

基于 IHB 法分裂导线次档距振荡的极限环特性*

于洋洋^{1,2,3}, 郭虎伦^{1,3}, 曹树谦^{1,3}, 刘彬⁴, 陈予恕^{1,3,5}

(1. 天津大学力学系 天津, 300072) (2. 天津大学仁爱学院 天津, 301636)

(3. 天津市非线性动力学与混沌控制重点实验室 天津, 300072)

(4. 中国电力科学研究院 北京, 100192) (5. 哈尔滨工业大学航天学院 哈尔滨, 150001)

摘要 分裂导线中的背风子导线在尾流激振作用下会出现大幅的次档距振荡, 是威胁高压输电线路安全运行的重要故障之一。针对此问题, 首先, 给出了背风子导线在尾流激振下, 含气动非线性的两自由度次档距振荡动力学模型方程; 其次, 采用增量谐波平衡法推导了求解次档距振荡高阶极限环响应的方程, 得到了次档距振荡极限环响应的前三次谐波响应, 结果表明, 导线次档距振荡只存在于一个风速区间范围内, 随谐波次数的增加, 高次谐波的影响明显减弱, 其中一次谐波能够较好地吻合 Runge-Kutta 数值计算结果; 最后, 分析了档距和背风子导线的初始位置对次档距振荡的影响, 为避免或抑制次档距振荡的发生提供技术支持。

关键词 分裂导线; 次档距振荡; 极限环; 增量谐波平衡法

中图分类号 TH133.3

引言

微风振动、覆冰舞动和次档距振荡是危害输电导线安全运行的 3 种重要故障。次档距振荡只存在于分裂导线中, 是一种由迎风侧子导线的尾流诱发背风侧子导线振动的现象。次档距振荡的振动频率约为 1~3 Hz, 振幅为导线直径的 3~20 倍, 会造成子导线间的相互碰撞和鞭击、磨损导线, 严重的将导致导线疲劳断股^[1]。当前, 随着长距离、大跨度、多分裂高压输电技术的广泛应用, 分裂导线中存在的次档距振荡的危害性也愈发凸显。因此对分裂导线次档距振荡动力学特性的深入研究有助于次档距振荡抑制技术的开发, 避免次档距振荡的发生。

当前针对次档距振荡动力学特性的研究最直接的方法是实验研究, 此外还有数值方法、解析方法和半数值半解析的方法。背风子导线受尾流激振时的气动升力和气动阻力的模拟是研究次档距振荡的基础, 实验研究必不可少。Bokaian^[2]通过实验测得背风子导线在尾流激振作用下的气动升力和气动阻力, 并用幂级数的形式拟合出气动升力和气动阻力的表达式, 其拟合结果与实验非常相近。Wardlaw^[3]用风洞实验以分裂导线的节段弹性支撑模型

研究其次档距振荡的稳定性条件, 并得到较好的平均气动力结果。但实验研究的缺点是需要大量的物力, 尤其风洞实验耗费巨大。随着计算技术的发展, 尤其是商用软件的成熟, 数值方法在次档距振荡中得到越来越多的应用。Lilien 等^[4]用有限元方法研究了两分裂三档距系统的次档距振荡, 采用模态分析的方法分析了子导线的间距、质量、频率比等参数对分裂导线次档距振荡的影响。陈元坤^[1]利用计算流体动力学 (computational fluid dynamics, 简称 CFD) 计算仿真分裂导线的气动特性, 得到分裂导线的平均气动力系数曲线。解析方法计算简便, 一度成为学者们关注的焦点。文献[5-7]采用准定常线性颤振理论研究了次档距振荡系统的振动失稳边界。Rawlins^[8]采用传递矩阵法研究导线的振动特性, 并结合波传递理论预测了分裂导线发生次档距振荡时的振动响应。准定常线性颤振理论、稳定性理论和传递矩阵法都是研究的次档距振荡线性模型。文献[9-10]在准定常理论研究的基础上, 采用中心流行定理和正规形理论降维, 研究了背风子导线非线性系统的次档距振荡。文献[11-12]采用平均法研究了背风子导线两自由度非线性系统的解析解, 并分别与数值积分结果和其他文献的实验结果进行了对比, 结果吻合良好。但是解析方法在求解

* 国家自然科学基金资助项目(11302145); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20130032120035)
收稿日期: 2016-02-01; 修回日期: 2016-04-18

高维非线性系统或者非线性项较多的多维系统时存在很大的求解困难,甚至无法求解。半数值半解析的方法结合了数值法和解析法的优点,能够较好地解决这一问题。增量谐波平衡法(incremental harmonic balance method,简称 IHB)是一种发展较为成熟、应用较为广泛的半数值半解析的方法。唐南^[13]将 IHB 应用于求解多自由度 Van der pol 自治系统,为解决多自由度系统的自激振动提供了很好的范例。晏致涛等^[14]将 IHB 应用于覆冰输电线舞动——非线性自激振动系统的极限环求解,其结果与数值积分结果吻合良好。次档距振荡系统中存在复杂的非线性因素,采用 IHB 法能够很好地分析分裂导线的次档距振荡特性,既拓宽了 IHB 法的应用范围,又为强非线性的次档距振荡分析提供了一条新的途径。IHB 法在研究强非线性的振动分析中合理可靠,且有足够的精度。

笔者考虑背风子导线气动载荷中的非线性因素,建立背风子导线尾流激振下的两自由度动力学方程,利用增量谐波平衡法研究了两分裂导线次档距振荡系统,得到次档距振荡系统随风速变化的曲线及两个失稳风速之间的极限环响应,并用 Runge-Kutta 数值结果验证了 IHB 的结果,最后分析了结构参数对次档距振荡极限环响应的影响。

1 分裂导线次档距振荡建模

如图 1 所示,背风子导线假定为一长度为 l 、直径为 d 、质量为 m 的刚性圆柱体,圆柱体被认为在迎风子导线的尾流中,圆柱体被弹簧和阻尼器支撑,数学模型考虑为背风子导线的平面运动。设背风子导线没有振动时的位置为 (x_0, y_0) ,振动后为 $(x_0 + x, y_0 + y)$ 。

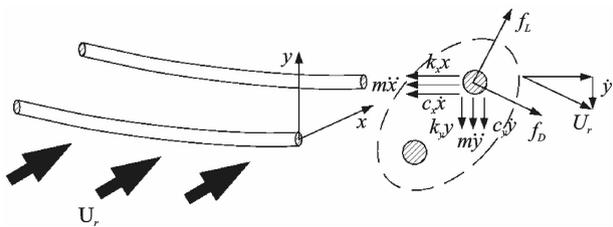


图 1 两分裂导线次档距振荡

Fig. 1 Subspan oscillation of two bundled conductors

根据图 1 背风子导线受力建立动力学方程

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x = f_L \sin\theta + f_D \cos\theta \\ m\ddot{y} + c_y\dot{y} + k_y y = f_L \cos\theta - f_D \sin\theta \end{cases} \quad (1)$$

其中: $U_r = \sqrt{(U_0 - \dot{x})^2 + \dot{y}^2} \approx U_0$; $\cos\theta \approx 1$;

$$\sin\theta \approx \dot{y}/U_r.$$

笔者采用 Oliveira 等^[11]给出的升力和阻力的表达式

$$\begin{cases} f_L = \frac{1}{2} \rho U_r^2 \bar{C}_L \\ f_D = \frac{1}{2} \rho U_r^2 \bar{C}_D \end{cases} \quad (2)$$

其中: \bar{C}_L 和 \bar{C}_D 为背风侧导线位置坐标的函数。

用背风侧导线位置坐标的幂级数拟合实测气动力曲线,可得 C_L 和 C_D 的表达式

$$\begin{cases} C_L = \sum_{i=0}^2 A_{i1} (X + X_0)^i \sum_{j=0}^5 B_{j1} (Y + Y_0)^j \\ C_D = c_0 - \sum_{i=0}^2 A_{i2} (X + X_0)^i \sum_{j=0}^5 B_{j2} (Y + Y_0)^j \end{cases} \quad (3)$$

其中: $X_0 = x_0/d$; $Y_0 = y_0/d$; $X = x/d$; $Y = y/d$ 。

其他系数分别为: $c_0 = 1.2$, $A_{01} = -1.78$, $A_{11} = 0.127$, $A_{21} = -0.00238$, $A_{02} = 1.944$, $A_{12} = -0.1152$, $A_{22} = 0.002304$, $B_{01} = B_{11} = B_{12} = B_{52} = 0.0$, $B_{21} = 0.928$, $B_{31} = -0.827$, $B_{41} = 0.233$, $B_{51} = -0.0239$, $B_{02} = 0.740$, $B_{22} = -0.00712$, $B_{32} = -0.105$, $B_{42} = 0.0266$ 。

按 X 和 Y 的幂级数展开,气动力可写为

$$\begin{cases} C_L = \sum_{i=0}^2 m_{i1} X^i \sum_{j=0}^5 n_{j1} Y^j \\ C_D = c_0 - \sum_{i=0}^2 m_{i2} X^i \sum_{j=0}^5 n_{j2} Y^j \end{cases} \quad (4)$$

其中: $m_{0k} = A_{0k} + A_{1k} X_0 + A_{2k} X_0^2$;

$$m_{1k} = A_{1k} + 2A_{2k} X_0; m_{2k} = A_{2k};$$

$$n_{0k} = B_{0k} + B_{1k} Y_0 + B_{2k} Y_0^2 + B_{3k} Y_0^3 + B_{4k} Y_0^4 + B_{5k} Y_0^5;$$

$$n_{1k} = B_{1k} + 2B_{2k} Y_0 + 3B_{3k} Y_0^2 + 4B_{4k} Y_0^3 + 5B_{5k} Y_0^4;$$

$$n_{2k} = B_{2k} + 3B_{3k} Y_0 + 6B_{4k} Y_0^2 + 10B_{5k} Y_0^3;$$

$$n_{3k} = B_{3k} + 4B_{4k} Y_0 + 10B_{5k} Y_0^2;$$

$$n_{4k} = B_{4k} + 5B_{5k} Y_0; n_{5k} = B_{5k}; k = 1, 2.$$

忽略 C_L 和 C_D 3 次以上的非线性,可得

$$C_L = m_{01} n_{01} + m_{11} n_{01} X + m_{01} n_{11} Y + m_{21} n_{01} X^2 + m_{11} n_{11} XY + m_{01} n_{21} Y^2 + m_{21} n_{11} X^2 Y + m_{11} n_{21} XY^2 + m_{01} n_{31} Y^3 \quad (5a)$$

$$C_D = c_0 - m_{02} n_{02} - m_{12} n_{02} X - m_{02} n_{12} Y - m_{22} n_{02} X^2 - m_{12} n_{12} XY - m_{02} n_{22} Y^2 - m_{22} n_{12} X^2 Y - m_{12} n_{22} XY^2 - m_{02} n_{32} Y^3 \quad (5b)$$

升力和阻力为 X 和 Y 的函数,没有常数项,即

由式(5)可得

$$\begin{cases} \bar{C}_L = C_L - m_{01} n_{01} \\ \bar{C}_D = C_D - c_0 + m_{02} n_{02} \end{cases} \quad (6)$$

因此背风子导线次档距振动方程为

$$\begin{cases} \dot{X} + \bar{c}_x X + \omega_x^2 X = \frac{\rho l U_0}{2m} (d\bar{C}_L \dot{Y} + U_0 \bar{C}_D) \\ \dot{Y} + \bar{c}_y \dot{Y} + \omega_y^2 Y = \frac{\rho l U_0}{2m} (U_0 \bar{C}_L - d\bar{C}_D \dot{Y}) \end{cases} \quad (7)$$

式(7)可写成矩阵形式,令 $\mu = \rho l U_0 / 2m$, $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}^T = \{X, Y\}^T$, 式(7)可得

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{Nf}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \quad (8)$$

其中:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \bar{c}_x & 0 \\ 0 & \bar{c}_y \end{bmatrix}; \mathbf{Nf} = \begin{bmatrix} \text{Nf}_1 \\ \text{Nf}_2 \end{bmatrix}; \mathbf{K} =$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x^2 + \mu U_0 m_{12} n_{02} & \mu U_0 m_{02} n_{12} \\ -\mu U_0 m_{11} n_{01} & \omega_y^2 - \mu U_0 m_{01} n_{11} \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \text{Nf}_1 = & \mu U_0 (m_{22} n_{02} q_1^2 + m_{12} n_{12} q_1 q_2 + m_{02} n_{22} q_2^2 + \\ & m_{22} n_{12} q_1^2 q_2 + m_{12} n_{22} q_1 q_2^2 + m_{02} n_{32} q_2^3) - \\ & \mu d (m_{11} n_{01} q_1 + m_{01} n_{11} q_2 + m_{21} n_{01} q_1^2 + \\ & m_{11} n_{11} q_1 q_2 + m_{01} n_{21} q_2^2 + m_{21} n_{11} q_1^2 q_2 + \\ & m_{11} n_{21} q_1 q_2^2 + m_{01} n_{31} q_2^3) \dot{q}_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nf}_2 = & -\mu U_0 (m_{21} n_{01} q_1^2 + m_{11} n_{11} q_1 q_2 + m_{01} n_{21} q_2^2 + \\ & m_{21} n_{11} q_1^2 q_2 + m_{11} n_{21} q_1 q_2^2 + m_{01} n_{31} q_2^3) - \\ & \mu d (m_{12} n_{02} q_1 + m_{02} n_{12} q_2 + m_{22} n_{02} q_1^2 + \\ & m_{12} n_{12} q_1 q_2 + m_{02} n_{22} q_2^2 + m_{22} n_{12} q_1^2 q_2 + \\ & m_{12} n_{22} q_1 q_2^2 + m_{02} n_{32} q_2^3) \dot{q}_2. \end{aligned}$$

2 IHB 分析

次档距振荡为自激振动, 设自激振动频率为 ω 。

令 $\tau = \omega t$, 则方程可无量纲化为

$$\omega^2 \mathbf{M}\mathbf{q}'' + \omega \mathbf{C}\mathbf{q}' + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{Nf}(\mathbf{q}, \omega \mathbf{q}') = \mathbf{0} \quad (9)$$

其中: $(\cdot)'$ 和 $(\cdot)''$ 分别为对无量纲时间 τ 的一阶导数和二阶导数。

设 \mathbf{q}_0 和 ω_0 为式(9)的解, 其邻近状态以增量形式表示为

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \Delta \mathbf{q} \quad (10)$$

$$\omega = \omega_0 + \Delta \omega \quad (11)$$

将式(10)、式(11)代入式(9), 其非线性部分 \mathbf{Nf} 在 $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}'_0$ 和 ω_0 处泰勒展开为

$$\begin{aligned} & \mathbf{Nf}(\mathbf{q}_0 + \Delta \mathbf{q}, (\omega_0 + \Delta \omega) (\mathbf{q}'_0 + \Delta \mathbf{q}')) = \\ & \mathbf{Nf}(\mathbf{q}_0, \omega_0 \mathbf{q}'_0) + \frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{q}_0, \omega_0 \mathbf{q}'_0)}{\partial \mathbf{q}} \Delta \mathbf{q} + \\ & \frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{q}_0, \omega_0 \mathbf{q}'_0)}{\partial \mathbf{q}'} \Delta \mathbf{q}' + \frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{q}_0, \omega_0 \mathbf{q}'_0)}{\partial \omega} \Delta \omega + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{q}_0, \omega_0 \mathbf{q}'_0)}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \text{Nf}_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \text{Nf}_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \text{Nf}_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \text{Nf}_2}{\partial q_2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{q}_0, \omega_0 \mathbf{q}'_0)}{\partial \mathbf{q}'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \text{Nf}_1}{\partial q'_1} & \frac{\partial \text{Nf}_1}{\partial q'_2} \\ \frac{\partial \text{Nf}_2}{\partial q'_1} & \frac{\partial \text{Nf}_2}{\partial q'_2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{q}_0, \omega_0 \mathbf{q}'_0)}{\partial \omega} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \text{Nf}_1}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \text{Nf}_2}{\partial \omega} \end{bmatrix} \quad (15)$$

式(13)、式(14)和式(15)中各元素的表达式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Nf}_1}{\partial q_1} = & \mu U_0 (2m_{22} n_{02} q_{10} + m_{12} n_{12} q_{20} + m_{12} n_{22} q_{20}^2 + \\ & 2m_{22} n_{12} q_{10} q_{20}) - \mu \omega_0 (m_{11} n_{01} + 2m_{21} n_{01} q_{10} + \\ & m_{11} n_{11} q_{20} + 2m_{21} n_{11} q_{10} q_{20} + m_{11} n_{21} q_{20}^2) \text{d}q'_{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Nf}_2}{\partial q_1} = & -\mu U_0 (2m_{21} n_{01} q_{10} + m_{11} n_{11} q_{20} + m_{11} n_{21} q_{20}^2 + \\ & 2m_{21} n_{11} q_{10} q_{20}) - \mu \omega_0 (m_{12} n_{02} + 2m_{22} n_{02} q_{10} + \\ & m_{12} n_{12} q_{20} + 2m_{22} n_{12} q_{10} q_{20} + m_{12} n_{22} q_{20}^2) \text{d}q'_{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Nf}_1}{\partial q_2} = & \mu U_0 (m_{12} n_{12} q_{10} + 2m_{02} n_{22} q_{20} + m_{22} n_{12} q_{10}^2 + \\ & 2m_{12} n_{22} q_{10} q_{20} + 3m_{02} n_{32} q_{20}^2) - \mu \omega_0 (m_{01} n_{11} + \\ & m_{11} n_{11} q_{10} + 2m_{01} n_{21} q_{20} + m_{21} n_{11} q_{10}^2 + \\ & 2m_{11} n_{21} q_{10} q_{20} + 3m_{01} n_{31} q_{20}^2) \text{d}q'_{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Nf}_2}{\partial q_2} = & -\mu U_0 (m_{11} n_{11} q_{10} + 2m_{01} n_{21} q_{20} + m_{21} n_{11} q_{10}^2 + \\ & 2m_{11} n_{21} q_{10} q_{20} + 3m_{01} n_{31} q_{20}^2) - \mu \omega_0 (m_{02} n_{12} + \\ & m_{12} n_{12} q_{10} + 2m_{02} n_{22} q_{20} + m_{22} n_{12} q_{10}^2 + \\ & 2m_{12} n_{22} q_{10} q_{20} + 3m_{02} n_{32} q_{20}^2) \text{d}q'_{20} \end{aligned}$$

$$\partial \text{Nf}_1 / \partial q'_1 = 0$$

$$\partial \text{Nf}_2 / \partial q'_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Nf}_1}{\partial q'_2} = & -\mu d \omega_0 (m_{11} n_{01} q_{10} + m_{01} n_{11} q_{20} + m_{21} n_{01} q_{10}^2 + \\ & m_{11} n_{11} q_{10} q_{20} + m_{01} n_{21} q_{20}^2 + m_{21} n_{11} q_{10}^2 q_{20} + \\ & m_{11} n_{21} q_{10} q_{20}^2 + m_{01} n_{31} q_{20}^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Nf}_2}{\partial q'_2} = & -\mu d \omega_0 (m_{12} n_{02} q_{10} + m_{02} n_{12} q_{20} + m_{22} n_{02} q_{10}^2 + \\ & m_{12} n_{12} q_{10} q_{20} + m_{02} n_{22} q_{20}^2 + m_{22} n_{12} q_{10}^2 q_{20} + \\ & m_{12} n_{22} q_{10} q_{20}^2 + m_{02} n_{32} q_{20}^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Nf}_1}{\partial \omega} = & -\mu d q'_{20} (m_{11} n_{01} q_{10} + m_{01} n_{11} q_{20} + m_{21} n_{01} q_{10}^2 + \\ & m_{11} n_{11} q_{10} q_{20} + m_{01} n_{21} q_{20}^2 + m_{21} n_{11} q_{10}^2 q_{20} + \\ & m_{11} n_{21} q_{10} q_{20}^2 + m_{01} n_{31} q_{20}^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Nf}_2}{\partial \omega} = & -\mu d q'_{20} (m_{12} n_{02} q_{10} + m_{02} n_{12} q_{20} + m_{22} n_{02} q_{10}^2 + \\ & m_{12} n_{12} q_{10} q_{20} + m_{02} n_{22} q_{20}^2 + m_{22} n_{12} q_{10}^2 q_{20} + \end{aligned}$$

$$m_{12} n_{22} q_{10} q_{20}^2 + m_{02} n_{32} q_{20}^3)$$

将式(10), (11), (12)代入式(9), 并略去高阶小量, 可得

$$\begin{aligned} & \omega_0^2 \mathbf{M} \Delta \mathbf{q}'' + \omega_0 \mathbf{C} \Delta \mathbf{q}' + \mathbf{K} \Delta \mathbf{q} + \mathbf{R} + \\ & \frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{q}_0, \omega_0 \mathbf{q}'_0)}{\partial \mathbf{q}} \Delta \mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{q}_0, \omega_0 \mathbf{q}'_0)}{\partial \mathbf{q}'} \Delta \mathbf{q}' + \\ & \left(2\omega_0 \mathbf{M} \mathbf{q}''_0 + \mathbf{C} \mathbf{q}'_0 + \frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{q}_0, \omega_0 \mathbf{q}'_0)}{\partial \omega} \right) \Delta \omega = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{R} = \omega_0^2 \mathbf{M} \mathbf{q}''_0 + \omega_0 \mathbf{C} \mathbf{q}'_0 + \mathbf{K} \mathbf{q}_0 + \mathbf{Nf}(\mathbf{q}_0, \omega_0 \mathbf{q}'_0) \quad (17)$$

为误差向量。

下面进行谐波平衡, 首先设式(9)的稳态周期解为

$$q_{j0} = \sum_{k=1}^N a_{j,k} \cos k\tau + b_{j,k} \sin k\tau = s \mathbf{A}_j \quad (18)$$

其对应的增量可表示为

$$\Delta q_j = \sum_{k=1}^N \Delta a_{j,k} \cos k\tau + \Delta b_{j,k} \sin k\tau = s \Delta \mathbf{A}_j \quad (19)$$

其中: $\mathbf{s} = \{\cos\tau, \dots, \cos N\tau, \sin\tau, \dots, \sin N\tau\}$;

$$\mathbf{A}_j = \{a_{j,1}, \dots, a_{j,N}, b_{j,1}, \dots, b_{j,N}\}^T;$$

$$\Delta \mathbf{A}_j = \{\Delta a_{j,1}, \dots, \Delta a_{j,N}, \Delta b_{j,1}, \dots, \Delta b_{j,N}\}^T.$$

记 $\mathbf{A} = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n\}^T$, $\Delta \mathbf{A} = \{\Delta \mathbf{A}_1, \Delta \mathbf{A}_2, \dots, \Delta \mathbf{A}_n\}^T$, $\mathbf{S} = \text{dia} [s, \dots, s]$, dia 表示取对角线元素, 则有

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (20)$$

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{S} \Delta \mathbf{A} \quad (21)$$

将增量方程(16)左乘 $\delta(\Delta \mathbf{q})^T$, 并对 τ 在 $[0, 2\pi]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \delta(\Delta \mathbf{q})^T (\omega_0^2 \mathbf{M} \Delta \mathbf{q}'' + \omega_0 \mathbf{C} \Delta \mathbf{q}' + \mathbf{K} \Delta \mathbf{q} + \\ & \mathbf{R} + \frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{q}_0, \omega_0 \mathbf{q}'_0)}{\partial \mathbf{q}} \Delta \mathbf{q} + \\ & \frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{q}_0, \omega_0 \mathbf{q}'_0)}{\partial \mathbf{q}'} \Delta \mathbf{q}' + (2\omega_0 \mathbf{M} \mathbf{q}''_0 + \mathbf{C} \mathbf{q}'_0 + \\ & \frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{q}_0, \omega_0 \mathbf{q}'_0)}{\partial \omega}) \Delta \omega) d\tau = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

将式(20)和式(21)代入式(22)可得

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \delta(\Delta \mathbf{A})^T (\omega_0^2 \mathbf{S}^T \mathbf{M} \mathbf{S}'' \Delta \mathbf{A} + \omega_0 \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S}' \Delta \mathbf{A} + \\ & \mathbf{S}^T \mathbf{K} \mathbf{S} \Delta \mathbf{A} + \mathbf{S}^T \mathbf{R} + \mathbf{S}^T \frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{S} \mathbf{A}, \omega_0 \mathbf{S}' \mathbf{A})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{S} \Delta \mathbf{A} + \\ & \mathbf{S}^T \frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{S} \mathbf{A}, \omega_0 \mathbf{S}' \mathbf{A})}{\partial \mathbf{q}'} \mathbf{S}' \Delta \mathbf{A} + (2\omega_0 \mathbf{S}^T \mathbf{M} \mathbf{S}'' \mathbf{A} + \\ & \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S}' \mathbf{A} + \mathbf{S}^T \frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{S} \mathbf{A}, \omega_0 \mathbf{S}' \mathbf{A})}{\partial \omega}) \Delta \omega) d\tau = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

\mathbf{S} 为 τ 的函数, 可令

$$\bar{\mathbf{M}} = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \mathbf{M} \mathbf{S}'' d\tau$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S}' d\tau$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \mathbf{K} \mathbf{S} d\tau$$

$$\bar{\mathbf{Nf}}_0 = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \mathbf{Nf}(\mathbf{S} \mathbf{A}, \omega_0 \mathbf{S}' \mathbf{A}) d\tau$$

$$\bar{\mathbf{Nf}}_1 = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{S} \mathbf{A}, \omega_0 \mathbf{S}' \mathbf{A})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{S} d\tau$$

$$\bar{\mathbf{Nf}}_2 = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{S} \mathbf{A}, \omega_0 \mathbf{S}' \mathbf{A})}{\partial \mathbf{q}'} \mathbf{S}' d\tau$$

$$\bar{\mathbf{Nf}}_3 = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \frac{\partial \mathbf{Nf}(\mathbf{S} \mathbf{A}, \omega_0 \mathbf{S}' \mathbf{A})}{\partial \omega} d\tau$$

方程可简化为

$$\mathbf{K}_{mc} \Delta \mathbf{A} + \mathbf{R}_{mc} \Delta \omega + \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{0} \quad (24)$$

其中

$$\mathbf{K}_{mc} = \omega_0^2 \bar{\mathbf{M}} + \omega_0 \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{Nf}}_1 + \bar{\mathbf{Nf}}_2 \quad (25)$$

$$\mathbf{R}_{mc} = 2\omega_0 \bar{\mathbf{M}} \mathbf{A} + \bar{\mathbf{C}} \mathbf{A} + \bar{\mathbf{Nf}}_3 \quad (26)$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \omega_0^2 \bar{\mathbf{M}} \mathbf{A} + \omega_0 \bar{\mathbf{C}} \mathbf{A} + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{A} + \bar{\mathbf{Nf}}_0 \quad (27)$$

考虑到式(9)为自激振动系统, 因此可固定 \mathbf{A} 中的某一项, 则该项相应的增量为 0, 实际上可令 \mathbf{A} 的某一项恒为 0。令 $a_{1,k} = 0$, 相应的有 $\Delta a_{1,k} = 0$, 因此由式(24)有

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} K_{mc1,1} & \cdots & K_{mc1,k} & \cdots & K_{mc1,2nN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{mck,1} & \cdots & K_{mck,k} & \cdots & K_{mck,2nN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{mc2nN,1} & \cdots & K_{mc2nN,k} & \cdots & K_{mc2nN,2nN} \end{bmatrix} \times \\ & \left\{ \begin{array}{l} \Delta a_{1,1} \\ \vdots \\ \Delta a_{1,k} = 0 \\ \vdots \\ \Delta b_{n,N} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} R_{mc1} \\ \vdots \\ R_{mck} \\ \vdots \\ R_{mc2nN} \end{array} \right\} \Delta \omega + \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_1 \\ \vdots \\ \bar{R}_k \\ \vdots \\ \bar{R}_{2nN} \end{array} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

将 \mathbf{K}_{mc} 中第 k 列元素替换为 \mathbf{R}_{mc} 可得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} K_{mc1,1} & \cdots & R_{mc1} & \cdots & K_{mc1,2nN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{mck,1} & \cdots & R_{mck} & \cdots & K_{mck,2nN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{mc2nN,1} & \cdots & R_{mc2nN} & \cdots & K_{mc2nN,2nN} \end{bmatrix} \times \\ & \left\{ \begin{array}{l} \Delta a_{1,1} \\ \vdots \\ \Delta \omega \\ \vdots \\ \Delta b_{n,N} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_1 \\ \vdots \\ \bar{R}_k \\ \vdots \\ \bar{R}_{2nN} \end{array} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

实际求解时,首先给定 \mathbf{A} 和 ω_0 一组初值,然后求出增量 $\Delta\mathbf{A}$ 和 $\Delta\omega$,进而判断 $\bar{\mathbf{R}}$ 是否为零。若为零,则方程的解为 \mathbf{A} 和 ω_0 ;若不为零,则令 $\mathbf{A} = \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$, $\omega_0 = \omega_0 + \Delta\omega$,然后继续迭代求解,最后可解出 \mathbf{A} 和 ω_0 ,由 \mathbf{A} 即可得 X 和 Y 前 N 阶近似解的幅值。

3 次档距振动特性分析

取参数值分别为 $m = 3.31\text{kg}$, $\rho = 1.225\text{kg}/\text{m}^3$, $l = 1\text{m}$, $d = 0.04\text{m}$, $\bar{c}_x = \bar{c}_y = 0.1$, $\omega_x = 6.91$, $\omega_y = 7.23$, $X_0 = 18$, $Y_0 = 2.5$,采用文献 [11] 中 \bar{k}_x 和 \bar{k}_y ,通过上一节的分析,取 X 和 Y 的三次谐波,可得 X 和 Y 的前三次谐波的幅值随 U_0 的变化,如图 2~图 7 所示。

图 2 和图 3 分别为 X 和 Y 的一次谐波与数值解的幅值随风速 U_0 的变化关系。由图可知,次档距振荡零平衡位置存在 2 个失稳速度 $U_{10} = 8.86$ 和 $U_{20} = 12.62$ 。这与文献 [1] 所得 2 个 Hopf 分岔点的结论和文献 [11] 实验结果吻合一致。当 $U_0 <$

U_{10} 时,系统不存在极限环响应,系统收敛到稳定的零解上;当 $U_{10} < U_0 < U_{20}$ 时,系统存在极限环响应,极限环幅值随 U_0 的变化而改变;当 $U_0 > U_{20}$ 时,系统又收敛到零解上,而无极限环响应。与数值解的对比分析可知,一次谐波能够较好地反映次档距振荡系统的动力学变化趋势,表明增量谐波平衡法求解次档距振荡系统动力学响应的正确性,但是量上还有一些差距,如果需要精确描述次档距振荡系统的动力学特性则需要求解二次、三次甚至高次谐波解。

图 4~图 7 分别为 X 和 Y 的二次和三次谐波的幅值随风速 U_0 的变化关系。对比分析一次、二次和三次谐波的响应曲线可知,其动力学变化趋势是一致的,都是在 $U_0 < 8.86$ 或 $U_0 > 12.62$ 时,收敛到零解;而在 $8.86 < U_0 < 12.62$ 时,收敛到极限环上,极限环幅值呈先增大后减小的变化趋势。不同之处在于二次谐波的幅值要比一次谐波小 2 个数量级,三次谐波的幅值比一次谐波小 3 个数量级,谐波幅值随谐波次数的增高而明显减小,因此高于三次谐波的谐波项可以忽略不计。

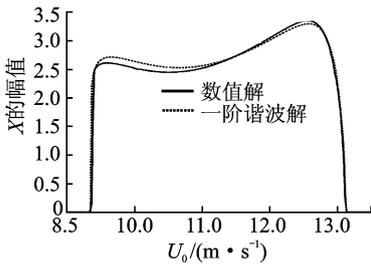


图 2 X 的一次谐波和数值解的幅值随 U_0 的变化

Fig. 2 Amplitude for the first order and numerical solution of X with wind speed U_0

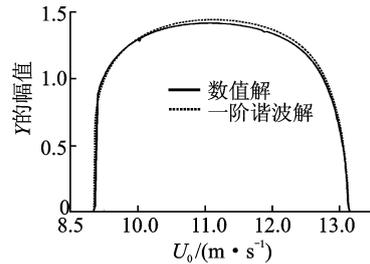


图 3 Y 的一次谐波和数值解的幅值随 U_0 的变化

Fig. 3 Amplitude for the first order and numerical solution of Y with wind speed U_0

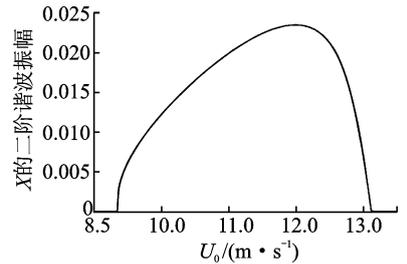


图 4 X 的二次谐波的幅值随 U_0 的变化

Fig. 4 Amplitude for the second order of X with wind speed U_0

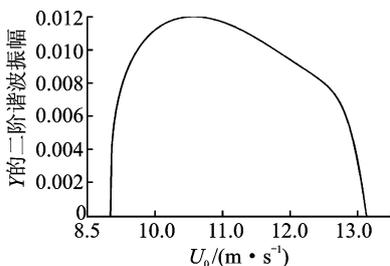


图 5 Y 的二次谐波的幅值随 U_0 的变化

Fig. 5 Amplitude for the second order of Y with wind speed U_0

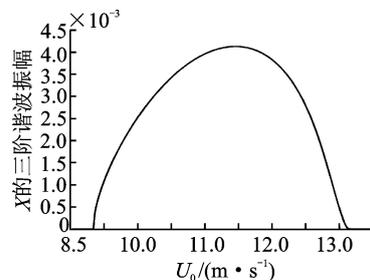


图 6 X 的三次谐波的幅值随 U_0 的变化

Fig. 6 Amplitude for the third order of X with wind speed U_0

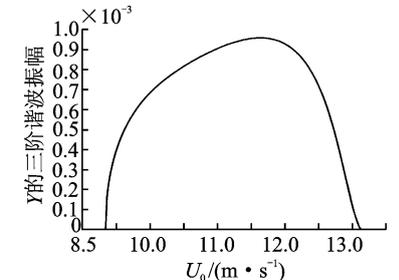


图 7 Y 的三次谐波的幅值随 U_0 的变化

Fig. 7 Amplitude for the third order of Y with wind speed U_0

4 次档距振动结构参数分析

分析结构参数对次档距振荡振幅的影响,可以为防止次档距振荡的措施提供依据。取参数值 $U_0 = 9.5 \text{ m/s}$,其他参数同第 3 节所取。通过以上分析,取 X 和 Y 的三次谐波,可得结构参数背风子导线初始位置 X_0, Y_0 和档距 l 对次档距振荡的影响,如图 8~图 10 所示。

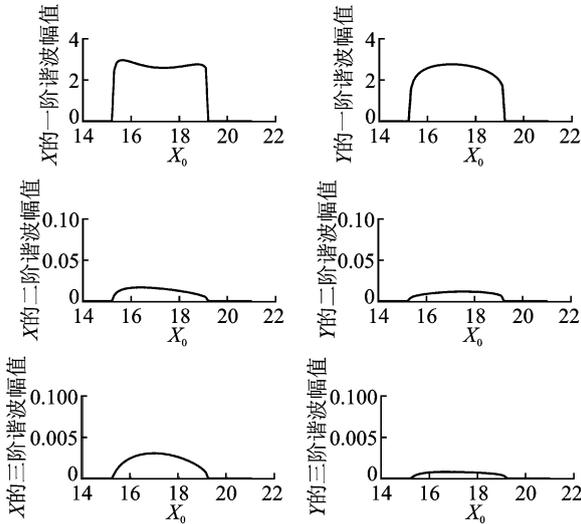


图 8 X 和 Y 的振幅随 X_0 的变化

Fig. 8 Amplitude of X and Y with X_0

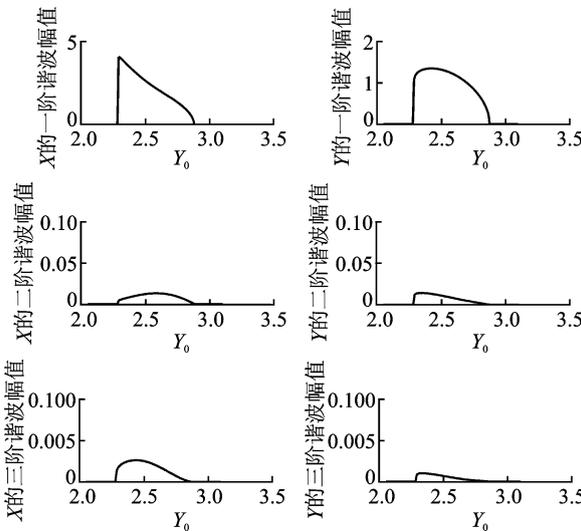


图 9 X 和 Y 的振幅随 Y_0 的变化

Fig. 9 Amplitude of X and Y with Y_0

图 8 为 X 和 Y 的一、二、三阶谐波幅值随尾流中背风子导线初始水平距离 X_0 的变化。其他参数不变,随 X_0 的增加,当 $X_0 = 15.2$ 时开始存在次档距振荡极限环响应,当 $X_0 = 19.2$ 时极限环响应消

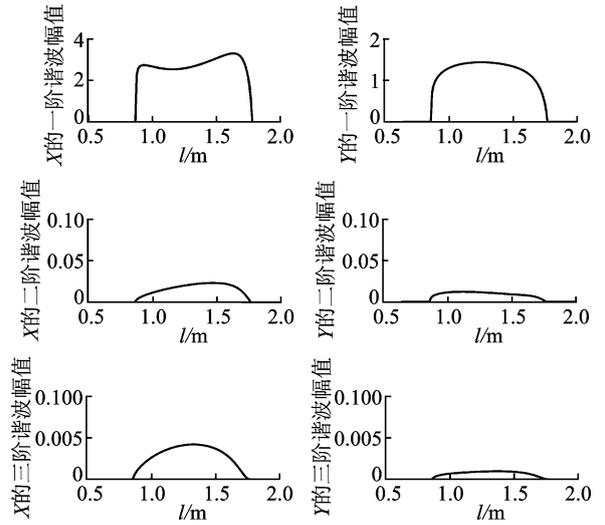


图 10 X 和 Y 的振幅随 l 的变化

Fig. 10 Amplitude of X and Y with l

失,即 $15.2 < X_0 < 19.2$ 时系统存在极限环响应。图 9 为 X 和 Y 的一、二、三阶谐波幅值随尾流中背风子导线初始垂直距离 Y_0 的变化。其他参数不变,随 Y_0 的增加,当 $Y_0 = 2.3$ 时开始存在次档距振荡极限环响应,当 $Y_0 = 2.9$ 时极限环响应消失,即 $2.3 < Y_0 < 2.9$ 时系统存在极限环响应。图 10 为 X 和 Y 的一、二、三阶谐波幅值随档距 l 的变化。其他参数不变,随 l 的增加,当 $l = 0.86$ 时开始存在次档距振荡极限环响应,当 $l = 1.77$ 时极限环响应消失,即 $0.86 < l < 1.77$ 时系统存在极限环响应。因此,可得合理的配置结构参数 X_0, Y_0 和 l ,可以达到抑制两分裂导线次档距振荡的目的。

5 结 论

- 1) 次档距振荡系统的零平衡位置存在两个失稳速度,两个失稳速度区间之内,系统存在次档距振荡,收敛到稳定的极限环上,失稳速度区间之外,系统收敛到稳定的零解上。
- 2) 次档距振荡系统各阶谐波响应的失稳速度一致,且失稳区间内极限环幅值都是随风速的增大呈现出先增大后减小的趋势。
- 3) 各阶谐波响应随谐波阶次的增加,幅值衰减明显,二次谐波幅值远小于一次谐波,三次谐波幅值又小于二次谐波。一次谐波解能够较好地反映分裂导线的次档距振荡。
- 4) 当结构参数变化时,其对次档距振动振幅的影响规律为:随尾流中背风子导线初始水平距离 X_0 、初始垂直距离 Y_0 、档距 l 的增加而先增大后减

小直到振动消失。因此,实际线路中应兼顾经济性与合理性的要求,将这 3 个参数尽可能地选择小些或者尽可能大一些,这有助于避免出现大幅的次档距振荡。

参 考 文 献

- [1] 陈元坤. 分裂导线的微分振动与次档距振荡研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2011.
- [2] Bokaian A. Galloping of a circular cylinder in the wake of another[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, 128(1): 71-85.
- [3] Wardlaw R L, Cooper K R, Ko R G, et al. Wind tunnel and analytical investigations into the aeroelastic behaviour of bundled conductors [J]. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 1975, 94(2): 642-654.
- [4] Lilien J L, Snegovski D. Wake-induced vibration in power transmission line parametric study [C]// *Flow Induced Vibration*. Paris: de Langre & Axisa, 2004: 6-9.
- [5] Simpson A. Wake induced flutter of circular cylinders; aeronautical aspects [J]. *Aeronautical Quarterly*, 1971, 22(2): 101-118.
- [6] Cooper K R. Wind tunnel and theoretical investigations into the aerodynamic stability of smooth and stranded twin-bundled power conductors [R]. Canada: National Research Council of Canada, 1973.
- [7] Price S J. Wake induced flutter of power transmission conductors [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1975, 38(1): 125-147.
- [8] Rawlins C B. Fundamental concepts in the analysis of wake induced oscillation of bundled conductors [J]. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 1976, 95(4): 1377-1393.
- [9] Kern G, Maitz A. Self-excited wind-induced vibrations and limit cycles in bundled conductors [J]. *Meccanica*, 1998, 33: 243-253.
- [10] Kern G, Maitz A. Normal form transformation and an application to a flutter-type of vibration [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1998, 33(5): 741-751.
- [11] Oliveira A R E, Mansour W M. Nonlinear analysis of wake-induced oscillations [J]. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 1985, 104(3): 727-732.
- [12] Price S J, Maciel Y. Solution of the nonlinear equations for wake-induced flutter via the Krylov and Bogoliubov method of averaging [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1990, 4(5): 519-540.
- [13] 唐南. 应用于范德波方程的增量谐波平衡法 [J]. *中山大学研究生学刊: 自然科学版*, 1995, 16(2): 43-50. Tang Nan. The incremental harmonic balance method applied to Van der pol equations [J]. *Natural Science Journal of the Graduates, Sun Yat-Sen University: Natural Science Edition*, 1995, 16(2): 43-50. (in Chinese)
- [14] 晏致涛, 张海峰, 李正良. 基于增量谐波平衡法的覆冰输电线路舞动分析 [J]. *振动工程学报*, 2012, 25(2): 161-166. Yan Zhitao, Zhang Haifeng, Li Zhengliang. Galloping analysis of iced transmission lines based on incremental harmonic balance method [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2012, 25(2): 161-166. (in Chinese)



第一作者简介: 于洋洋, 男, 1989 年 2 月生, 硕士生。主要研究方向为输电导线次档距振荡。曾发表《两分裂导线次档距振荡 Hopf 分岔研究》(《机械科学与技术》2016 年第 35 卷第 8 期) 等论文。
E-mail: yangyang80233@126.com