

多列组合角接触球轴承刚度和位移量*

冯吉路^{1,2}, 孙志礼¹, 李皓川¹, 马小英¹, 佟操¹

(1. 东北大学机械工程与自动化学院 沈阳, 110819) (2. 山东省科学院海洋仪器仪表研究所 青岛, 266001)

摘要 以滚动轴承动力学分析和滚道控制理论为基础, 提出了应用 Powell 优化算法和 Newton-Raphson 算法相结合的方式计算非线性方程组, 给出了预紧力和转速的多列组合角接触球轴承组合刚度相应程序。对 7016A5 轴承 DBD 组合的研究结果表明: 预紧力和转速与单个轴承和轴承的组合刚度及位移量呈现非线性关系。轴承的组合轴向刚度小于单个轴承的轴向刚度, 其径向刚度大于单个轴承的径向刚度。为实现预定的轴承动态性能, 单双侧轴承内圈的间隙量须大于两侧轴承位移量之和。

关键词 角接触球轴承; 转速; 刚度; 预紧力; 位移量

中图分类号 TH133.33

引言

高档数控机床是支撑整个装备制造领域发展的核心装备。轴承作为数控机床主轴系统的重要组成部分, 其性能优劣直接影响产品的加工精度和加工效率^[1-2]。在数控机床主轴系统中, 轴承一般以成组配合形式使用, 研究多列组合轴承的动态性能对进一步分析机床主轴系统具有重要意义。

高速角接触球轴承的刚度受轴承的结构参数、安装、预紧力、转速和外载荷等因素的影响。文献[3-5]指出轴承预紧力、过盈配合量及离心位移的增加会引起轴承刚度的增加。文献[6-7]通过实验进行了角接触球轴承的刚度研究。文献[8]通过实验法对主轴系统中主轴刚度和系统动态特性进行了研究, 根据固有频率获取轴承实际所承受的预紧力, 解决了轴-轴承系统确定预紧力的难题。郭向东等^[9]分析了预紧力与主轴动态特性的影响, 说明了主轴刚度与主轴系统动态特性的相关性。Jiang 等^[10]通过建模分析和改善了双列组合轴承-主轴-拉杆系统的动态性能。上述研究分析了角接触球轴承刚度的影响因素及轴承对主轴系统动态性能的影响, 但没有针对三列组合轴承性能进行分析。

笔者以滚动轴承动力学分析和滚道控制理论为基础, 提出了应用 Powell 优化算法和 Newton-Raphson 算法相结合的方式计算非线性方程组, 给出了预紧力和转速的多列组合角接触球轴承组合刚

度相应程序。分析了预紧力和转速对多列组合轴承刚度和位移量的影响。该研究为实验测量轴承位移量的传感器选择提供了理论依据, 并给出了实现组合轴承性能所需的最小配合间隙量, 为指导机床主轴装配提供了理论基础。

1 三列轴承 DBD 组合轴向力和径向力分配

当多列角接触球轴承多列组合时, 为明确每个轴承所承受的总径向负荷 F_r 和总轴向负荷 F_{ao} , 在考虑外部径向负荷 F_{re} 、外部轴向负荷 F_{ae} 及预紧力 F_a 的情况下, 必须计算出每个轴承的负荷分配。三列角接触球轴承以 DBD 形式组合受力情况, 如图 1 所示。

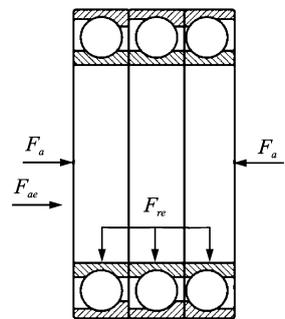


图 1 角接触球轴承 DBD 组合受力示意图

Fig. 1 Load diagram of DBD combinations of angular contact ball bearing

* 国家科技重大资助项目(2013ZX04011-011); 中央高校基本科研业务费基金资助项目(N140306004)
收稿日期: 2015-06-25; 修回日期: 2015-09-10

在 DBD 组合下,轴承在承受外部径向负荷 F_{re} 时,总预负荷 F_{ap} 为

$$F_{ap1} = \frac{1.2F_{re} \tan \alpha + F_a}{4} \quad (1)$$

$$F_{ap2} = \frac{1.2F_{re} \tan \alpha + F_a}{2} \quad (2)$$

此时,如果 $F_{ap1} < F_a/2$,则 $F_{ap1} = F_a/2$;如果 $F_{ap2} < F_a/2$,则 $F_{ap2} = F_a/2$ 。

每个轴承承受外部轴向负荷时的总轴向负荷 (F_{a1}, F_{a2}) 为

$$F_{a1} = 0.4F_{ae} + F_{ap1} \quad (3)$$

$$F_{a2} = F_{ap2} - 0.2F_{ae} \quad (4)$$

如果 $F_{a2} < 0$,表示没有预紧,则 $F_{a1} = F_{ae}/2$, $F_{a2} = 0$ 。

每个轴承的总径向负荷 F_r 与总轴向负荷有 2/3 次方的比例关系,可得单个轴承的径向载荷分别为

$$F_{r1} = \frac{F_{a1}^{\frac{2}{3}} F_{re}}{2F_{a1}^{\frac{2}{3}} + F_{a2}^{\frac{2}{3}}} \quad (5)$$

$$F_{r2} = \frac{F_{a2}^{\frac{2}{3}} F_{re}}{2F_{a1}^{\frac{2}{3}} + F_{a2}^{\frac{2}{3}}} \quad (6)$$

2 赫兹接触刚度和组合刚度

根据赫兹接触理论,两接触物体的接触载荷与弹性趋近量之间的关系^[4,11]为

$$\delta = \Gamma \left(\frac{9\Sigma\rho}{2\pi^2 k^2 E^2 \Sigma} \right)^{\frac{1}{3}} Q^{\frac{2}{3}} \quad (7)$$

对式(7)关于 Q 求导,得到赫兹接触刚度

$$K = 1.5 \left(\frac{\pi k E}{3\Gamma} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2\Sigma}{\Gamma\Sigma\rho} \right)^{\frac{1}{3}} Q^{\frac{1}{3}} \quad (8)$$

其中: $\frac{2}{E} = \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}$; E_1, E_2, μ_1, μ_2 分别为两个接触物体的弹性模量和泊松比; $\Sigma\rho$ 为与轴承几何参数和接触角有关的参数。

Berwe 和 Harmrock 借助最小二乘法求得简化关系式^[4]为

$$k = 1.0339 \left(\frac{\sum \rho_2}{\sum \rho_1} \right)^{0.636} \quad (9)$$

$$\Gamma = 1.5277 + 0.6023 \ln \left[\frac{\sum \rho_2}{\sum \rho_1} \right] \quad (10)$$

$$\Sigma = 1.0003 + 0.5968 \frac{\sum \rho_1}{\sum \rho_2} \quad (11)$$

其中: k 为椭圆率参数; Γ 和 Σ 分别为第 1 类和第 2 类完全椭圆积分。

由式(8)得到第 j 个滚动体与轴承内外圈滚道间的接触刚度分别为

$$K_{ij} = 1.5 \left(\frac{\pi k_{ij} E}{3\Gamma_{ij}} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2\Sigma_{ij}}{\Gamma_{ij}\Sigma\rho} \right)^{\frac{1}{3}} Q_i^{\frac{1}{3}} \quad (12)$$

$$K_{ej} = 1.5 \left(\frac{\pi k_{ej} E}{3\Gamma_{ej}} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2\Sigma_{ej}}{\Gamma_{ej}\Sigma\rho} \right)^{\frac{1}{3}} Q_e^{\frac{1}{3}} \quad (13)$$

根据轴承的几何关系,第 j 个滚动体与轴承内外圈滚道接触刚度的轴向和径向分量分别为

$$K_{aij} = K_{ij} \sin^2 \alpha_{ij}$$

$$K_{aej} = K_{ej} \sin^2 \alpha_{ej}$$

$$K_{rij} = K_{ij} \cos^2 \alpha_{ij}$$

$$K_{rej} = K_{ej} \cos^2 \alpha_{ej}$$

利用 Z 个滚动体与轴承内外圈滚道的串并联关系,得到角接触球轴承的轴向刚度、径向刚度和角刚度分别为

$$K_a = \sum_{j=1}^Z \frac{K_{aij} K_{aej}}{K_{aij} + K_{aej}} \quad (14)$$

$$K_r = \sum_{j=1}^Z \frac{K_{rij} K_{rej}}{K_{rij} + K_{rej}} \cos^2 \frac{2\pi}{Z} (j-1) \quad (15)$$

$$K_\theta = \frac{D_m^2}{4} \sum_{j=1}^Z \frac{K_{rij} K_{rej}}{K_{rij} + K_{rej}} \cos^2 \frac{2\pi}{Z} (j-1) \quad (16)$$

当角接触球轴承 DBD 组合时,轴承的倾覆力矩引起的倾角变化很小,因此可忽略轴承的角刚度。角接触球轴承的轴向和径向组合刚度分别为

$$K_A = \frac{2K_{a1} K_{a2}}{2K_{a1} + K_{a2}} \quad (17)$$

$$K_R = 2K_{r1} + K_{r2} \quad (18)$$

可见,轴承的组合刚度既与轴承的接触角和接触载荷相关,又与轴承的组合形式有关。

3 拟静力学分析和沟道控制理论

3.1 变形几何相容方程

假设外圈沟道曲率中心是固定的,内圈沟道曲率中心可以相对移动。建立载荷作用下的坐标系,如图 2 所示。图中第 j 球的方位角为 φ_j ,表达式为

$$\varphi_j = \frac{2\pi(j-1)}{Z} \quad (19)$$

固定外圈沟道曲率中心为坐标原点,根据变形几何关系确定第 j 个钢球中心位置,如图 3 所示。其中,第 j 个钢球中心位置的变化

$$X_{1j} + X_{2j} - [(f_e - 0.5)D_w + \delta_{ej}]^2 = 0 \quad (20)$$

$$(A_{1j} - X_{1j})^2 + (A_{2j} - X_{2j})^2 -$$

$$[(f_i - 0.5)D_w + \delta_{ij}]^2 = 0 \quad (21)$$

其中: $X_{1j}, X_{2j}, A_{1j}, A_{2j}$ 分别为外滚道曲率中心与第

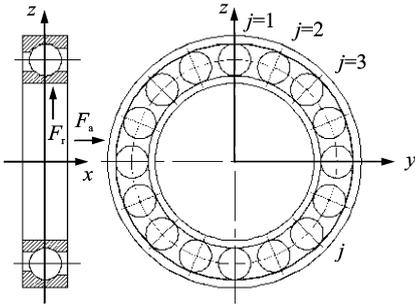


图2 轴承加载示意图

Fig. 2 The bearing load diagram

j 个钢球球心最终位置和内滚道曲率中心的水平、垂直距离； f_e 和 f_i 分别为轴承内外圈滚道的曲率半径系数； D_w 为滚动体直径。

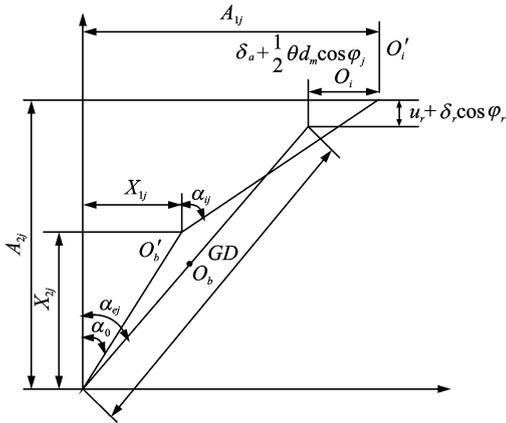


图3 球中心和沟道曲率中心的相对位置

Fig. 3 Relative position of the ball and race curvature center

3.2 滚动体拟静力学分析

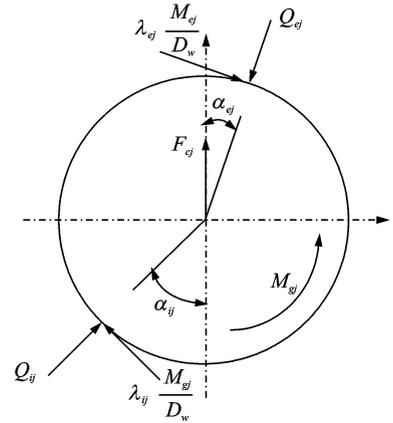
第 j 个滚动体与内、外圈的受力情况，如图4所示。根据受力平衡关系得到滚动体的受力平衡方程

$$Q_{ej} \sin \alpha_{ej} - Q_{oj} \sin \alpha_{oj} - \frac{M_{gj}}{D_w} (\lambda_{ej} \cos \alpha_{ej} - \lambda_{oj} \cos \alpha_{oj}) = 0 \quad (22)$$

$$Q_{ej} \cos \alpha_{ej} - Q_{oj} \cos \alpha_{oj} + \frac{M_{gj}}{D_w} (\lambda_{ej} \sin \alpha_{ej} - \lambda_{oj} \sin \alpha_{oj}) + F_{cj} = 0 \quad (23)$$

其中： F_{cj} 为第 j 个滚动体产生的离心力； M_{gj} 为第 j 个滚动体产生的陀螺力矩； λ_{ej} 、 λ_{oj} 为修正系数。

根据套圈控制理论：低速时，滚动体与内、外圈接触面所产生的摩擦力相同，能完全平衡陀螺力矩而不产生滑动， λ_{ej} 、 λ_{oj} 都取 1；高速时，由于离心力效应使得滚动体与内圈的接触面不产生摩擦，陀螺力矩完全由滚动体与外圈接触面的摩擦力平衡，取 $\lambda_{ej} = 0$ ， $\lambda_{oj} = 2$ 。

图4 第 j 个滚动体受力分析Fig. 4 Load analysis of the j -th ball

3.3 轴承拟静力学平衡

轴承内圈在内外载荷的共同作用下处于受力平衡状态，对应的平衡方程为

$$F_r - \sum_{j=1}^Z Q_{ij} \cos \alpha_{ij} \cos \varphi_j = 0 \quad (24)$$

$$F_a - \sum_{j=1}^Z Q_{ij} \sin \alpha_{ij} = 0 \quad (25)$$

$$M - \sum_{j=1}^Z Q_{ij} R_i \sin \alpha_{ij} \cos \varphi_j = 0 \quad (26)$$

其中： $R_i = \frac{1}{2} D_m + (f_e - 0.5) D_w \cos \alpha^0$ ； α^0 为轴承滚动体的初始接触角。

4 轴承刚度的计算方法和程序

计算轴承的组合刚度时，分别计算出每一个轴承的刚度值，通过求解式(20)~(26)，得到单个轴承的刚度值。非线性方程组的个数为 $4Z+3$ ， Z 为滚动体的个数。这样的大规模非线性方程组不可能求得解析解，因此必须采用数值解法求解。笔者采用 Powell 和 Newton-Raphson 法结合的方式求解非线性方程组，该方法克服了 Newton-Raphson 法求解非线性方程组时初值要求高、确定迭代收敛判据难和逐层迭代求解等缺点。轴承组合刚度的求解流程如图5所示。

5 计算结果及分析

笔者计算角接触球轴承 7016A5 以 DBD 形式组合的轴承组合刚度时，忽略了倾覆力矩的影响，不对轴承的角刚度进行计算。由于高速旋转时，轴承 3 列 DBD 组合单列侧轴承承受内部负荷增加，有可

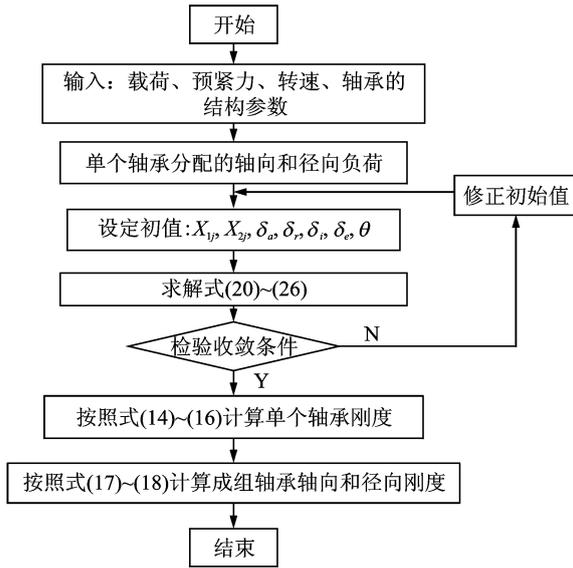


图 5 轴承组合刚度计算流程图

Fig. 5 Computation flowchart of combinations stiffness of the bearing

能造成轴承损伤,所以 DBD 组合不适合高速旋转。预紧力和转速变化的情况下,分别计算了单个轴承刚度和轴承的组合刚度。轴承所承受的外部径向载荷 $F_r = 200 \text{ N}$, 轴承材料为 GCr15。轴承的结构参数如表 1 所示,图 6~13 为所有的计算结果。

表 1 角接触球轴承的原始参数

Tab. 1 The initial parameters of angular contact ball bearing

轴承参数	数值
轴承内径/mm	80
轴承外径/mm	125
球直径/mm	13.494
中心圆直径/mm	103.141 7
内圈沟道半径/mm	7.101
外圈沟道半径/mm	6.966
滚动体数目	20

由图 6,7 可见,在预紧力 $F_a = 2 \text{ kN}$ 的条件下,随着轴承转速的增加,轴承滚动体的离心力将增大,引起轴承内接触角随转速的增加而增大,外接触角随转速的增加而减小,导致了单个轴承的径向刚度和组合刚度呈现增加的趋势,单个轴承的轴向刚度和组合刚度均呈现减小的趋势,且轴承的刚度值与转速呈现非线性关系。由于轴承 DBD 的组合形式,单侧轴承的轴向载荷分配是双侧单个轴承的 2 倍,因此双侧轴承的单个轴承的轴向刚度和径向刚度明显小于单侧轴承。

由图 8,9 所示,在转速 $n = 2 \text{ kr/min}$ 的条件下,随着预紧力的增加,轴承的离心作用被逐渐抑制,轴承的内外接触角均会随预紧力的增加而增大,引起

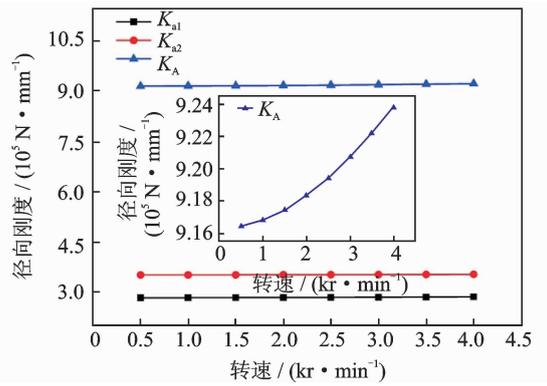


图 6 轴承径向组合刚度随转速的变化

Fig. 6 Variation of radial combinations stiffness of bearing with rotational speed

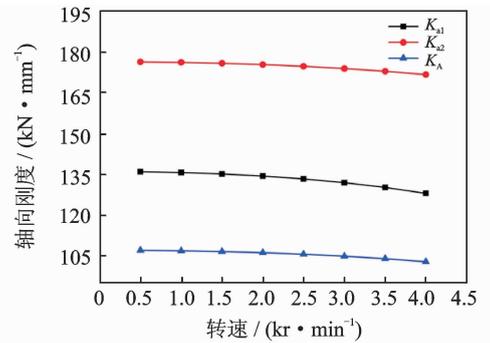


图 7 轴承轴向组合刚度随转速的变化

Fig. 7 Variation of radial combinations stiffness of bearing with rotational speed

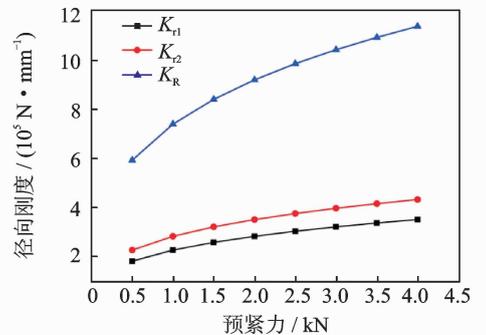


图 8 轴承径向组合刚度随预紧力的变化

Fig. 8 Variation of radial combinations stiffness of bearing with preload

单个轴承以及轴承组合轴向和径向刚度的增大。单个轴承以及轴承组合刚度的变化率在逐渐减小,单个轴承刚度以及轴承组合刚度均呈现明显的非线性变化趋势。通过图 6~9 的分析可知,轴承的组合轴向刚度小于单个轴承的轴向刚度,轴承的组合径向刚度大于单个轴承的径向刚度。

由图 10,11 可知,在预紧力为 $F_a = 2 \text{ kN}$ 的条件下,当轴承的转速低于 2 kr/min 时,轴承的径向和轴向位移量总体变化不大。由于转速较低,单侧

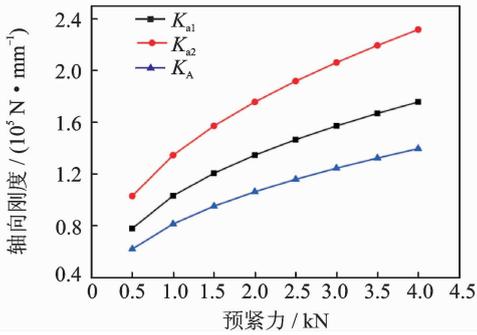


图9 轴承轴向组合刚度随预紧力的变化

Fig. 9 Variation of axial combinations stiffness of bearing with preload

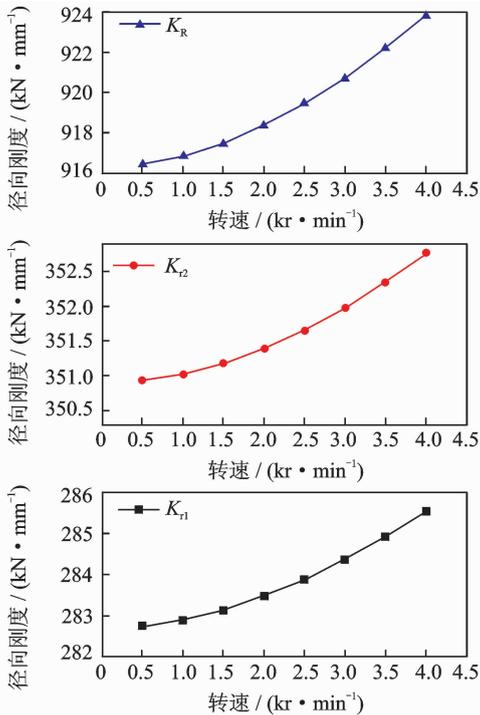


图10 轴承内圈轴向位移量随转速的变化

Fig. 10 Variation of axial displacement of inner ring with rotational speed

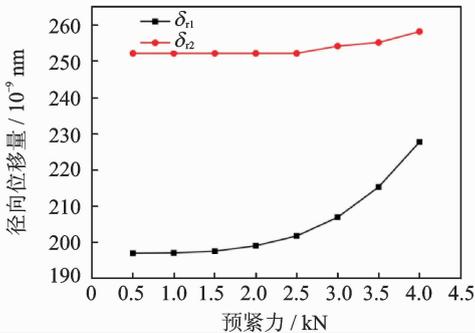


图11 轴承内圈径向位移量随转速的变化

Fig. 11 Variation of radial displacement of inner ring with rotational speed

离心作用的抑制作用明显小于单侧轴承,导致单侧轴承的轴向位移量随着转速的增加而增大,而双侧轴承的轴向位移量几乎没有发生变化。当轴承的转速大于2 kr/min时,轴承滚动体的离心作用逐渐增加,使得单侧和双侧轴承的轴向位移量随着转速的增加而减小,径向位移量随着转速的增加而增大。可见,轴承的径向和轴向位移量随转速增加的变化均为纳米级变化,因此用实验法测量轴承转速对轴承内圈位移量的影响时,轴承转速越低则需要的测量传感器的分辨率越高。

由图12,13分析可知,在转速为 $n=2$ kr/min的条件下,轴承的径向和轴向位移量随着转速的增加呈现明显的非线性变化趋势,且单双侧轴承的轴向位移量随着轴承预紧力的增加而增大,径向位移量随着轴承预紧力的增加而减小。当预紧力为500 N时,单侧轴承的预紧力为500 N,而双侧单个轴承的预紧力为250 N。可见,在双侧单个轴承的滚动体离心力作用明显大于单侧轴承滚动体离心作用的影响,从而导致在轴承的预紧力小于某一数值时,单侧

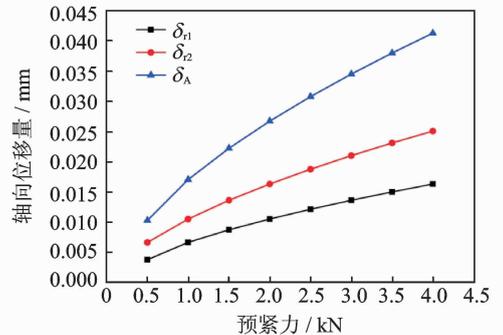


图12 轴承内圈轴向位移量随预紧力的变化

Fig. 12 Variation of axial displacement of inner ring with preload

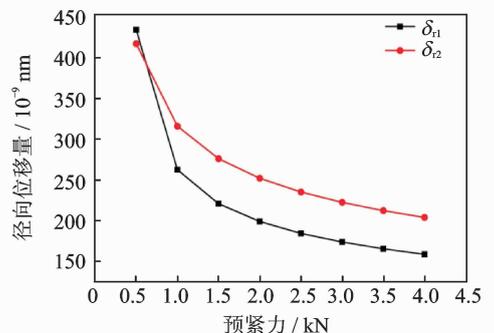


图13 轴承内圈径向位移量随转速的变化

Fig. 13 Variation of radial displacement of inner ring with preload

轴承的径向向位移量小于双侧轴承的径向位移量。轴承DBD组合形式使用时,在给定预紧力的前提下,单双侧轴承内圈的间隙量必须大于两侧轴承位

移量之和,否则不能实现轴承的预定动态性能。通过图10~13分析可知,轴承的组合轴向位移量是单双侧轴承轴向位移量之和,相同转速和特定预紧情况下,单侧轴承的轴向和径向位移量均应该大于双侧单个轴承的轴向和径向位移量。

6 结 论

1) 提出了 Powell 优化方法和 Newton-Raphson 方法并用的技巧求解轴承的拟静力学方程,该方法克服了单纯使用 Newton-Raphson 法对初值要求高的缺点。

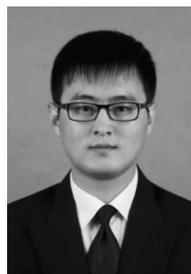
2) 单个轴承的轴向刚度大于轴承的组合轴向刚度,其径向刚度小于轴承的组合径向刚度,且单个轴承刚度以及轴承组合刚度与预紧力呈现明显的非线性关系。

3) 在预紧力不变的情况下,轴承的径向和轴向位移量随转速增加的变化均为纳米级变化,转速越低轴承的轴向和径向位移量越小。通过理论计算轴承位移量,可以为实验测量轴承位移量的传感器分辨率的选择提供理论依据。

4) 轴承 DBD 组合形式使用时,为实现预定的轴承动态性能,单双侧轴承内圈的间隙量必须大于两侧轴承位移量之和。

参 考 文 献

- [1] 杨叔子,丁汉,李斌. 高端制造装备关键技术的科学问题[J]. 机械制造与自动化, 2011,40(1):1-5.
Yang Shuzi, Ding Han, Li Bin. Scientific problems originated from key techniques of advanced manufacturing equipments[J]. Machine Building and Automation, 2011,40(1):1-5. (in Chinese)
- [2] Hwang Y, Lee C. A review on the preload technology of the rolling bearing for the spindle of machine tools [J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2010, 11(3): 491-498.
- [3] 王保民,梅雪松,胡赤兵,等. 内圈离心位移对高速角接触球轴承刚度的影响[J]. 计算力学学报, 2010, 27(1): 145-150.
Wang Baomin, Mei Xuesong, Hu Chibing, et al. Influence of inner ring centrifugal displacement on the stiffness of high-speed angular contact ball bearing [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2010, 27(1): 145-150. (in Chinese)
- [4] 王硕桂,夏源明. 过盈配合量和预紧力对高速角接触球轴承刚度的影响[J]. 中国科学技术大学学报, 2006, 36(12): 1314-1320.
Wang Shuogui, Xia Yunaming. Effect of the interference fit and axial preload in the stiffness of the high-speed angular contact ball bearing [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2006, 36(12): 1314-1320. (in Chinese)
- [5] Jedrzejewski J, Kwasny W. Modelling of angular contact ball bearings and axial displacements for high-speed spindles[J]. CIRP Annals-Manufacturing Technology, 2010, 59(1): 377-382.
- [6] 李纯洁,洪军,张进华,等. 角接触球轴承动刚度的实验研究[J]. 西安交通大学学报, 2013, 47(7): 68-72.
Li Chunjie, Hong Jun, Zhang Jinhua, et al. Experimental analysis for dynamic stiffness of angular contact ball bearings [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2013, 47(7): 68-72. (in Chinese)
- [7] 方兵,张雷,曲兴田,等. 角接触球轴承刚度理论计算与实验[J]. 吉林大学学报:工学版, 2012, 42(4): 840-844.
Fang Bing, Zhang Lei, Qu Xingtian, et al. Theoretical and experimental research of stiffness of angular contact ball bearing [J]. Journal of Jilin University:Engineering and Technology Edition, 2012, 42(4): 840-844. (in Chinese)
- [8] 邓四二,王燕霜,李新宁. 轴承预紧力与系统固有频率关系的试验[J]. 航空动力学报, 2010, 25(8):1883-1887.
Deng Sier, Wang Yanshuang, Li Xinning. Experimental study on the relationship between bearing preload and system natural frequency [J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(8):1883-1887. (in Chinese)
- [9] 郭向东,王燕霜. 轴承预紧力-系统固有频率及跨距关系的研究[J]. 轴承, 2013(4):30-33.
Guo Xiangdong, Wang Yanshuang. Research on relationship among bearing preload system natural frequency and span [J]. Bearing, 2013(4):30-33. (in Chinese)
- [10] Jiang S, Zheng S. A modeling approach for analysis and improvement of spindle-drawbar-bearing assembly dynamics[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2010, 50(1): 131-142.
- [11] 万长森. 滚动轴承的分析方法[M]. 北京:机械工业出版社,1987:45-46.



第一作者简介:冯吉路,男,1988年6月生,博士生。主要研究方向为机床主轴动力学及加工动力学。曾发表《Identification of chatter in milling of Ti-6Al-4V titanium alloy thin-walled workpieces based on cutting force signals and surface topography》《International Journal of Advanced Manufacturing Technology》2016, Vol. 82, No. 9-12等论文。
E-mail: fengjilu123@sina.com