

# 考虑载荷变化的准零刚度隔振器动态特性\*

程 春, 李舜酩, 王 勇, 江星星

(南京航空航天大学能源与动力学院 南京, 210016)

**摘要** 为了研究载荷变化对准零刚度隔振器动态特性及隔振性能的影响,首先,分析具有分段非线性特性的准零刚度隔振器静力学特性;其次,引入光滑函数,应用增量谐波平衡法得到准零刚度隔振器的周期解,分析载荷与激励幅值对隔振器动态特性的影响;最后,定义准零刚度隔振器的力传递率,分析载荷与激励幅值对其隔振性能的影响。研究表明:当激励幅值较大时,载荷变化会导致响应的常数项在共振区附近出现交叉折叠的现象;载荷与激励幅值的变化会改变隔振系统的共振频率、传递率峰值以及有效隔振频带,但该准零刚度隔振器的隔振性能仍优于线性隔振器。

**关键词** 隔振器; 准零刚度; 分段非线性; 增量谐波平衡法

**中图分类号** TH113.1; TB535; O322

## 引 言

被动隔振器广泛应用于工程隔振问题中,线性被动隔振器只有当激励频率大于系统固有频率的 $\sqrt{2}$ 倍时才起隔振作用。为了增加隔振频带需要减小隔振器的刚度,其结果是增大了隔振器的静位移并降低了承载能力。具有准零刚度(quasi-zero-stiffness, 简称 QZS)特性的非线性隔振器由于具有非常低的固有频率和较高的承载能力而适用于低频隔振。准零刚度隔振器一般由正刚度弹性元件和负刚度调节机构并联组成,正刚度弹性元件主要用于承受载荷,负刚度调节机构则用于抵消正刚度弹性元件的刚度,从而使隔振系统在静平衡位置处的刚度趋向于零。负刚度调节机构具有多种实现方式。Alabuzhev 等<sup>[1]</sup>提出了一系列具有准零刚度特性的隔振系统。彭献等<sup>[2]</sup>利用连杆作为负刚度调节机构,研究了准零刚度隔振器的设计方法。文献[3-4]利用压杆作为负刚度调节机构设计了超低频隔振器。Carrella 等<sup>[5]</sup>利用两个斜置弹簧作为负刚度调节机构建立了准零刚度隔振器模型并分析了其隔振性能。Le 等<sup>[6]</sup>利用两个对称的负刚度调节结构实现了准零刚度隔振器并将其用于汽车座椅隔振。Robertson 等<sup>[7]</sup>利用磁铁弹簧实现了准零刚度隔振

器,提出了该隔振器的设计准则。刘兴天等<sup>[8]</sup>利用屈曲欧拉梁作为负刚度调节机构实现了准零刚度隔振器并研究了其动力学特性及隔振性能。徐道临等<sup>[9]</sup>提出了气动可调式弹簧准零刚度隔振器并分析了其隔振性能。孟令帅等<sup>[10]</sup>利用碟形弹簧作为负刚度调节机构实现了准零刚度隔振器。以上研究隔振系统均处于额定载荷下,即最小刚度位于静平衡位置。实际工程中若载荷发生变化,会导致隔振系统的静平衡位置偏离其初始设计位置。此时系统的最小刚度偏离新的静平衡位置,系统的刚度关于新的静平衡位置不对称,对准零刚度隔振器的性能产生影响。Shaw 等<sup>[11]</sup>分析了由载荷误差引起的刚度不对称对高静低动刚度隔振器性能的影响。文献[12-13]研究了过载对高静低动刚度隔振器动力学特性的影响。笔者使用一种凸轮滚轮弹簧装置作为负刚度调节机构与竖直弹簧并联构成准零刚度隔振器,系统的刚度呈分段非线性。该隔振器结构与文献[14]中的模型相似,作者仅分析了额定载荷下隔振器的动态特性。

笔者建立准零刚度隔振器模型,将系统恢复力展开成五阶泰勒级数来提高分析的可靠性。由于传统解析法无法得到系统的周期解,应用增量谐波平衡法求解系统在力激励下的响应并分析载荷变化对系统动力学特性的影响。分析准零刚度隔振器的力

\* 机械结构强度与振动国家重点实验室开放课题资助项目(SV2015-KF-01);中央高校基础研究基金资助项目(XZA15003);江苏省研究生培养创新工程资助项目(KYXL15\_0256)

收稿日期:2015-11-07;修回日期:2015-12-03

传递率,并与线性隔振器进行比较。

## 1 准零刚度隔振器模型

具有分段非线性的准零刚度隔振器示意图如图1所示。竖直弹簧的刚度为 $k_v$ ,主要用于支撑载荷 $m$ 。凸轮滚轮弹簧装置由半圆形凸轮、自由运动的滚轮以及水平弹簧组成,凸轮与滚轮的半径分别为 $r_2$ 和 $r_1$ ,水平弹簧的刚度为 $k_h$ 。 $x$ 为载荷从静平衡位置开始的位移。隔振系统的阻尼为线性黏性阻尼,阻尼系数为 $c$ 。系统受到垂向简谐力激励 $f_e = F_e \cos \omega t$ ,其中: $F_e$ 和 $\omega$ 分别为激励幅值和频率。当准零刚度隔振器工作时,滚轮沿着凸轮表面上下滚动,水平弹簧则沿着水平方向运动并为隔振器在竖直方向提供负刚度。隔振器的刚度是否表现出分段非线性取决于激励幅值的大小。

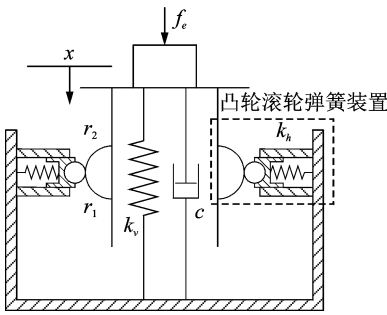


图1 准零刚度隔振器示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the QZS vibration isolator

当激励幅值较小时,系统振幅小于临界位移 $x_c$ ,滚轮仅沿凸轮表面运动,如图2(a)所示。隔振系统的恢复力与位移之间的关系为

$$f(x) = mg - f_v - 2f_h \tan \alpha \quad (1)$$

其中: $mg = k_v \Delta x$ ;  $f_v = k_v (\Delta x - x)$ ;  $\Delta x$ 为竖直弹簧在静平衡位置的压缩量; $f_h = k_h (d - (r_1 + r_2)(1 - \cos \alpha))$ ;  $d$ 为水平弹簧的预压缩量; $\tan \alpha =$

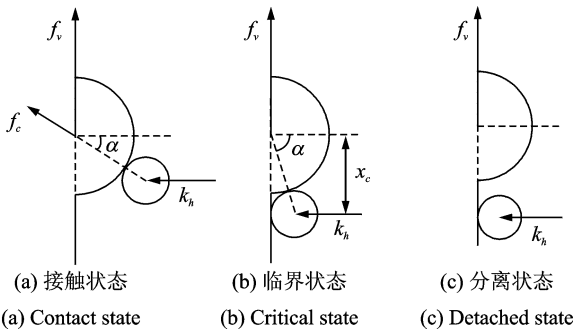


图2 凸轮滚轮在不同状态下的受力分析图

Fig. 2 Schematic diagrams of static analysis of cam and roller in different states

$\frac{x}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - x^2}}$ ;  $\alpha$ 为凸轮滚轮中心线与水平方向的夹角。

恢复力可以表示为

$$f(x) = k_v x - 2k_h x \left( 1 + \frac{d - (r_1 + r_2)}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - x^2}} \right) \quad (2)$$

当激励幅值较大时,系统振幅大于临界位移 $x_c$ ,则滚轮可能脱离凸轮表面,如图2(c)所示。此时载荷仅由竖直弹簧支撑,故恢复力为

$$f(x) = k_v x \quad (3)$$

将式(2),(3)写成无量纲的形式

$$h(u) = \begin{cases} \left( 1 - 2\beta \left( 1 + \frac{\delta - 1}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \right) u & (|u| \leq u_c) \\ u & (|u| > u_c) \end{cases} \quad (4)$$

其中: $h = \frac{f}{(k_v (r_1 + r_2))}$ ;  $u = \frac{x}{(r_1 + r_2)}$ ;  $\beta = \frac{k_h}{k_v}$ ;  $\delta = \frac{d}{(r_1 + r_2)}$ ;  $u_c = \frac{x_c}{(r_1 + r_2)}$ 。

当位移小于临界值时,即 $|u| \leq u_c$ ,将式(4)第1个表达式对 $u$ 求导,得到系统的无量纲刚度为

$$k = 1 - 2\beta \left( 1 + \frac{\delta - 1}{(1 - u^2)^{3/2}} \right) \quad (5)$$

将 $u=0$ 代入式(5),得到系统在静平衡位置处的无量纲刚度为

$$k_s = 1 - 2\beta \delta \quad (6)$$

若系统在静平衡位置处的刚度为零,则可以实现准零刚度特性。令 $k_s = 0$ ,得到准零刚度条件

$$\delta_{qzs} = \frac{1}{2\beta} \quad (7)$$

系统在 $u_c = 0.6$ ,  $\beta = 1$ 时,无量纲力-位移及刚度-位移曲线随 $\delta$ 的变化规律如图3所示。可以看出,静平衡位置的刚度随着 $\delta$ 的增大而减小。当 $\delta = \delta_{qzs}$ 时,静平衡位置的刚度为零,系统实现准零刚度特性。若 $\delta$ 继续增加,静平衡位置附近的刚度将小

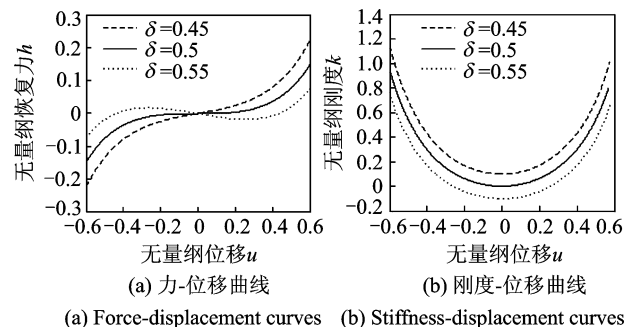


图3 无量纲力-位移及刚度-位移曲线( $u_c = 0.6, \beta = 1$ )

Fig. 3 Non-dimensional force-displacement and stiffness-displacement curves ( $u_c = 0.6, \beta = 1$ )

于零,系统变得不稳定,这在工程实际中是不允许出现的。笔者选择  $\delta = \delta_{qs}$ 。

当  $|u| \leq u_c$  时,将式(4)第1个表达式在  $u = 0$  处展开成五阶泰勒级数,得到近似表达式为

$$h(u) = \lambda u + \gamma_1 u^3 + \gamma_2 u^5 \quad (8)$$

其中:  $\lambda = 1 - 2\beta\delta$ ;  $\gamma_1 = \beta(1 - \delta)$ ;  $\gamma_2 = \frac{3\beta(1 - \delta)}{4}$ 。

图4为考虑刚度分段特性的无量纲恢复力精确表达式曲线。可以看出,无量纲恢复力在分段点  $|u| = u_c$  处出现跳跃现象,这使得增量谐波平衡法无法正常迭代收敛得到周期解。需要引入光滑函数<sup>[15]</sup>,故式(4)的第2个表达式可以替换为

$$h(u) = \begin{cases} \tanh(\sigma(u - u_c))l + u - l & (u > u_c) \\ \tanh(\sigma(u + u_c))l + u + l & (u < -u_c) \end{cases} \quad (9)$$

其中:  $l = u_c - \lambda u_c - \gamma_1 u_c^3 - \gamma_2 u_c^5$ ;  $\tanh(\cdot)$  为双曲正切函数;  $\sigma$  为光滑因子,  $\sigma$  越大,近似精度越高。

完整的无量纲恢复力近似表达式为

$$h(u) = \begin{cases} \tanh(\sigma(u - u_c))l + u - l & (u > u_c) \\ \lambda u + \gamma_1 u^3 + \gamma_2 u^5 & (|u| \leq u_c) \\ \tanh(\sigma(u + u_c))l + u + l & (u < -u_c) \end{cases} \quad (10)$$

无量纲恢复力的精确表达式(4)与近似表达式(10)的对比曲线如图4所示。可见,近似曲线与精确曲线具有较好的一致性,只在分段点处误差较大。

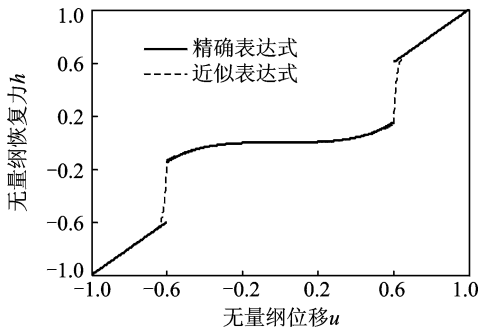


图4 无量纲恢复力精确表达式与近似表达式对比曲线 ( $\delta = 0.5, \beta = 1, \sigma = 50$ )

Fig.4 Comparison of the exact and approximate non-dimensional restoring force curves ( $\delta = 0.5, \beta = 1, \sigma = 50$ )

## 2 增量谐波平衡法

额定载荷为  $m$ , 载荷变化后为  $m_2$ , 载荷变化后系统的运动微分方程为

$$\mu m \ddot{x} + c \dot{x} + f(x) = (\mu - 1) mg + F_e \cos(\omega t) \quad (11)$$

其中:  $\mu = \frac{m_2}{m}$ ;  $f(x)$  表达式见式(2)和(3)。

引入如下无量纲参数

$$u = \frac{x}{(r_1 + r_2)}, \zeta = \frac{c}{(2m\omega_0)}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \tau = \frac{\omega t}{v}$$

$$f_1 = \frac{F_e}{(k_v(r_1 + r_2))}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k_v}{m}}, u_s = \frac{\Delta x}{(r_1 + r_2)}$$

将以上无量纲参数代入式(11),并将恢复力用近似表达式代替,则式(11)可以改写为

$$\mu \frac{\Omega^2}{v^2} u'' + 2\zeta \frac{\Omega}{v} u' + h(u) = (\mu - 1) u_s + f_1 \cos(v\tau) \quad (12)$$

其中:  $v$  为正整数,表示亚谐的阶数,  $v = 1$  用于求解主共振和超谐共振响应;  $(\cdot)'$  表示对  $\tau$  的导数;  $h(u)$  的表达式见式(10)。

对具有一般形式的非线性系统

$$g(u'', u', u, \Omega, \tau) = 0 \quad (13)$$

增量谐波平衡法的第1步为增量过程:令  $u_0$  和  $\Omega_0$  为系统某一时刻的解,其邻近的状态可以表示成增量的形式

$$\begin{cases} u = u_0 + \Delta u \\ \Omega = \Omega_0 + \Delta \Omega \end{cases} \quad (14)$$

将式(14)代入式(13)并按泰勒级数展开,忽略高阶小量,得到增量方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u''} \Big|_{u_0'} \Delta u'' + \frac{\partial g}{\partial u'} \Big|_{u_0'} \Delta u' + \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{u_0} \Delta u + \\ \frac{\partial g}{\partial \Omega} \Big|_{\Omega_0} \Delta \Omega = -g_0 \end{aligned} \quad (15)$$

其中:  $g_0 = g(u_0'', u_0', u_0, \Omega_0, \tau)$ 。

设  $u$  和  $\Delta u$  的形式为

$$u(\tau) = a_0 + \sum_{i=1}^N (a_i \cos i\tau + b_i \sin i\tau) \quad (16)$$

$$\Delta u(\tau) = \Delta a_0 + \sum_{i=1}^N (\Delta a_i \cos i\tau + \Delta b_i \sin i\tau) \quad (17)$$

其中:  $N$  为解中包含的谐波项数;  $a_i, b_i, \Delta a_i$  及  $\Delta b_i$  分别为各谐波项的傅里叶系数。

第2步为谐波平衡过程:应用伽辽金平均过程,式(15)转变为

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial g}{\partial u''} \Big|_{u_0'} \Delta u'' + \frac{\partial g}{\partial u'} \Big|_{u_0'} \Delta u' + \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{u_0} \Delta u + \frac{\partial g}{\partial \Omega} \Big|_{\Omega_0} \Delta \Omega \right) \Lambda(\Delta u) d\tau = - \int_0^{2\pi} g_0 \Lambda(\Delta u) d\tau \quad (18)$$

其中:  $\Lambda(\Delta u)$  为  $\Delta u$  的变分。

将式(16)和(17)代入式(18),得到  $2N + 1$  个关于  $\Delta a_i$  和  $\Delta b_i$  的线性代数方程为

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}\Delta\mathbf{a} + \mathbf{Q}\Delta\Omega \quad (19)$$

其中： $\mathbf{R}$ 为残差向量， $\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$ ； $\mathbf{C}$ 为雅克比矩阵， $\mathbf{C} =$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}; \mathbf{Q} \text{ 为对应于 } \Omega \text{ 的导数向量, } \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix};$$

$\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N]^T$ ;  $\Delta \mathbf{a}$  为增量向量， $\Delta \mathbf{a} = [\Delta a_0, \Delta a_1, \dots, \Delta a_N, \Delta b_1, \dots, \Delta b_N]^T$ ； $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{C}$  及  $\mathbf{Q}$  中各元素的积分表达式参考文献[16]。

由于恢复力  $h(u)$  为分段非线性函数，故  $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{C}$  及  $\mathbf{Q}$  中各元素需要分段积分得到。积分区间  $[0, 2\pi]$  根据刚度转变时间来划分，刚度转变时间由超越方程  $|u(\tau)| - u_c = 0$  确定。设  $\tau_0 = 0, \tau_{L+1} = 2\pi$ ，由该方程计算得到  $L$  个解： $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L$ 。于是积分过程在区间  $[\tau_0, \tau_1], [\tau_1, \tau_2], \dots, [\tau_L, \tau_{L+1}]$  内分别完成，再求和得到积分结果。

为了方便迭代计算，利用频率  $\Omega$  作为控制变量，每个迭代过程中  $\Omega$  保持为常量，即  $\Delta \Omega = 0$ ，得到迭代方程为

$$\mathbf{C}^{(i)} \Delta \mathbf{a}^{(i+1)} = \mathbf{R}^{(i)} \quad (20a)$$

$$\mathbf{a}^{(i+1)} = \mathbf{a}^{(i)} + \Delta \mathbf{a}^{(i+1)} \quad (20b)$$

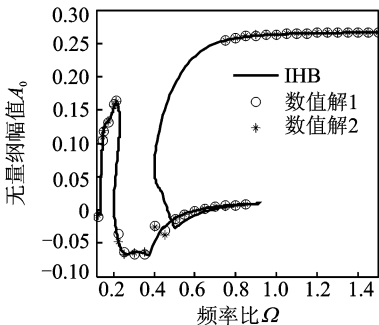
其中： $i$  为迭代次数，给定一个初始解  $\mathbf{a}$ ，由式(20a)得到  $\Delta \mathbf{a}$ ；再由式(20b)得到下一个解  $\mathbf{a}$  直至残差向量的范数  $\|\mathbf{R}\|$  和增量向量范数  $\|\Delta \mathbf{a}\|$  小于给定误差时迭代结束，该状态下的解即为周期解。

$$\|\mathbf{R}\| < \varepsilon_1, \|\Delta \mathbf{a}\| < \varepsilon_2 \quad (21)$$

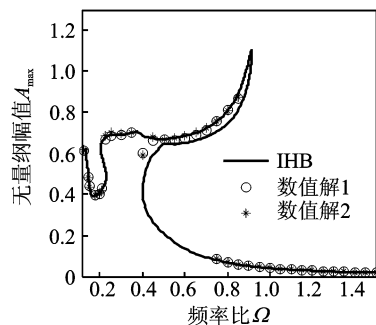
其中： $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  为给定误差。

### 3 计算结果

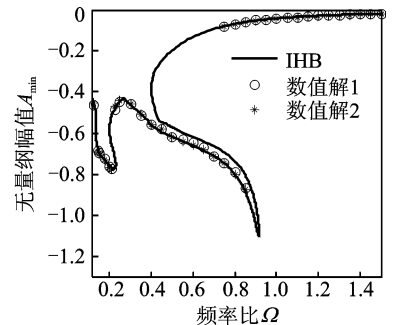
周期解包含的谐波项数  $N$  越大，则计算精度越高，但耗费时间越长。 $N$  过小则计算精度无法满足，故参考文献[15]选择  $N = 12$ 。其他参数为：亚谐阶数  $v=1, \delta=0.5, \beta=1, u_c=0.6, u_s=0.1, \sigma=50, \zeta=0.02, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}$ 。增量谐波平衡法结合路径跟踪法<sup>[17]</sup>得到完整的幅频曲线。



(a) 响应的常数项  $A_0$   
(a) Constant term  $A_0$



(b) 响应的幅值  $A_{\max}$   
(b) Response amplitude  $A_{\max}$



(c) 响应的幅值  $A_{\min}$   
(c) Response amplitude  $A_{\min}$

图6 准零刚度隔振器幅频响应曲线 ( $\mu = 1.1, f_1 = 0.04$ )

Fig. 6 Amplitude-frequency curves of QZS vibration isolator ( $\mu = 1.1, f_1 = 0.04$ )

$\mu = 1.1, f_1 = 0.04, \Omega = 0.6925$  时响应的时程如图5所示。其中： $u_{\max}$  为响应的最大幅值； $u_{\min}$  为响应的最小幅值。可以看出，载荷变化时  $u_{\max}$  与  $u_{\min}$  的绝对值不相等。 $\mu = 1.1, f_1 = 0.04$  时准零刚度隔振器的幅频响应曲线如图6所示。其中： $A_0$  为常数项，幅值  $A_{\max} = u_{\max} - A_0, A_{\min} = u_{\min} - A_0$ 。数值解1为未引入光滑函数时采用龙格-库塔法求解得到的数值解，数值解2为引入光滑函数求解得到的数值解。可以看出，两数值解之间吻合的较好，并与IHB法结果一致，表明引入光滑函数及使用IHB法求解的合理性。

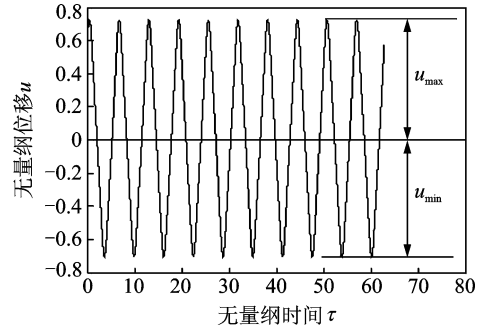


图5 响应的时程 ( $\mu = 1.1, f_1 = 0.04, \Omega = 0.6925$ )

Fig. 5 Time history of the response ( $f_1 = 0.005, \mu = 1.1, \Omega = 0.2785$ )

载荷变化对系统共振频率及动力学响应的影响如图7所示。可以看出，当激励幅值较小时 ( $f_1 = 0.005$ )，隔振器凸轮与滚轮一直处于接触状态，幅频曲线与达芬系统相似。过载情况下当  $A_{\max}$  处于峰值(共振频率处)时， $A_0$  对应着最小值，轻载情况下结果则正好相反。随着载荷的增加， $A_0$  随之增大； $A_{\max}$  的峰值先增大再减小；而  $A_{\min}$  的最小值一直保持增大的趋势。共振频率随载荷的增加先减小再移向高频；幅频曲线随载荷变化量  $\Delta \mu = |\mu - 1|$  的增加逐渐向左弯曲，即系统由刚度渐硬特性逐渐向刚度渐软特性变化。值得注意的是， $A_{\max}$  与  $A_{\min}$  并非

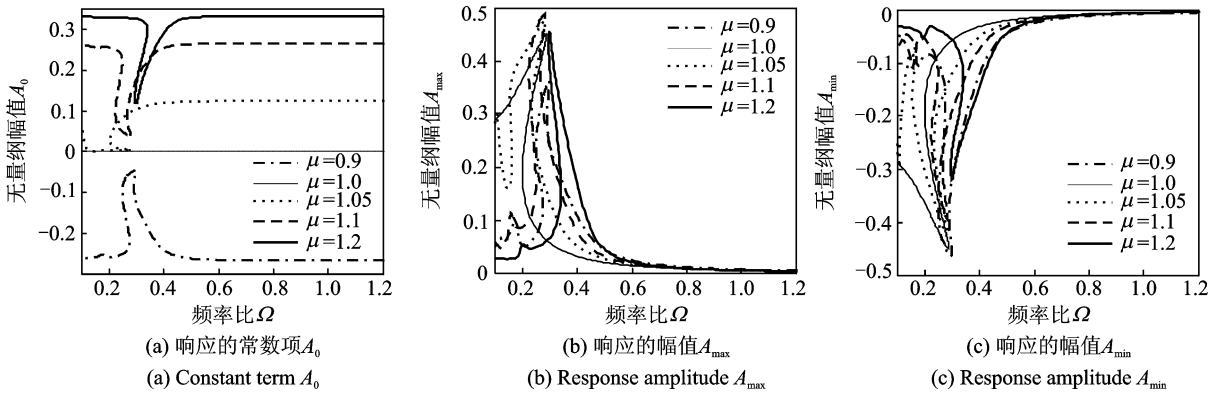


图 7 不同载荷时的幅频曲线 ( $f_1 = 0.005$ )

Fig. 7 Amplitude-frequency curves for various loads ( $f_1 = 0.005$ )

关于频率轴  $\Omega$  对称,幅值的变化也不同,表明增量谐波平衡法能比较全面地反映系统的特性。

当激励幅值较大时( $f_1 = 0.03$ ),凸轮与滚轮会周期性地接触和分离,载荷的变化对系统共振频率及动力学响应的影响如图 8 所示,表现出复杂的动态特性。过载情况下  $A_0$  在刚度转变点附近出现负值,轻载时结果相反。 $A_0$  在共振区域附近出现交叉折叠的现象,这与连续系统的动力学响应不同<sup>[13]</sup>。另外,随着载荷的增加,共振频率逐渐向低频移动; $A_{max}$  的峰值随之增加,  $A_{min}$  的最小值则相应减小。

响应的影响如图 9 所示。随着激励幅值的增大,  $A_0$  在共振区域附近先是出现负值再逐渐产生交叉折叠的现象;  $A_{max}$  的峰值随之增大,  $A_{min}$  的最小值则相应地减小;共振频率先是快速向高频移动,然后缓慢趋向于 1,而共振区域则趋向于线性系统。

### 4 力传递率

现有大多数研究中非线性隔振系统的传递率是根据线性振动理论来定义的<sup>[8-10]</sup>,即假设周期解中包含的谐波项数只有一个且响应频率与激励频率相

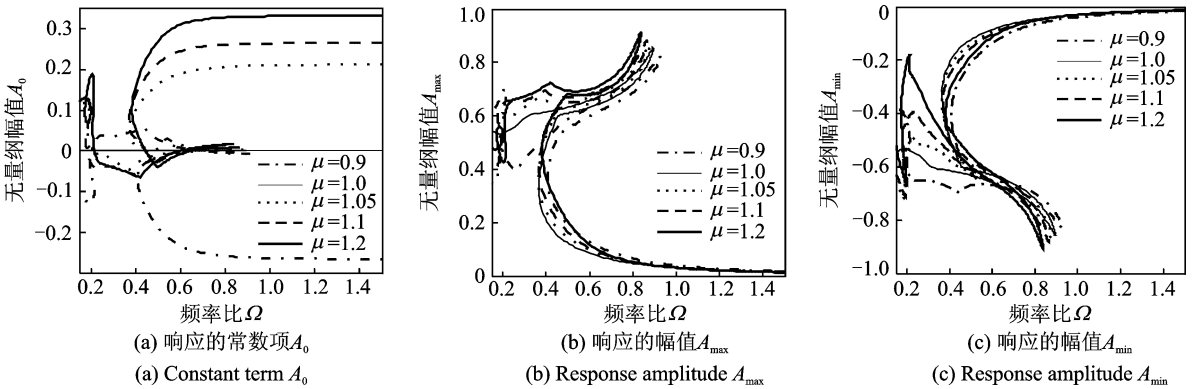


图 8 不同载荷时的幅频曲线 ( $f_1 = 0.03$ )

Fig. 8 Amplitude-frequency curves for various loads ( $f_1 = 0.03$ )

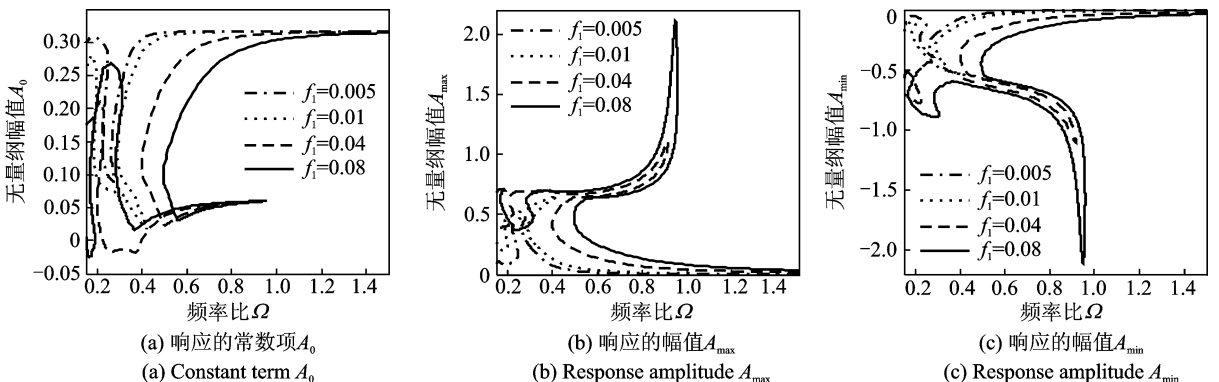


图 9 不同激励幅值下的幅频曲线 ( $\mu = 1.1$ )

Fig. 9 Amplitude-frequency curves for various excitation amplitude ( $\mu = 1.1$ )

同。但是当周期解中包含多个谐波项时,线性系统所定义的传递率不再适用。非线性隔振器的力传递率定义<sup>[18]</sup>为

$$\eta = \sqrt{\frac{P_T}{P_0}} \quad (22)$$

其中:  $P_T$  为传递力  $f_t$  在一个周期  $[0, 2\pi]$  的“平均功率”,  $P_T = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_t^2 d\tau$ ;  $P_0$  是激励  $f$  在一个周期  $[0, 2\pi]$  的“平均功率”,  $P_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2 d\tau$ ;  $\eta$  表示两者之间振动能量之比,  $\eta$  越小隔振性能越好;  $f_t = 2\zeta\Omega u' + h_1(u) - (\mu - 1)u_s$ ,  $f = f_1 \cos(\tau)$ ;  $h_1(u)$  为未做光滑处理的无量纲恢复力, 即

$$h_1(u) = \begin{cases} \lambda u + \gamma_1 u^3 + \gamma_2 u^5 & (|u| \leq u_c) \\ u & (|u| > u_c) \end{cases}$$

图 10 为  $f_1 = 0.005$  时载荷的变化对隔振系统力传递率的影响。可以看出: 过载情况下, 随着载荷的增加, 力传递率曲线逐渐向左弯曲并向高频移动; 起始隔振频率随之增加, 有效隔振频带相应地减小, 隔振频带内的传递率增加; 力传递率峰值也相应地增大。轻载情况下同样会减小系统的有效隔振频带。虽然载荷变化导致准零刚度隔振器的隔振性能变差, 但总体性能仍优于线性隔振器, 因为准零刚度隔振器仍然具有更宽的隔振频带和更低的传递率峰值。

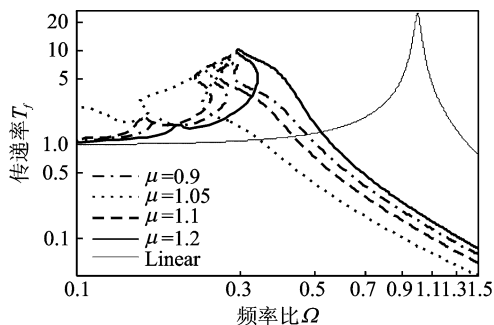


图 10 不同载荷时的力传递率 ( $f_1 = 0.005$ )  
Fig. 10 Force transmissibility for various loads ( $f_1 = 0.005$ )

当激励幅值增加到  $f_1 = 0.03$  时, 载荷的变化对系统力传递率的影响如图 11 所示。可以看出, 力传递率曲线比较复杂, 主要由上下两支构成。随着载荷的增加, 传递率峰值随之增大, 共振频率向低频移动。过载情况下, 下支曲线有效隔振频带内的传递率随载荷的增加而增大; 轻载情况也会导致有效隔振频带内的传递率增大, 但明显具有比线性隔振器更低的传递率。因此当激励频率大于系统的向下跳跃频率时, 系统便能起到隔振效果。显然准零刚度隔振器仍有着比线性隔振器更宽的隔振频带, 传递率峰值则与线性隔振器相当, 并无明显地增加。

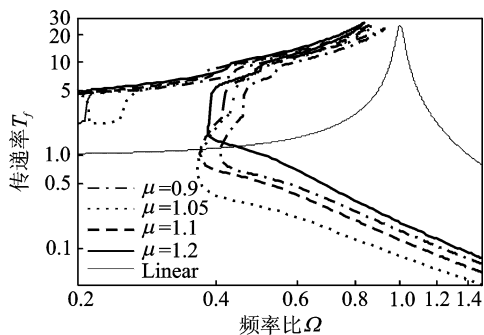


图 11 不同载荷时的力传递率 ( $f_1 = 0.03$ )  
Fig. 11 Force transmissibility for various loads ( $f_1 = 0.03$ )

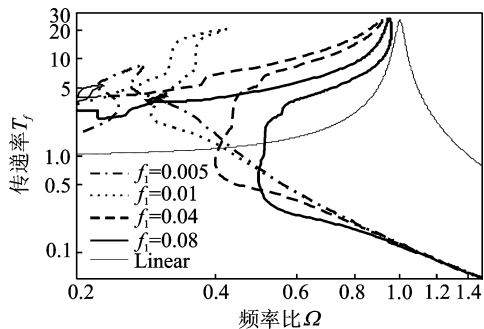


图 12 不同激励幅值下的力传递率 ( $\mu = 1.1$ )  
Fig. 12 Force transmissibility for various excitation amplitude ( $\mu = 1.1$ )

$\mu = 1.1$  时激励幅值对系统力传递率的影响如图 12 所示。可以看出: 随着激励幅值的增加, 准零刚度隔振器的共振频率先是迅速增加, 然后缓慢趋向于 1, 曲线在共振区域趋向于线性系统; 传递率峰值先迅速增加然后逐渐与线性系统相当; 起始隔振频率随着激励幅值的增加而增大, 隔振性能变差。值得注意的是, 即使激励幅值很大 ( $f_1 = 0.08$ ), 准零刚度隔振器的性能仍要优于线性隔振器, 因为有着较宽的隔振频带而传递率峰值则与线性系统相当。

## 5 结论

1) 激励幅值较小时, 增加载荷导致共振频率先减小再向高频移动, 载荷变化量增加使系统由渐硬特性向渐软特性转变。激励幅值较大时, 响应的常数项在共振区域附近出现交叉折叠的现象, 共振频率随载荷的增加向低频移动。增大激励幅值使系统共振频率向高频移动并趋向于 1, 共振区域趋向于线性系统。

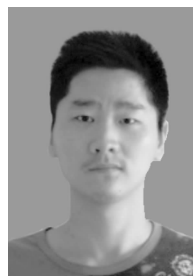
2) 激励幅值较小时, 载荷变化导致系统力传递率曲线向高频移动, 有效隔振频带变窄, 隔振效果变差。激励幅值较大时, 载荷的增加使系统的共振频率减小, 传递率峰值缓慢增加。增加激励幅值导致

有效隔振频带变窄,传递率峰值增加。

3) 载荷变化和激励幅值的增加均会导致准零刚度隔振器的隔振性能变差,但是与线性隔振器相比仍具有更宽的隔振频带。因此该准零刚度隔振器的隔振性能仍要优于线性隔振器。

### 参 考 文 献

- [1] Alabuzhev P, Gritchin A, Kim L, et al. *Vibration Protecting and Measuring Systems with Quasi-Zero Stiffness*[M]. New York: Hemisphere Publishing, 1989: 5-9.
- [2] 彭献,黎大志,陈树年. 准零刚度隔振器及其弹性特性设计[J]. 振动、测试与诊断, 1997, 17(4): 44-46.  
Peng Xian, Li Dazhi, Chen Shunian. Quasi-zero stiffness vibration isolators and design for their elastic characteristic[J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 1997, 17(4): 44-46. (in Chinese)
- [3] Platus D L. Negative-stiffness-mechanism vibration isolation systems[C]// *Proceedings of SPIE-The International Society for Optical Engineering*, Denver: International Society for Optical Engineering, 1999: 98-105.
- [4] 张建卓,董申,李旦. 基于正负刚度并联的新型隔振系统研究[J]. 纳米技术与精密工程, 2004, 2(4): 314-318.  
Zhang Jianzhuo, Dong Shen, Li Dan. Study on new type vibration isolation system based on combined positive and negative stiffness[J]. *Nanotechnology and Precision Engineering*, 2004, 2(4): 314-318. (in Chinese)
- [5] Carrella A, Brennan M J, Kovacic I, et al. On the force transmissibility of a vibration isolator with quasi-zero-stiffness[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 322(4-5): 707-717.
- [6] Le T D, Ahn K K. A vibration isolation system in low frequency excitation region using negative-stiffness structure for vehicle seat[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330(26): 6311-6335.
- [7] Robertson W S, Kidner M R F, Cazzolato B S, et al. Theoretical design parameters for a quasi-zero stiffness magnetic spring for vibration isolation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 326(1-2): 88-103.
- [8] 刘兴天,孙靖雅,肖锋,等. 准零刚度微振动隔振器的原理和性能研究[J]. 振动与冲击, 2013, 32(21): 69-73.  
Liu Xingtian, Sun Jingya, Xiao Feng, et al. Principle and performance of a quasi-zero stiffness isolator for micro-vibration isolation[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2013, 32(21): 69-73. (in Chinese)
- [9] 徐道临,赵智,周加喜. 气动可调式准零刚度隔振器设计及特性分析[J]. 湖南大学学报:自然科学版, 2013, 40(6): 47-52.  
Xu Daolin, Zhao Zhi, Zhou Jiayi. Design and analysis of an adjustable pneumatic vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic[J]. *Journal of Hunan University: Natural Sciences*, 2013, 40(6): 47-52. (in Chinese)
- [10] 孟令帅,孙景工,牛福,等. 新型准零刚度隔振系统的设计与研究[J]. 振动与冲击, 2014, 33(11): 195-199.  
Meng Lingshuai, Sun Jinggong, Niu Fu, et al. Design and analysis of a novel quasi-zero stiffness vibration isolation system[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2014, 33(11): 195-199. (in Chinese)
- [11] Shaw A D, Neild S A, Friswell M I. Relieving the effect of static load errors in nonlinear vibration isolation mounts through stiffness asymmetries[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 339: 84-98.
- [12] Huang Xiuchang, Liu Xingtian, Sun Jingya, et al. Effect of the system imperfections on the dynamic response of a high-static-low-dynamic stiffness vibration isolator[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 76(2): 1157-1167.
- [13] 刘兴天,黄修长,张志谊,等. 激励幅值及载荷对准零刚度隔振器特性的影响[J]. 机械工程学报, 2013, 49(6): 89-94.  
Liu Xingtian, Huang Xiuchang, Zhang Zhiyi, et al. Influence of excitation amplitude and load on the characteristics of quasi-zero stiffness isolator[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2013, 49(6): 89-94. (in Chinese)
- [14] Zhou Jiayi, Wang Xinlong, Xu Daolin, et al. Nonlinear dynamic characteristics of a quasi-zero stiffness vibration isolator with cam-roller-spring mechanisms[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 346: 53-69.
- [15] Yoon J Y, Yoon H S. Nonlinear frequency response analysis of a multistage clutch damper with multiple nonlinearities[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2014, 9(3): 031007-1-10.
- [16] Raghouthama A, Narayanan S. Bifurcation and chaos of an articulated loading platform with piecewise non-linear stiffness using the incremental harmonic balance method[J]. *Ocean Engineering*, 2000, 27(10): 1087-1107.
- [17] Narayanan S, Sekar P. A frequency domain based numeric-analytical method for non-linear dynamical systems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 211(3): 409-424.
- [18] 陈泳斌,陈树辉. 非线性隔振系统的运动响应和传递率[J]. 振动与冲击, 1998, 17(4): 18-22.  
Chen Yongbin, Chen Shuhui. The response and transmissibility of nonlinear isolating systems[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 1998, 17(4): 18-22. (in Chinese)



第一作者简介:程春,男,1991年1月生,博士生。主要研究方向为非线性振动分析与控制。曾发表《On the analysis of a piecewise nonlinear-linear vibration isolator with high-static-low-dynamic-stiffness under base excitation》(《Journal of Vibroengineering》2015, Vol. 17, No. 7)等论文。  
E-mail: chengchun987@163.com