega t + \phi)$ 不总为零,在动位移函数中消去该项可得

$$W^{(6)}(x) + \left(\frac{\bar{m}\omega^2}{G_g A_g} - \frac{112G_c}{5E_c b^2} \right) W^{(4)}(x) - \left(\frac{8\bar{m}\omega^2}{E_c I} + \frac{112\bar{m}\omega^2 G_c}{5G_g A_g E_c b^2} \right) W^{(2)}(x) + \frac{112\bar{m}\omega^2 G_c}{5E_c b^2 I} W(x) = 0 \quad (17)$$

其中: $\bar{m} = \rho_c A_c + \rho_g A_g$ 。

由参考文献[13]可知简支梁的振型函数为 $W(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L}$ ($n = 1, 2, \dots, \infty$),将其代入式(17),得到波形钢腹板简支箱梁桥自由弯曲振动频率的计算公式为

$$\omega = a_\omega \sqrt{\frac{E_c I}{m}} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (18)$$

$$a_\omega = \left[1 + \frac{5E_c b^2}{112G_c} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} / \left[1 + \frac{E_c I}{G_g A_g} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{5E_c b^2}{14G_c} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{5E_c^2 b^2 I}{112G_c G_g A_g} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

其中: a_ω 为波形钢腹板组合箱梁桥考虑箱梁剪力滞效应(分母中第3项和分子中的第2项)、波形钢腹板剪切效应(分母中的第2项)及两者耦合效应影响下(分母中的第4项)的频率修正系数。

3 连续箱梁桥自由弯曲振动频率求解

波形钢腹板连续箱梁桥的振动计算可建立在简支箱梁桥的振动计算基础之上。对于跨度相等、截面相同的波形钢腹板连续箱梁桥,由文献[14]可知其三弯矩方程的矩阵形式,将其展开得到等跨径、等截面连续梁桥的频率方程为

$$\begin{vmatrix} 4H & G & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & M_1 \\ G & 4H & G & 0 & \cdots & 0 & 0 & M_2 \\ 0 & G & 4H & G & \cdots & 0 & 0 & M_3 = 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & G & 4H & M_n \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

其中: $H = (\coth \lambda L - \cot \lambda L)/2$; $G = 1/\sin \lambda L - 1/\sinh \lambda L$; λ 为特征值; M_n ($n = 1, 2, \dots, \infty$)为中支座处的弯矩。

如图4为两等跨等截面波形钢腹板连续箱梁桥。将式(20)展开得到连续梁的频率方程为

$$4HM_1 = 0 \quad (21)$$

频率方程有两组可能的解。

1) $M_1 = 0$,表示中支座处的弯矩值为零,为一个反弯点,说明振型是反对称的,此时连续梁的振动同简支梁一样,其特征值的解可按简支梁求出

$$\lambda_1 = \frac{n\pi}{L} \quad (22)$$

其中: $n = 1, 2, \dots, \infty$ 。

2) $4H = 0$,对应于两跨连续梁的正对称振型,此时连续梁的振动与一端固定一端铰支的简支梁的振动是一致的,其频率方程为

$$(\coth \lambda L - \cot \lambda L)/2 = 0 \quad (23)$$

解此频率方程得到其特征值的解为

$$\lambda_2 = \frac{1.25\pi}{L}, \frac{2.25\pi}{L}, \dots, \frac{(1+4n)\pi}{4L} \quad (24)$$

其中: $n = 1, 2, \dots, \infty$ 。

将两组特征值代入简支梁的弯曲振动频率计算公式,求得两跨波形钢腹板连续箱梁桥弯曲振动频率的计算公式。将两组频率进行比较可知,第1组频率(反对称弯曲振动)构成第1、第3、第5……个奇数阶频率;而第2组频率(正对称弯曲振动)构成第2、第4、第6……个偶数阶频率。同理可求得三

跨及四跨等截面波形钢腹板连续箱梁桥弯曲振动频率的计算公式,如表1所示。

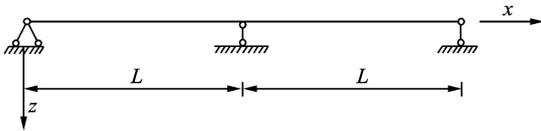


图4 两跨波形钢腹板连续箱梁示意图

Fig. 4 A continuous box girder with corrugated steel webs

表1 波形钢腹板连续箱梁桥弯曲振动频率的计算公式

Tab. 1 Formulas of bending vibration frequencies for the continuous girder bridge with corrugated steel webs

跨数	弯曲振动频率计算公式
2	$\omega = \frac{a_{\omega}}{L^2} (\pi^2, 3.927^2, 4\pi^2, 7.069^2 \dots) \sqrt{\frac{E_c I}{m}}$
3	$\omega = \frac{a_{\omega}}{L^2} (\pi^2, 3.549^2, 4.304^2, 4\pi^2 \dots) \sqrt{\frac{E_c I}{m}}$
4	$\omega = \frac{a_{\omega}}{L^2} (\pi^2, 3.393^2, 3.927^2, 4.461^2 \dots) \sqrt{\frac{E_c I}{m}}$

4 算例验证

算例选取我国河南省光山县已修建的泼河大桥,该桥为我国第一座公路用波形钢腹板PC连续箱梁桥。泼河大桥的跨径为120 m,采用4×30 m先简支后连续装配式等截面波形钢腹板组合箱梁,横截面为四箱组合箱梁截面。图5为其单片箱梁截面示意图。泼河大桥上、下翼板的混凝土材料为C50,混凝土的弹性模量为 3.5×10^4 MPa,泊松比取值0.2,密度为 2.5×10^3 kg/m³。波形钢腹板采用Q355C级钢板弯折成型,厚度为8 mm,钢板的弹性模量为 2.1×10^5 MPa,泊松比为0.3,密度为 7.8×10^3 kg/m³。波形钢腹板的波高取值为150 mm,斜板段在水平面的投影长度 a_1 取值200 mm、平板段长度 a_2 和斜板段长度 a_3 均取值250 mm。

采用Ansys 14.0有限元软件建立了泼河大桥的空间有限元模型。混凝土的上、下翼板及横隔板采用Solid 45实体单元建立,波形钢腹板采用Shell 63壳单元建立,建立完成的全桥有限元模型如图6所示。

采用笔者推导的四跨等截面波形钢腹板连续箱梁桥的计算公式求得泼河大桥的前5阶弯曲振动频率。将其与Ansys空间有限元计算值及文献[15]中泼河大桥的实测频率值进行对比,如表2所示。可以看出,笔者计算方法所得的泼河大桥弯曲振动

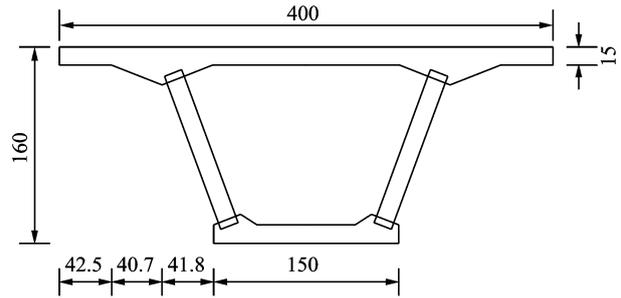


图5 泼河大桥单片梁的横截面示意图(单位:mm)

Fig. 5 A single girder cross section of the Pohe bridge (unit: mm)

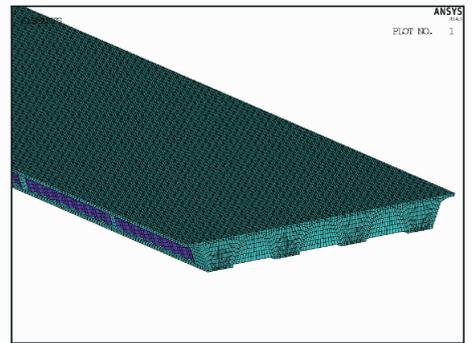


图6 泼河大桥的有限元模型

Fig. 6 Finite element model of the Pohe bridge

频率值、实桥实测频率值及Ansys三维仿真模型计算值三者吻合较好,验证了笔者推导的波形钢腹板连续箱梁桥弯曲振动频率计算公式的正确性。

表2 泼河大桥弯曲振动频率值对比

Tab. 2 Comparison the results of bending vibration frequencies of the Pohe bridge

频率阶数	笔者计算值	Ansys 计算值	实桥实测值
1	3.453	3.331	3.81
2	3.986	3.852	4.30
3	5.217	5.110	5.27
4	6.563	6.347	—
5	11.804	12.385	—

5 影响参数分析

5.1 波形钢腹板构造对振动频率的影响

采用笔者推导的计算公式分别计算了泼河大桥是否对波形钢腹板剪切模量进行修正情况下的弯曲振动频率,如表3所示。可以看出,未考虑波形钢腹板剪切模量修正所得的频率值略大于考虑修正的情况,但两者差值较小,在计算时可忽略不计。

表 3 是否考虑剪切模量修正所得弯曲振动频率值对比
Tab. 3 Comparison the results obtained by considering shear modulus of elasticity correction or not

频率阶数	未考虑剪切模量修正/Hz	考虑剪切模量修正/Hz	两者差值百分比/%
1	3.471	3.453	0.52
2	4.010	3.986	0.61
3	5.257	5.217	0.77
4	6.625	6.563	0.95
5	11.988	11.804	1.56

5.2 波形钢腹板剪切变形对振动频率的影响

采用笔者推导的计算公式分别计算了泼河大桥是否考虑波形钢腹板剪切变形效应时的弯曲振动频率,如表 4 所示。可以看出,未考虑波形钢腹板剪切变形效应所得频率值大于考虑剪切变形的情况,两者的差值较大,尤其在计算其高阶频率的情况下两者差值急剧增大。因此,在计算波形钢腹板连续箱梁桥弯曲振动频率时,需要考虑波形钢腹板剪切变形效应的影响。

表 4 是否考虑波形钢腹板剪切变形所得弯曲振动频率值对比
Tab. 4 Comparison the results obtained by considering shear deformation of corrugated steel webs or not

频率阶数	未考虑剪切变形/Hz	考虑剪切变形/Hz	两者差值百分比/%
1	3.627	3.453	5.03
2	4.218	3.986	5.83
3	5.614	5.217	7.61
4	7.191	6.563	9.57
5	13.817	11.804	17.05

5.3 剪力滞及耦合效应对振动频率的影响

采用笔者推导的计算公式分别计算了泼河大桥是否考虑箱梁剪力滞及耦合效应影响下的弯曲振动频率,如表 5 所示。可以看出,未考虑箱梁剪力滞及耦合效应所得频率值大于考虑箱梁剪力滞及耦合效应的情况,两者的差值在求解低阶频率时较小,在求解高阶频率时差值逐渐增大。

表 5 是否考虑剪力滞及耦合效应所得弯曲振动频率对比
Tab. 5 Comparison the results obtained by considering shear lag and coupling effects or not

频率阶数	未考虑剪力滞及耦合效应/Hz	考虑剪力滞及耦合效应/Hz	两者差值百分比/%
1	3.505	3.453	1.50
2	4.055	3.986	1.74
3	5.333	5.217	2.22
4	6.743	6.563	2.74
5	12.339	11.804	4.54

5.4 波形形状对振动频率的影响

假定泼河大桥的横截面尺寸不变,采用笔者推

导的计算公式分别计算了不同波形钢腹板型号下(国内外常用的 1600,1200 和 1000 型,如图 7 所示)的泼河大桥的弯曲振动频率,如表 6 所示。可以看出,采用不同的波形钢腹板型号计算所得的弯曲振动频率值较为接近,说明其弯曲振动频率受波形钢腹板型号选择的影响较弱。

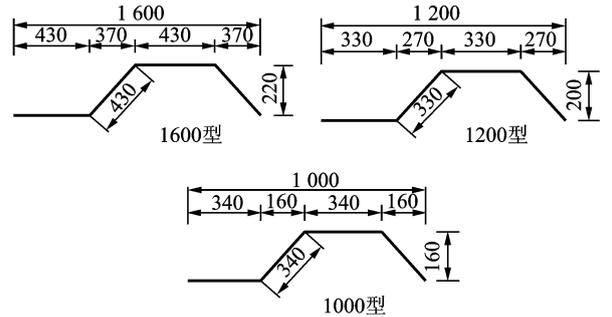


图 7 波形钢腹板的型号(单位:mm)
 Fig. 7 Type of corrugated steel web (unit: mm)

表 6 采用不同波形钢腹板型号的泼河大桥弯曲振动频率值
Tab. 6 Bending vibration frequencies of different type of corrugated steel webs for the Pohe bridge

频率阶数	1600 型频率值	1200 型频率值	1000 型频率值
1	3.460	3.456	3.419
2	3.996	3.991	3.942
3	5.233	5.225	5.144
4	6.588	6.575	6.450
5	11.877	11.840	11.479

5.5 与《公路桥涵设计通用规范》计算值对比

《公路桥涵设计通用规范》(JTG D60-2015)中给出了连续梁桥竖向基频的估算公式为

$$f_{11} = \frac{13.616}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI_c}{m_c}} \quad (25)$$

$$f_{12} = \frac{23.651}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI_c}{m_c}} \quad (26)$$

规范规定: f_{11} 用于计算连续梁的冲击力引起的正弯矩效应和剪力效应; f_{12} 用于计算连续梁的冲击力引起的负弯矩效应。采用规范中的计算公式求得泼河大桥的竖向基频,并与笔者的计算值进行对比,如表 7 所示。可以看出,采用笔者推导的计算公式求得的竖向基频与规范计算值有较大差别,因此波

表 7 泼河大桥竖向基频的计算值与规范值对比
Tab. 7 Comparison the fundamental vibration frequencies between calculated value and code values

频率阶数	笔者计算值	f_{11}	f_{12}
1	3.453	4.950	8.599

形钢腹板连续箱梁桥竖向基频的计算不宜采用现行15桥梁规范中给出的连续梁桥竖向基频的计算公式。

6 结 论

1) 采用能量法、Hamilton原理及连续梁的三弯矩方程,推导获得了等跨等截面波形钢腹板连续箱梁桥竖向弯曲振动频率的计算公式,计算公式的正确性得到Ansys空间有限元计算值和实桥实测频率值的验证,可以用于实际工程的分析计算。

2) 在计算波形钢腹板连续箱梁桥的弯曲振动频率时,是否考虑波形钢腹板剪切模量修正、箱梁剪力滞及耦合效应及波形钢腹板型号等影响参数均不会对计算结果产生较大影响,因此在实际工程计算中,为了计算的简便性可忽略上述影响参数。

3) 波形钢腹板连续箱梁桥的弯曲振动频率受波形钢腹板剪切变形效应的影响较大,尤其是在计算其高阶弯曲振动频率时,因此必须考虑波形钢腹板剪切变形效应对其弯曲振动频率的影响。

4) 现行的15桥规中给出的连续梁桥竖向基频的计算公式不宜用于计算波形钢腹板连续箱梁桥的竖向基频。

参 考 文 献

- [1] Mo Y L, Fan Y L. Torsional design of hybrid concrete box girders[J]. Journal of Bridge Engineering, 2006, 11(3):329-339.
- [2] Nguyen N D, Han S R, Lee G S, et al. Moment modification factor of I-girder with trapezoidal-web-corrugations considering concentrated load height effects [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2011, 67(11):1773-1787.
- [3] Nguyen N D, Han S R, Kim J H, et al. Moment modification factors of I-girder with trapezoidal web corrugations under moment gradient[J]. Thin-Walled Structures, 2012,57(8):1-12.
- [4] Hassanein M F, Kharoob O F. Shear buckling behavior of tapered bridge girders with steel corrugated webs [J]. Engineering Structures, 2014,74(9):157-169.
- [5] Kövesdi B, Dunai L. Fatigue life of girders with trapezoidally corrugated webs; an xperimental study [J]. International Journal of Fatigue, 2014,64(7):22-32.
- [6] 袁卓亚,李立峰,刘清,等.波形钢腹板组合箱梁横向内力分析及试验研究[J].中国公路学报,2015,28(11):73-81.
- Yuan Zhuoya, Li Lifeng, Liu Qing, et al. Analysis and eperimental study of transverse internal force in composite box-girder with corrugated steel webs[J]. China Journal of Highway and Transport, 2015, 28

(11):73-81. (in Chinese)

- [7] 李明鸿,万水,蒋正文,等.波形钢腹板混凝土组合梁挠度计算的初参数法[J].华南理工大学学报:自然科学版,2015,43(2):66-74.
- Li Minghong, Wan Shui, Jiang Zhengwen, et al. Initial parameter method for deflection calculation of concrete composite girder with corrugated steel webs[J]. Journal of South China University of Technology: Natural Science Edition, 2015,43(2):66-74. (in Chinese)
- [8] 江克斌,丁勇,杨建奎,等.波形钢腹板PC组合箱梁纯扭作用下抗扭承载力试验研究[J].工程力学,2013,30(6):175-182.
- Jiang Kebin, Ding Yong, Yang Jiankui, et al. Experimental study on ultimate torsional strength of PC composite box-girder with corrugated steel webs under pure torsion[J]. Engineering Mechanics, 2013,30(6): 175-182. (in Chinese)
- [9] JTG D60-2015 公路桥涵设计通用规范[S].北京:人民交通出版股份有限公司,2015.
- [10] Samanta A, Mukhopadhyay M. Finite element static and dynamic analyses of folded plates[J]. Engineering Structures, 1999,21:277-287.
- [11] 吴文清,叶见曙,万水,等.波形钢腹板-混凝土组合箱梁截面变形的拟平截面假定及其应用研究[J].工程力学,2005,22(5):177-178.
- Wu Wenqing, Ye Jianshu, Wan Shui, et al. Quasi plane assumption and its application in steel-concrete composite box girders with corrugated steel webs[J]. Engineering Mechanics, 2005, 22 (5): 177-178. (in Chinese)
- [12] 冀伟,刘世忠.波形钢腹板筒支箱梁竖向频率的影响因素分析[J].振动、测试与诊断,2013,33(6):1039-1043.
- Ji Wei, Liu Shizhong. Influencing factors of vertical frequency of the box beam with corrugated steel webs [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2013,33(6):1039-1043. (in Chinese)
- [13] R. 克拉夫, J. 彭津. 结构动力学[M]. 王光远,译.北京:高等教育出版社,2006:283-291.
- [14] 杨弗康. 结构动力学[M]. 北京:人民交通出版社,1987:254-261.
- [15] 李明元. 浚河大桥的施工与动力特性试验研究[J]. 交通标准化,2006,4:135-138.
- Li Mingyuan. Study on construction and dynamic character istic of bohe bridge [J]. Communications Standardization, 2006,4:135-138. (in Chinese)



第一作者简介:冀伟,男,1982年6月生,副教授。主要研究方向为桥梁工程及桥梁结构动力分析。曾发表《波形钢腹板筒支箱梁竖向频率的影响因素分析》《《振动、测试与诊断》2013年第33卷第6期》等论文。

E-mail:jiwei1668@163.com

