第 36 卷第 6 期
2016 年 12 月

振动、测试与诊断
Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis

Vol. 36 No. 6
Dec. 2016

doi:10.16450/j.cnki.issn.1004-6801.2016.06.006

任意阶 PDE 降噪特性分析*

尹爱军[1]， 张 泉[1,2]， 戴宗贤[3]

(1.重庆大学机械传动国家重点实验室 重庆,400044) (2.天津送变电工程公司 天津,300161)
(3.重庆市计量质量检测研究院第一分院 重庆,402260)

摘要 通过对分数阶微积分原理的研究,提出了任意阶偏微分方程(partial differential equations, 简称 PDE)降噪的统一模型,实现了基于任意阶 PDE 降噪的数值化方法,并分析了任意阶 PDE 降噪特性。该数值化方法能够快速实现信号降噪,耗时少。通过仿真实验,分析了 PDE 降噪性能的影响因素,与其他去噪方法进行了对比分析,并对现场实测信号进行了降噪分析。结果表明,PDE 数值求解降噪方法性能优良,算法简单。

关键词 偏微分方程；分数阶；降噪；振动信号
中图分类号 TN911

引 言

信号降噪在信号特征提取和参数化中具有重要的意义。滤波降噪理论与方法获得了广泛深入的研究,其理论从一般的平稳信号降噪方法发展到各种非平稳信号降噪方法,如小波去噪、经验模态分解(empirical mode decomposition, 简称 EMD)、奇异值分解降噪及滑动平均滤波等降噪方法[1]。小波变换是一种很好的非平稳信号降噪方法,得到了广泛的研究和应用[2]。不同的小波基及阈值对去噪效果有很大影响[3]。EMD 具有良好的自适应时频分析能力,但 EMD 需要先验知识,降低了该算法的鲁棒性[4-5]。奇异值分解降噪是一种非线性滤波方法,奇异值数目选取是其降噪效果好坏的关键,但有效阶次的选择并没有明确方法[6]。滑动平均滤波能够有效抑制随机误差,提高信噪比,但高频变化的确定性成分会因平均而被削弱[7]。偏微分方程(PDE)在图像去噪、图像增强等方面取得了很好的应用效果[8-9]。PDE 在一维振动信号也得到一些应用,Baravdish 等[10]通过矩阵奇异值分解与 PDE 实现对音频信号进行降噪。Yin 等[11]研究了基于 PDE 的信号修补方法,在 EMD 端点效应处理取得了很好的效果。文献[12]将 PDE 用于振动信号去噪取得了很好的实际应用效果。和整数阶 PDE 一样,分数阶 PDE 受到广泛的关注。Pu 等[13]通过分数阶的 PDE 降噪模型对二维图像信号进行降噪,取得了更好的效果。Bai 等[14]利用非线性的各向异性分数阶扩散方程获得更自然的影像。然而,分数阶 PDE 的阶次被限制在一个很小的范围内,这影响了 PDE 降噪效果。

笔者根据分数阶微积分原理,从传统滤波器的幅频特性角度出发,提出了任意阶 PDE 降噪的统一模型,并研究了 PDE 滤波器的设计方法以及基于 PDE 降噪的数值化方法,建立了基于数值解降噪的一般过程。通过仿真实验,分析了 PDE 降噪性能的影响因素,并与小波去噪等方法进行了对比分析。结果表明,PDE 数值求解降噪方法性能优良,算法简单。

1 任意阶 PDE 滤波模型

1.1 分数阶微积分定义

从不同的应用角度去分析问题可以得到不同的分数阶微积分定义。至今为止,分数阶微积分仍没有统一的定义表达式[15]。目前,主要有 4 种经典的分数阶微积分定义:Grünwald-Letnikov, Capotu, Riemann-Liouville 和 Cauchy 定义。其中,后 3 种定义使用了 Cauchy 积分公式,计算复杂度较高,不利于分数阶微分数值计算。

Grünwald-Letnikov 定义是对整数阶微分的差

* 国家自然科学基金资助项目(51105396)；中央高校基本科研业务费资助项目(CDJZR13 11 55 01)
收稿日期:2014-12-09;修回日期:2015-01-07

分近似递推而来。式(1)为 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义表达式

$$
{}_{z}^{G}D_{t}^{v}f(t) \triangleq \lim_{h\to 0} f_{h}^{(v)}(t) \triangleq \lim_{\substack{h\to 0 \\ ih = t-z}} h^{-v}\sum_{b=0}^{i}\begin{bmatrix}-v \\ b\end{bmatrix} f(t-bh) \tag{1}
$$

其中:${}_{a}^{G}D_{t}^{v}f(t)$的上标 G 表示 Grünwald-Letnikov 定义;上标 v 表示求 v 阶微分;下标 z 和 t 表示求积分式的下界和上界;z 为时间 t 的初值。

根据算子理论,当 $v<0$ 时,v 阶微分转化为 v 阶积分,${}_{z}^{G}D_{t}^{v}f(t)={}_{z}^{G}I_{t}^{v'}f(t)(v'=-v)$。根据式(1),当 $v\in Z^{+}$ 时,分数阶微分将退化为整数阶微分;当 $v\in Z^{-}$ 时,分数阶积分将退化为整数阶积分。

Riemann-Liouville 分数阶的微积分定义是对 Grünwald-Letnikov 定义的改进,有

$$
{}_{z}^{R}D_{t}^{v}f(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{d^{n}f}{dt^{n}} \quad (v=n\in N) \\ \dfrac{d^{n}}{dt^{n}}\dfrac{1}{\Gamma(n-v)}\displaystyle\int_{z}^{t}\dfrac{s(\tau)}{(t-\tau)^{v-n+1}}d\tau \\ (0\leqslant n-1<v<n) \end{bmatrix} \tag{2}
$$

其中:${}_{z}^{R}D_{t}^{v}f(t)$中除了 R 以外的参数与 Grünwald-Letnikov 型分数阶微积分定义相同;R 表示 Riemann-Liouville 分数阶的微积分定义。

在一定条件下,可由 Grünwald-Letnikov 型分数阶导数定义获得 Riemann-Liouville 型分数阶导数的数值化解法[16]。

Riemann-Liouville 型分数阶导数具有如下复合运算法则

$$
{}_{z}^{R}D_{t}^{r}\left(\frac{d^{n}f(t)}{dt^{n}}\right) = {}_{z}^{R}D_{t}^{n+r}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{k}(z)(t-z)^{k-r-n}}{\Gamma(-r-n+k+1)} \quad (n\in Z) \tag{3}
$$

1.2 任意阶 PDE 滤波原理

笔者根据热传导方程,从滤波器角度推导了整数阶偏微分方程的滤波原理和方法[11-12]。在这些研究基础上,分析任意阶偏微分方程的滤波特性。定义分数阶偏微分方程式为

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^{v}\dfrac{\partial^{v}u}{\partial x^{v}} = f(x,t) \\ \qquad (x\in R, t>0, v\in R, a\in R^{+}) \\ u(x,0)=\varphi(x) \quad (x\in R) \end{cases} \tag{4}
$$

当 $f(x,t)=0$ 时,利用傅里叶变换法,式(4)为

$$
\begin{cases} dU(\omega,t)/dt = a^{v}(i\omega)^{v}U(\omega,t) \\ U(\omega,0)=\Phi(\omega) \end{cases} \tag{5}
$$

解得

$$
U(\omega,t)=\Phi(\omega)K(\omega,t) \tag{6}
$$

其中:$U(\omega,t)=F(u(x,t))$,$\Phi(\omega)=F(\phi(x))$分别为 $u(x,t)$,$\phi(x)$的关于 x 的傅里叶变换。

$K(\omega,t)$为

$$
K(\omega,t)=e^{a^{v}(i\omega)^{v}t} \tag{7}
$$

当 $\phi(x)$表示原始信号时,式(4)的解即为对信号 $\phi(x)$的滤波过程,$K(\omega,t)$即为滤波器频率响应。

因在复数域中,$(i\omega)^{v}$ 可表示为

$$
\begin{cases} (i\omega)^{v} = \hat{a}_{v}(\omega)\exp(i\theta_{v}(\omega)) \\ \hat{a}_{v}(\omega) = |\omega|^{v} \\ \theta_{v}(\omega) = \dfrac{v\pi}{2}\mathrm{sgn}(\omega) \end{cases}
$$

则式(7)可以表示为

$$
K(\omega,t)=\exp(a^{v}|\omega|^{v}e^{i\frac{v\pi}{2}}t)=e^{a^{v}\omega^{v}t\cos\frac{v\pi}{2}}e^{ia^{v}\omega^{v}t\sin\frac{v\pi}{2}} = P(\omega,t)Q(\omega,t) \quad (\omega>0) \tag{8}
$$

其中:$P(\omega,t)=e^{a^{v}\omega^{v}t\cos\frac{v\pi}{2}}$;$Q(\omega,t)=e^{ia^{v}\omega^{v}t\sin\frac{v\pi}{2}}$。

令 $\varphi(\omega,t)=a^{v}\omega^{v}t\sin\dfrac{v\pi}{2}$,则 $P(\omega,t)$,$\varphi(\omega,t)$分别为 $K(\omega,t)$的幅频特性和相频特性。

若偏微分方程的阶次 v 为奇数,幅频特性为

$$
P(\omega,t)=e^{a^{v}\omega^{v}t\cos\frac{v\pi}{2}}=1 \quad (\omega>0)
$$

因此,奇次阶时保持信号幅值不变,只是相位发生改变。又因为当 v 使得 $\cos\dfrac{v\pi}{2}>0$ 时,$P(\omega,t)$单调递增,不适合信号滤波,不失一般性,将式(4)改写成式(9)

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^{v}\dfrac{\partial^{v}u}{\partial x^{v}} = 0 \\ u(x,0)=\phi(x) \end{cases} \tag{9a}
$$

$$
(v=\cdots(-7,-5)\cup(-3,-1)\cup(1,3)\cup(5,7)\cdots)
$$

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a^{v}\dfrac{\partial^{v}u}{\partial x^{v}} = 0 \\ u(x,0)=\phi(x) \end{cases} \tag{9b}
$$

$$
(v=\cdots(-9,-7)\cup(-5,-3)\cup(-1,1)\cup(3,5)\cdots)
$$

进一步可得到任意阶 PDE 降噪模型

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (-1)^{n}a^{v}\dfrac{\partial^{v}u}{\partial x^{v}} = 0 \\ u(x,0)=\phi(x) \end{cases} \tag{10}
$$

$$
(n=\mathrm{round}(\frac{v}{2}), x\in R, t>0)
$$

其中:$n=\mathrm{round}(\dfrac{v}{2})$为求$\dfrac{v}{2}$四舍五入值。

定义信号 $\phi(x)$具有 0 边界条件,即有$u^{(k)}(0,t)=$

$0,(k=0,1,\cdots,n-1)$，且 $a=0$，则式(3)可变为

$${}^{\mathrm{R}}_{z}D_t^r\left(\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right)={}^{\mathrm{R}}_{z}D_t^{n+r}f(t)\quad(n\in Z)$$

式(10)变为

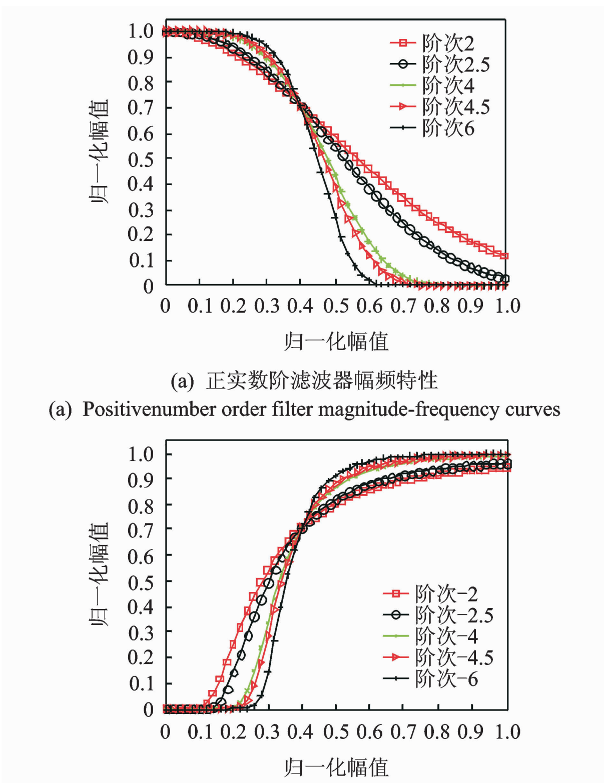
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+(-1)^n a^v\,{}^{\mathrm{R}}_{0}D_t^r\left[\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}\right]=0\\ u(x,0)=\phi(x)\end{cases}\tag{11}$$

其中：$x\in R$；$t>0$；$n\in Z$；$v=r+n$；$0<r<1$。

此时

$$P(\omega,t)=\mathrm{e}^{-a^v\omega^v t\left|\cos\frac{v\pi}{2}\right|}\tag{12}$$

若 $v>0$ 时，$K(\omega,t)$为低通滤波器；若 $v<0$ 时，为高通滤波过程。阶次越高，滤波器衰减的越快。不同阶次对应的滤波器幅频特性如图 1 所示。



(a) 正实数阶滤波器幅频特性

(a) Positivenumber order filter magnitude-frequency curves

(b) 负实数阶滤波器幅频特性

(b) Negative order filter magnitude-frequency curves

图 1　滤波器幅频特性

Fig. 1　Filter magnitude-frequency curves

1.3　PDE 滤波器参数确定

设 Y 为滤波器截止频率对应的衰减，由式(12)得到

$$20\lg\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-a^v(2\pi f_n)^v\left|\cos\frac{v\pi}{2}\right|\tau}}\right)=Y$$

即

$$\tau=\frac{0.115Y}{a^v(2\pi f_n)^v\left|\cos\left(\frac{v\pi}{2}\right)\right|}\tag{13}$$

其中：τ 为演化时间。

由式(13)可知，当阶次 v 及 a 确定后，通过确定滤波范围即可确定演化时间。当 $v>0$ 时，若截止频率无穷大，τ 趋近于 0，此时输入信号相当于通过了一个全通滤波器；而当截止频率趋近于 0，τ 趋近于无穷大，PDE 滤波后输出直流；当 $v<0$ 时，情形与 $v>0$ 相反。

2　任意阶 PDE 降噪的数值化

对于式(7)，任意阶 PDE 滤波器系数 $k(x,t)$ 可以通过经典的滤波器设计方法得到，则滤波后的信号为 $\phi'(x)=\phi(x)*k(x,t)$。然而在滤波器数值化及截断过程中，实际 PDE 滤波器与理想 PDE 滤波器之间存在差异。因此，通过对分数阶 PDE 的数值化求解可更准确地实现 PDE 滤波。

当 $n=1$ 时，阶次 $1\leqslant v<2$，式(11)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^v\,{}^{\mathrm{R}}_{0}D_t^r\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]=0\\ u(x,0)=\phi(x)\end{cases}\quad(x\in R,t>0)\tag{14}$$

将 $u(x,t)$ 变量分别替换成 t 和 τ，将 t 和 τ 离散，并根据中心差分法、向后 Euler 格式和式(1)，式(14)变为

$$\frac{u(t_i,\tau_{k+1})-u(t_i,\tau_k)}{l}=\frac{a^v}{h^{\mathrm{R}}}\sum_{b=0}^{i}g_b\frac{[u(t_{i-b+1},\tau_{k+1})-u(t_{i-b-1},\tau_{k+1})]}{2h}\tag{15}$$

其中：$g_b=\begin{bmatrix}-r\\ b\end{bmatrix}=\dfrac{\Gamma(b-r)}{\Gamma(-r)\Gamma(b+1)}$，$\Gamma(v)$为 Gamma 函数，$\Gamma(v)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^{v-1}\mathrm{d}x=(v-1)!$；$m$ 为信号长度，$0\leqslant i\leqslant m$；h 为空间步长，有 $h=\dfrac{1}{f_s}$(f_s 为采样频率)；l 为时间步长；s 为总的迭代次数并满足 $\tau=sl$，$0\leqslant k\leqslant s-1$。

假设 $u(t_{-1},\tau_{k+1})=0$，并记 u_i^k 为 $u(t,\tau)$在节点(t_i,τ_k)处的值，式(15)为

$$u_i^{k+1}-u_i^k=\frac{a^v l}{2h^v}\sum_{b=0}^{i}g_b(u_{i-b+1}^{k+1}-u_{i-b-1}^{k+1})\tag{16}$$

定义网格比 $q=\dfrac{a^v l}{2h^v}$，根据式(13)，有

$$q=\frac{a^v l}{2h^v}=\frac{a^v\tau}{2h^v s}=\frac{a^v}{2\left(\frac{1}{f_s}\right)^v s}\cdot\frac{0.115Y}{a^v(2\pi f_n)^v\left|\cos\frac{v\pi}{2}\right|}=\frac{0.0575Y}{(2\pi)^v s\left|\cos\frac{v\pi}{2}\right|}\left(\frac{f_s}{f_n}\right)^v\tag{17}$$

式(16)变为

$$u_i^{k+1}-u_i^k=q\sum_{b=0}^{i}g_b(u_{i-b+1}^{k+1}-u_{i-b-1}^{k+1})$$

即

$$qg_{i-1}u_0^{k+1}-q(g_i-g_{i-2})u_1^{k+1}-\cdots-q(g_2-g_0)u_{i-1}^{k+1}-[qg_1-1]u_i^{k+1}-qg_0u_{i+1}^{k+1}=u_i^k \tag{18a}$$

记 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m,c_{m+1},c_{m+2}\}$，其中 $c_1=-qg_0$，$c_2=-qg_1+1$。当 $3\leqslant j\leqslant m+1$，$c_j=-q(g_{j-1}-g_{j-3})$，$c_{m+2}=qg_{m-1}$，则

$$c_{m+2}u_0^{k+1}+c_{m+1}u_1^{k+1}+\cdots+c_3u_{i-1}^{k+1}+c_2u_i^{k+1}+c_1u_{i+1}^{k+1}=u_i^k \tag{18b}$$

若原始信号 $\boldsymbol{u}^0=[u_1^0,u_2^0,\cdots,u_{m-1}^0,u_m^0]$，迭代 k 次后的信号为 $\boldsymbol{u}^k=[u_1^k,u_2^k,\cdots,u_{m-1}^k,u_m^k]$，假设边值 $u_0^k=0$，$u_{m+1}^k=0$，于是滤波过程为

$$\begin{bmatrix}u_1^k\\u_2^k\\\vdots\\\vdots\\u_{m-1}^k\\u_m^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_2&c_1&&&&\\c_3&c_2&c_1&&&\\\vdots&c_3&\ddots&\ddots&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&c_1&\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&c_2&c_1\\c_{m+1}&c_m&c_{m-1}&\cdots&c_3&c_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^{k+1}\\u_2^{k+1}\\\vdots\\\vdots\\u_{m-1}^{k+1}\\u_m^{k+1}\end{bmatrix} \tag{19a}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}c_2&c_1&&&&\\c_3&c_2&c_1&&&\\\vdots&c_3&\ddots&\ddots&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&c_1&\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&c_2&c_1\\c_{m+1}&c_m&c_{m-1}&\cdots&c_3&c_2\end{bmatrix} \tag{19b}$$

式(18)可以记为

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{k+1}=\boldsymbol{u}^k\\\boldsymbol{u}^{k+1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}^k\end{cases} \tag{20}$$

式(15)中，分数阶微分方程向后 Euler 格式迭代过程对网格比 q 没有限制[17]。对于式(19)，当演化步长 $l=\tau$，总的迭代次数 $s=\tau/l=1$，即形成了 PDE 降噪的快速算法。

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}^0 \tag{21}$$

用同样的方法，可以得到任意整数 n 时的降噪过程。其结果只是当阶次不同时，因 $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}$ 的中心差分形式不同，使得滤波矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 中系数发生变化。

输入噪声信号 $\boldsymbol{u}^0$，截止频率为 f_n，采样频率为 f_s，PDE 阶次为 v。输出降噪后信号 $\boldsymbol{u}$。任意分数阶 PDE 降噪算法如下：

1) 根据 PDE 的阶次 v、向后 Euler 公式和中心差分 $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}$ 得到如式(11)的离散方程；

2) 根据 PDE 的阶次 v、采样频率 f_s 和截止频率 f_n 计算网格比 q；

3) 根据 g_b 和网格比 q 计算集合 C；

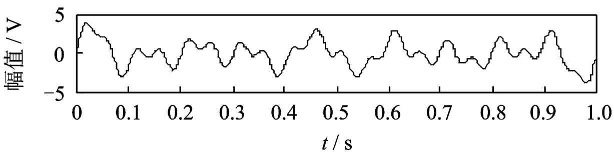
4) 计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 并得到滤波矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$；

5) 得到降噪后信号 u。

3 实验分析与应用

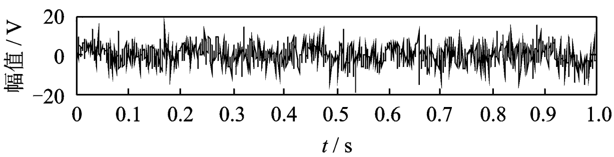
3.1 不同阶次降噪性能比较

图 2(a)为频率分别为 5，7，9，10 和 20 Hz 的正弦信号叠加而成的仿真信号，各信号分量的幅值为 1 V。对该信号分别叠加不同信噪比的高斯白噪声(信噪比分别为－10，－5，0，5 和 10 dB)，采样频率为 1 kHz，取 1 000 个采样点进行降噪对比实验。其中，图 2(b)为信噪比为－10 dB 的高斯白噪声。



(a) 原始信号

(a) The superposed sinusoidal signal



(b) 含高斯白噪声的混合信号

(b) The interfered-signal

图 2 仿真信号

Fig. 2 The simulation signal

图 3 为降噪效果随阶次变化曲线。从图 3 中可以看出，随着阶次的增大，信噪比并未呈单调增加，在 4 阶附近获得较好的降噪效果。这是因为在滤波器设计过程中，应根据噪声信号的类型不同，合理设置滤波器通带截止频率和阻带截止频率。对于本研究的仿真信号，由于噪声为宽带噪声，当阶次较高时，虽 PDE 滤波器符合优良滤波特性要求，但低频噪声将会更多地保留，从而降低了滤波效果。所以信噪比并未呈单调增加，而是在 4 阶附近获得较好的降噪效果。当为奇次阶时，PDE 滤波器幅频特性为 1，滤波前后信号幅频特性不变，因此信噪比不变，且奇次阶附近阶次降噪效果较差。

为了对比实际滤波器跟理想滤波器之间的差异，定义相对误差百分比 A 为

$$A=\frac{B-C}{C}\times 100\% \tag{22}$$

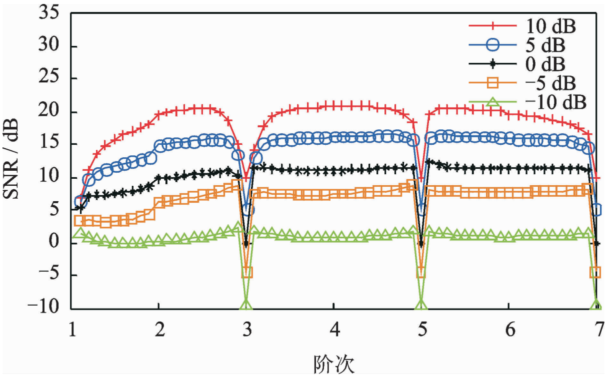


图 3　降噪效果(SNR)随阶次变化图

Fig. 3　Noise reductions (SNR) with different order

其中：B 为实际值；C 为理论值。

图 4 为 IIR 数字滤波器和 PDE 滤波器的相对误差百分比对比图。其中，IIR 数字滤波器和 PDE 滤波器的参数相同，通带截止频率为 35Hz，阻带截止频率为 67Hz，PDE 滤波器的阶次为 4。从图 4 可以看出，IIR 数字滤波器的误差比 PDE 滤波器要高且波动大，PDE 实际滤波器与理论滤波器之间的差异很小。

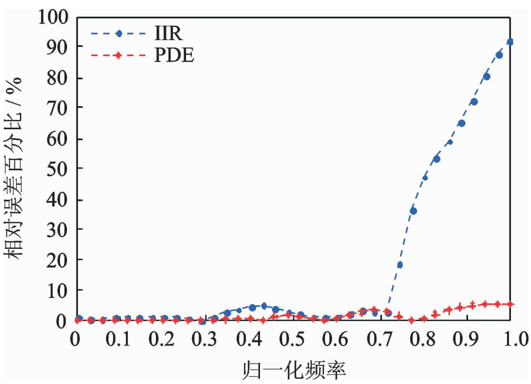


图 4　IIR 数字滤波器与 PDE 滤波器的相对误差对比图

Fig. 4　The percentage absolute relative error of IIR filter and the proposed PDE filter

3.2　与其他降噪方法的比较

采用小波去噪、IIR 数字滤波以及 4 阶 PDE 差分求解去噪等方法分别对不同信噪比的仿真信号进行去噪分析。表 1 为不同滤波方法下降噪效果的对比。

表 1　不同滤波方法下降噪效果

Tab. 1　Performance comparison with different methods

方法	SNR/dB				
	−10	−5	0	5	10
小波去噪(db8)	2.63	5.53	11.59	16.22	20.14
IIR 滤波	1.26	7.55	11.50	15.67	19.47
PDE 数值法	3.45	8.49	12.25	16.35	20.83

表 1 中，小波去噪的小波基为 db8，分解层数为 5，阈值函数为软阈值，表中 IIR 滤波采用的是 3 阶巴特沃斯数字滤波器。根据图 3，选择 4 阶 PDE 进行比较。其中，IIR 数字滤波器法、PDE 差分求法的截止频率为 35 Hz。从表 1 看出，在信噪比较大时，小波方法和 PDE 差分方法具有相近的降噪效果(>5 dB)；而信噪比较低时，PDE 差分方法有较明显的降噪效果(−5 dB)。在实际应用中，小波去噪过程复杂，需要根据信号的特点选择不同的小波基、阈值函数等。图 5 为对信号比 SNR＝5 dB 的信号降噪比较。另外，从图 5(c)中可以看出，IIR 数字滤波会产生时移(红色标记)。

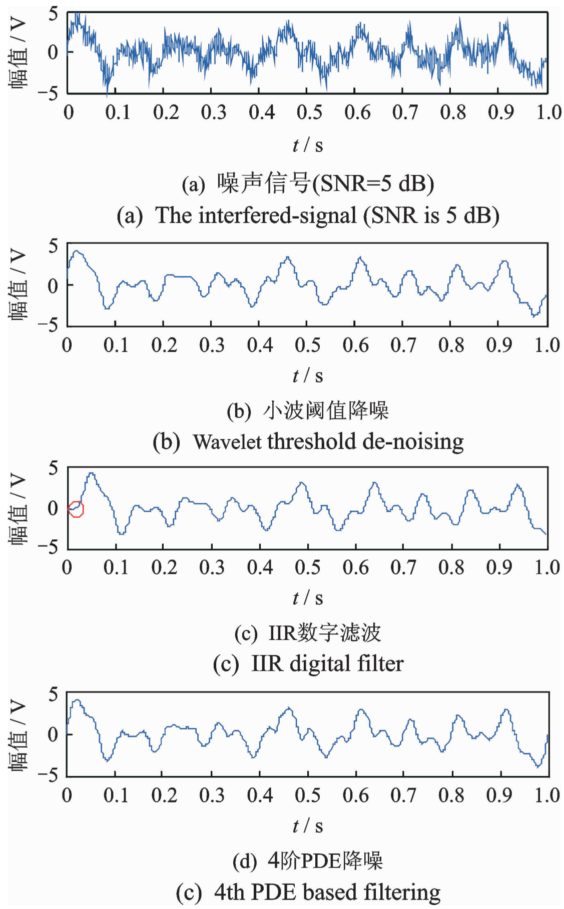


图 5　不同方法的降噪效果图

Fig. 5　Noise reduction of different filtering methods

表 2 为几种去噪方法的时间性能比较。CPU 为 Intel(R) Core(TM) i3，主频为 2.27GHz，内存为 4GB，每个方法运行 8 次，剔除最高和最低值，求剩余 6 次平均运行时间。

表 2　时间性能比较

Tab. 2　Time performance comparison　　s

小波降噪	IIR 滤波	PDE 数值法
0.072	0.003	0.003

从表 2 可以看出，几种去噪方法中 IIR 滤波、PDE 数值求解耗时相当，小波降噪方法耗时最长。

3.3 现场应用

轴心轨迹作为转子振动信号的一类重要图形征兆，其形状和动态特性包含了丰富的故障征兆信息。然而在现场实际测量的振动信号中往往都会受到噪声污染，轴心轨迹非常复杂，不易获得清晰的特征。因此，对轴心轨迹降噪成为转子特征提取的关键之一。图 6 是在重庆大学测试中心的转子实验台现场实验图。

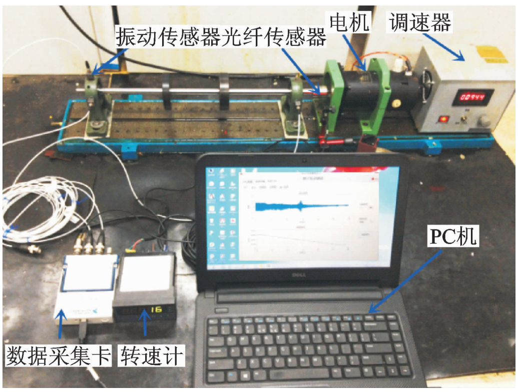
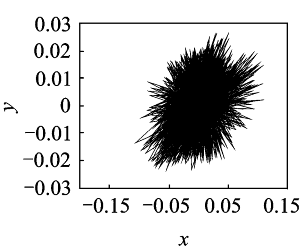


图 6 现场实验图

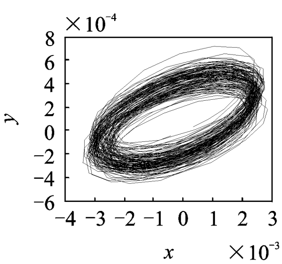
Fig. 6 Field experiment

图 7(a)和 7(b)分别为转轴原始轴心轨迹图和使用 PDE 降噪之后的轴心轨迹图。其转子转速为 6 970 r/min，采样频率为 1 652 Hz。从图 7(a)中可以看出，原始轴心轨迹较混乱。如图 3 所示，PDE 滤波器在阶次 4 附近区域的降噪效果相近，为了方便 PDE 滤波的数值计算，图 7(b)PDE 降噪阶次选取整数阶次 4，PDE 降噪的截止频率为 85 Hz。由图 7 可以看出，该轴的轴心轨迹为椭圆形，表明该轴存在严重的不平衡，而其他故障很小。



(a) 原始轴心轨迹

(a) Original shaft centerline orbits



(b) 降噪后轴心轨迹

(b) PDE filtered shaft centerline orbits

图 7 滤波前后的轴心轨迹图

Fig. 7 Original and PDE filtered shaft centerline orbits

4 结束语

PDE 在图像滤波、修补和增强等方面都取得了很好的效果。将 PDE 用于一维信号的降噪处理的研究才刚刚起步，主要集中在整数阶的降噪方法。笔者从滤波器设计的角度，提出了任意阶 PDE 滤波器统一模型，研究了 PDE 滤波的两种数值化过程，建立了基于数字差分求解的降噪一般过程，分析了阶次对降噪性能和时间性能的影响。通过仿真信号对小波阈值去噪，IIR 数字滤波降噪及 PDE 数值求解降噪等多种去噪方法进行了对比分析。实验表明，分数阶 PDE 数值求解去噪方法算法简单，效果良好，是一种有效的信号去噪方法。

参 考 文 献

[1] 钱征文，程礼，李应红. 利用奇异值分解的信号降噪方法[J]. 振动、测试与诊断，2011(4)：459-463.
Qian Zhengwen, Cheng Li, Li Yinghong. Noise reduction method based on singular value decomposition [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2011(4)：459-463. (in Chinese)

[2] Donoho D L. De-noising by soft-thresholding information theory[J]. IEEE Transactions on ，1995，41(3)：613-627.

[3] 秦毅，王家序，毛永芳. 基于软阈值和小波模极大值重构的信号降噪[J]. 振动、测试与诊断，2011(5)：543-547.
Qin Yi, Wang Jiaxu, Mao Yongfang. Signal denoising based on soft thresholding and reconstruction from dyadic wavelet transform modulus maxima[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2011(5)：543-547. (in Chinese)

[4] Dragomiretskiy K, Zosso D. Variational mode decomposition signal processing[J]. IEEE Transactions on, 2014，62(3)：531-544.

[5] 徐仁林，安伟. 小波降噪在信号基于 EMD 的 Hilbert 变换中的应用[J]. 噪声与振动控制，2008(3)：74-77.
Xu Renlin, An Wei. Wavelet denoise application in the signal hilbert transform based on EMD[J]. Noise and Vibration Control, 2008(3)：74-77. (in Chinese)

[6] 张磊，彭伟才，原春晖，等. 奇异值分解降噪的改进方法[J]. 中国舰船研究，2012(5)：83-88.
Zhang Lei, Peng Weicai, Yuan Chunhui, et al. An improved method for noise reduction based on singular

value decomposition[J]. Chinese Journal of Ship Research, 2012(5):83-88. (in Chinese)

[7] 刘艺柱,杨瑞兰.采用滑动平均滤波法提高硬币识别准确率的研究[J].制造业自动化,2010(1):42-44.
Liu Yizhu, Yang Ruilan. Moving average filtering method used to improve the accuracy of coins to identify research[J]. Manufacturing Automation, 2010(1): 42-44. (in Chinese)

[8] 杨柱中,周激流,晏祥玉,等. 基于分数阶微分的图像增强[J]. 计算机辅助设计与图形学学报,2008(3): 343-348.
Yang Zhuzhong, Zhou Jiliu, Yan Xiangyu, et al. Image enhancement based on fractional differentials[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2008(3):343-348. (in Chinese)

[9] Machado B B, Goncalves W N, Bruno O M. Enhancing the texture attribute with partial differential equations: a case of study with Gabor filters[J]. Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems, 2011,6915: 337-348.

[10] Baravdish G, Evangelista G, Svensson O, et al. PDE-SVD based audio denoising[C]// Communications Control and Signal Processing (ISCCSP). Washington DC, USA: IEEE, 2012:1-6.

[11] Yin Aijun, Zhao Lei, Yang Zhengyi, et al. Noise reduction method for vibration signals 2D time - frequency distribution using anisotropic diffusion equation [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2015,38(4):609-616.

[12] 尹爱军,王璇. PDE 信号修补方法及在 EMD 端点效应处理中的应用[J]. 振动与冲击,2012(2):6-9,61.
Yin Aijun, Wang Xuan. Signal restoring based on PDE and its application in end effect processing of EMD[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012(2):6-9,61. (in Chinese)

[13] Pu Yifei, Siarry P, Zhou Jiliu, et al. Fractional partial differential equation denoising models for texture image[J]. Science China-Information Sciences, 2014,57(7):1-19.

[14] Bai J, Feng X C. Fractional-order anisotropic diffusion for image denoising[J]. Ieee Transactions on Image Processing, 2007,16(10):2492-2502.

[15] 蒲亦非. 分数阶微积分在现代信号分析与处理中应用的研究[D].成都:四川大学,2006.

[16] Chen Changming, Liu F, Turner I, et al. A Fourier method for the fractional diffusion equation describing sub-diffusio[J]. Journal of Computational Physics, 2007,227(2):886-897.

[17] El-Mikkawy M E A. On the inverse of a gene tridiagonal matrix[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004,150(3):669-679.

第一作者简介:尹爱军,男,1978 年 5 月出生。教授、博士生导师。主要研究方向为智能测试与虚拟仪器、现代信号分析处理及故障检测与诊断等。曾发表《Thermography spatial-transient-stage mathematical tensor construction and material property variation track》(《International Journal of Thermal Science》2014,Vol. 85)等论文。
E-mail:aijun.yin@cqu.edu.cn