

单级行星齿轮非线性动力学模型与试验验证*

刘 辉, 张 晨, 项昌乐, 王 成

(北京理工大学机械与车辆工程学院 北京, 100081)

摘要 针对单排行星直齿轮传动系统,提出了齿轮非线性啮合动态模型,模型中考虑了由中心距安装误差和传动轴弯曲变形等引起的中心距变化对啮合角、间隙和非线性啮合刚度的影响。考虑中心距变化和陀螺力矩并结合齿轮非线性啮合动态模型,建立了行星齿轮传动系统横-扭耦合非线性动力学模型。针对一个单排行星齿轮传动系统试验装置进行仿真计算和试验测试,试验对比分析了齿圈横向振动位移和内啮合均载系数。研究表明,仿真结果与试验结果的变化趋势基本吻合,且误差在可接受范围内,验证了笔者提出的渐开线直齿轮传动横-扭耦合非线性动力学模型和非线性动态啮合模型的正确性。

关键词 行星齿轮;啮合角;间隙;啮合力;动力学模型

中图分类号 TH113.1

引 言

齿轮传动系统单位质量、体积所传递的载荷增加,齿轮传动系统内部构件的变形也随之增加,严重影响齿轮传动系统的耐久性和可靠性。建立精确的行星齿轮动力学模型,预测齿轮传动系统的动力学行为,可为提高齿轮传动系统寿命和可靠性提供重要的理论依据^[1-2]。

提高行星齿轮动力学模型精度需从非线性动力学角度建立模型,同时考虑轴和轴承的变形^[3-4]。多数齿轮传动系统的啮合模型中,间隙取为定值,啮合刚度采用准静态的方法获得呈现周期时变特性,国内外学者基于该齿轮啮合模型做了广泛而深入的研究。文献[5-6]考虑定常间隙和周期时变刚度,建立了单级齿轮传动 3 自由度弯扭耦合非线性动力学模型,其中,啮合刚度采用准静态的方法获得。文献[7-8]考虑定常间隙和周期矩形波形式的时变刚度,分别针对两级齿轮传动系统和齿轮-转子耦合系统建立了多自由度非线性动力学模型。一些学者研究了齿轮运动状态对时变刚度、间隙和啮合角等啮合参数的影响。Chen 等^[9]考虑齿面、齿背啮合之间相位差,采用非对称矩形波形式的啮合刚度和定常间隙,基于 6 自由度弯扭耦合模型研究了齿轮空载敲

击特性。Kim 等^[10]考虑齿轮横向位移对啮合角和重合度的影响,忽略间隙并采用矩形波形式啮合刚度,基于 6 自由度弯扭耦合模型研究了系统参数对齿轮动态特性的影响。Chen 等^[11]考虑齿轮中心距变化对间隙的影响,基于 6 自由度弯扭耦合模型研究了动态间隙对系统稳定性的影响,其中啮合刚度采用准静态方法得到。综上所述,文献[9-11]仅研究了齿轮运动状态对部分啮合参数的影响,未考虑齿轮中心距变化对啮合刚度的影响及各啮合参数之间的耦合关系对齿轮传动系统动态特性的影响。

笔者以单排行星齿轮为研究对象。首先,分别针对太阳轮-行星轮外啮合副和齿圈-行星轮内啮合副,考虑齿轮运动状态对啮合角、间隙和啮合刚度的影响及各因素之间的耦合关系对齿轮传动系统动态特性的影响,分析了中心距变化对啮合角和间隙的影响,以及齿轮传动过程转速波动和中心距变化对啮合点的影响,从而影响齿轮啮合力;其次,考虑中心距变化、陀螺力矩并结合齿轮啮合动态模型,采用拉格朗日法建立了横-扭耦合非线性动力学模型。

1 行星齿轮传动系统啮合模型

行星齿轮三维动力学模型如图 1 所示。各齿轮和行星架均包含两个横向平移自由度 x_k, y_k 和一

* 国家自然科学基金资助项目(51375047)

收稿日期:2015-12-11;修回日期:2016-05-03

个扭转自由度 θ_{zk} 。其中: $k=s, r, c, p_i$, 分别代表太阳轮、行星架、齿圈和第 i 个行星轮, $i=1, 2, \dots, N$; N 为行星轮个数。

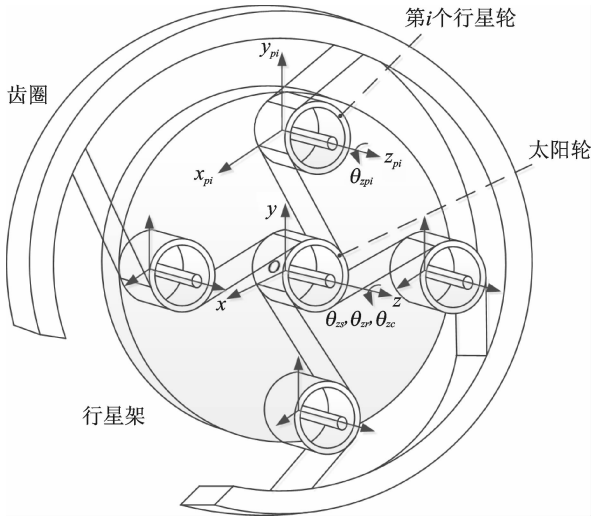


图1 渐开线直齿行星齿轮传动三维动力学模型

Fig.1 3D dynamic model of planetary transmission

1.1 太阳轮-行星轮动态啮合角

太阳轮与第 i 个行星轮的动力学模型在 Oxy 平面上的投影如图2所示。其中:虚线为初始时刻位置;实线为任意时刻位置; C_s 和 C_{p_i} 分别为太阳轮和行星轮的质心位置; e_s 和 e_{p_i} 分别为太阳轮和行星轮的偏心距; O_c 为行星架的质心位置; α_{spi} 为啮合角; γ_{spi} 为相对位置角。

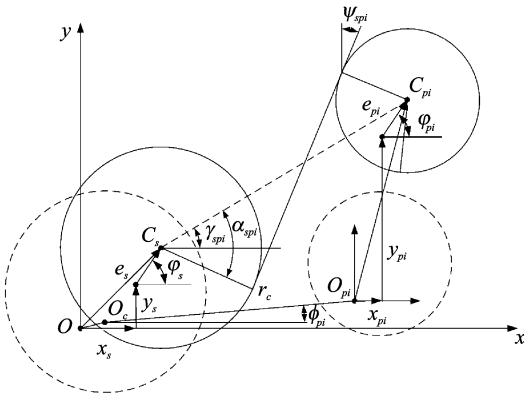


图2 太阳轮和第 i 个行星轮二维投影模型

Fig.2 2D dynamic model of sun and planetary gear pair

由几何关系得到太阳轮和第 i 个行星轮任意时刻的中心距,即动态中心距为

$$L_{spi} = \|\mathbf{R}_{C_{p_i}} - \mathbf{R}_s\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{R}_{C_{p_i}}$ 和 \mathbf{R}_s 分别为行星轮和太阳轮质心位置矢量。

Δx 和 Δy 分别为

$$\Delta x = x_c + r_c \cos(\varphi_{p_i}) + x_{p_i} + e_{p_i} \cos(\varphi_{p_i}) - x_s - e_s \cos(\varphi_s) \quad (2)$$

$$\Delta y = y_c + r_c \sin(\varphi_{p_i}) + y_{p_i} + e_{p_i} \sin(\varphi_{p_i}) - y_s - e_s \sin(\varphi_s) \quad (3)$$

其中: r_c 为行星轮轴心 O_{p_i} 与行星架质心 O_c 之间的距离; φ_{p_i} 为第 i 个行星轮轴中心的位置角, $\varphi_{p_i} = \theta_{zc} + \varphi_{p_i0}$, φ_{p_i0} 为第 i 个行星轮轴心的初始位置角; e_s 和 e_{p_i} 分别为太阳轮和行星轮的偏心距; φ_s 和 φ_{p_i} 分别为太阳轮和行星轮的自转角度, $\varphi_s = \theta_{zs} + \varphi_{s0}$, $\varphi_{p_i} = \theta_{z_{p_i}} + \varphi_{p_i0}$, φ_{s0} 和 φ_{p_i0} 分别为太阳轮和行星轮质心的初始位置角。

太阳轮与行星轮之间的动态啮合角为

$$\alpha_{spi} = \cos^{-1} \left(\frac{r_{hs} + r_{h_{p_i}}}{L_{spi}} \right) \quad (4)$$

由几何关系可得太阳轮与第 i 个行星轮之间任意时刻的相对位置角为

$$\gamma_{spi} = \varphi_{p_i} + \text{sign}(y_{spi}) \cos^{-1} \left(\frac{r_c^2 + L_{spi}^2 - A_{spi}^2}{2r_c L_{spi}} \right) \quad (5)$$

其中: sign 为符号函数。

A_{spi} 和 y_{spi} 分别如下

$$A_{spi} = \|\mathbf{R}_{C_{p_i}} - \mathbf{R}_s - \mathbf{R}_i\| = \sqrt{\Delta \tilde{x}^2 + \Delta \tilde{y}^2} \quad (6)$$

$$y_{spi} = -\sin(\varphi_{p_i}) \Delta \tilde{x} + \cos(\varphi_{p_i}) \Delta \tilde{y} \quad (7)$$

$\Delta \tilde{x}$ 和 $\Delta \tilde{y}$ 分别为

$$\begin{cases} \Delta \tilde{x} = x_c + x_{p_i} + e_{p_i} \cos(\varphi_{p_i}) - x_s - e_s \cos(\varphi_s) \\ \Delta \tilde{y} = y_c + y_{p_i} + e_{p_i} \sin(\varphi_{p_i}) - y_s - e_s \sin(\varphi_s) \end{cases} \quad (8)$$

啮合力方向通过啮合线与坐标轴 Oy 的夹角 ψ_{spi} 判断。齿面啮合时, $\psi_{spi} = \alpha_{spi} - \gamma_{spi}$; 齿背啮合时, $\psi_{spi} = \alpha_{spi} + \gamma_{spi}$ 。

1.2 齿圈-行星轮动态啮合角

齿圈和第 i 个行星轮的动力学模型在 Oxy 平面上的投影模型如图3所示。其中: C_r 为齿圈的质心位置; e_r 为齿圈偏心距; $\alpha_{r_{p_i}}$ 为任意时刻啮合角; $\gamma_{r_{p_i}}$ 为任意时刻相对位置角。

由几何关系得到齿圈和第 i 个行星轮任意时刻中心距,即动态中心距为

$$L_{r_{p_i}} = \|\mathbf{R}_{C_{p_i}} - \mathbf{R}_r\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (9)$$

其中: \mathbf{R}_r 为齿圈质心位置矢量。

Δx 和 Δy 分别为

$$\Delta x = x_c + r_c \cos(\varphi_{p_i}) + x_{p_i} + e_{p_i} \cos(\varphi_{p_i}) - x_r - e_r \cos(\varphi_r) \quad (10)$$

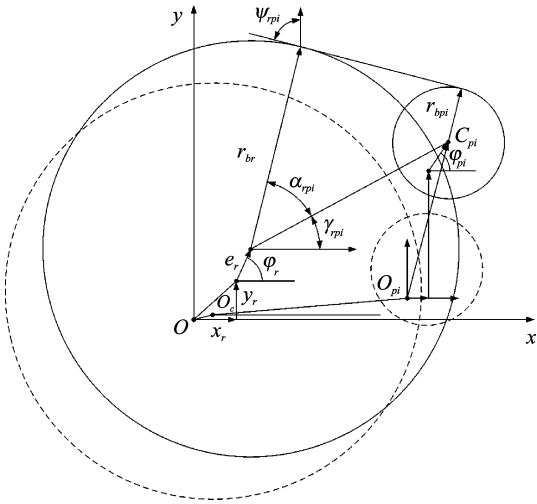


图 3 齿圈和第 i 个行星轮二维动力学模型

Fig. 3 2D dynamic model of ring and planetary gear pair

$$\Delta y = y_c + r_c \sin(\varphi_{pi}) + y_{pi} + e_{pi} \sin(\varphi_{pi}) - y_r - e_r \sin(\varphi_r) \quad (11)$$

其中: φ_r 为齿圈的转动角度, $\varphi_r = \theta_{zr} + \varphi_{r0}$ 。

齿圈和第 i 个行星轮动态啮合角为

$$\alpha_{rpi} = \cos^{-1} \left(\frac{r_{br} - r_{bpi}}{L_{rpi}} \right) \quad (12)$$

由几何关系可得任意时刻齿圈和第 i 个行星轮任意时刻的相对位置角为

$$\gamma_{rpi} = \varphi_{pi} + \text{sign}(y_{rpi}) \cos^{-1} \left(\frac{r_c^2 + L_{rpi}^2 - A_{rpi}^2}{2r_c L_{rpi}} \right) \quad (13)$$

其中: sign 为符号函数。

A_{rpi} 和 y_{rpi} 分别为

$$A_{rpi} = \|\mathbf{R}_{C_{pi}} - \mathbf{R}_r - \mathbf{R}_i\| = \sqrt{\Delta \tilde{x}^2 + \Delta \tilde{y}^2} \quad (14)$$

$$y_{rpi} = -\sin(\varphi_{pi}) \Delta \tilde{x} + \cos(\varphi_{pi}) \Delta \tilde{y} \quad (15)$$

$\Delta \tilde{x}$ 和 $\Delta \tilde{y}$ 分别为

$$\begin{cases} \Delta \tilde{x} = x_c + x_{pi} + e_{pi} \cos(\varphi_{pi}) - x_r - e_r \cos(\varphi_r) \\ \Delta \tilde{y} = y_c + y_{pi} + e_{pi} \sin(\varphi_{pi}) - y_r - e_r \sin(\varphi_r) \end{cases} \quad (16)$$

啮合力方向通过啮合线与坐标轴 Oy 的夹角 ψ_{rpi} 判断。齿面啮合时, $\psi_{rpi} = \alpha_{rpi} + \gamma_{rpi}$; 齿背啮合时, $\psi_{rpi} = \alpha_{rpi} - \gamma_{rpi}$ 。

1.3 太阳轮-行星轮动态间隙

太阳轮-行星轮副间隙如图 4 所示, 其中: L_{spi} 为动态中心距; α_{spi} 为动态啮合角。

动态齿侧间隙为

$$2\tilde{b}_{spi} = \tilde{e}_{bpi} - \tilde{s}_{bs} + 2(r_{bs} + r_{bpi}) \text{inv } \alpha_{spi} \quad (17)$$

其中: \tilde{s}_{bs} 和 \tilde{e}_{bpi} 分别为公法线调整后太阳轮的基圆

齿厚和第 i 个行星轮的基圆齿槽宽; r_{bs} 和 r_{bpi} 分别为太阳轮和行星轮的基圆半径; inv x 为渐开线函数, $\text{inv } x = \tan x - x$ 。

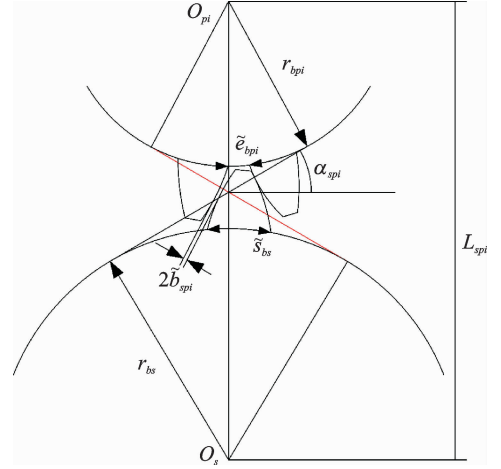


图 4 外啮合齿轮副齿侧间隙

Fig. 4 Illustration of external meshing backlash

由图 4 中几何关系和渐开线性质, 结合式(17)推导得到动态齿侧间隙为

$$2\tilde{b}_{spi} = 2b_{spi} + 2(r_{bs} + r_{bpi}) [\text{inv } \alpha_{spi} - \text{inv } \alpha'_{spi}] \quad (18)$$

其中: $2b_{spi}$ 为公法线调整引起齿侧间隙; α'_{spi} 为理论啮合角。

1.4 齿圈-行星轮动态间隙

齿圈-行星轮组成的内啮合齿轮副的齿侧间隙如图 5 所示, 其中: L_{rpi} 为动态中心距; α_{rpi} 为动态啮合角。由渐开线齿轮啮合原理可得动态齿侧间隙

$$2\tilde{b}_{rpi} = \tilde{e}_{br} - \tilde{s}_{bpi} + 2(r_{br} - r_{bpi}) \text{inv } \alpha_{rpi} \quad (19)$$

其中: \tilde{e}_{br} 和 \tilde{s}_{bpi} 分别为公法线调整后齿圈的基圆齿厚和行星轮的基圆齿槽宽; r_{br} 和 r_{bpi} 分别为齿圈和行星轮的基圆半径。

由图 5 中几何关系和渐开线性质, 结合式(19)推导得到动态齿侧间隙为

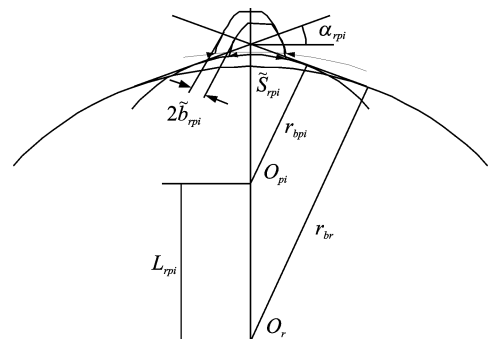


图 5 内啮合齿轮副齿侧间隙

Fig. 5 Illustration of internal meshing backlash

$$2\tilde{b}_{rpi} = 2b_{rpi} + 2(r_{br} - r_{bpi}) [\text{inv } \alpha_{rpi} - \text{inv } \alpha'_{rpi}] \quad (20)$$

其中: $2b_{rpi}$ 为公法线调整引起齿侧间隙; α'_{rpi} 为理论啮合角。

1.5 太阳-行星动态非线性啮合力

太阳轮啮合点压力角与转速关系如图6所示。坐标系 O_sxy 在太阳轮的理论中心位置, 坐标轴 Oy 始终指向行星轮的理论中心位置。旋转坐标系 $O_s\epsilon\eta$ 的中心在太阳轮的理论中心位置并随太阳轮旋转。由几何关系得太阳轮啮合点的压力角

$$\tan\alpha_{si} = -\int_{t_1}^t \omega_s dt + \tan\alpha_{spi0} \quad (21)$$

其中: α_{spi0} 为啮合周期起始时刻啮合点压力角; $t \in [t_1, t_2]$, t_1 为啮合周期起始时刻, t_2 为啮合周期终止时刻; ω_s 为行星架的旋转坐标系下太阳轮的相对转速, 定义逆时针为正, 顺时针为负。

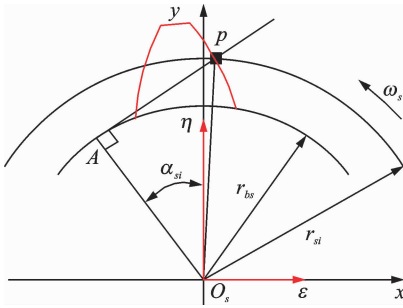


图6 啮合点速度分析

Fig. 6 Velocity analysis of meshing point

啮合刚度可表示为啮合点压力角的函数, 且式(21)得出啮合点压力角为中心距以及波动转速的函数。因此, 非线性动态啮合刚度 \tilde{k}_m 可表示为

$$\tilde{k}_{spi}(\alpha_{si}) = \tilde{k}_{spi}(L_{spi}, \omega_{spi}) = \begin{cases} k_{s1} + k_{s2} & (\alpha_b < \alpha_{si} \leq \alpha_a) \\ k_s & (\alpha_c < \alpha_{si} \leq \alpha_b) \end{cases} \quad (22)$$

其中: α_a , α_b 和 α_c 为单、双齿啮合边界条件, 由渐开线齿轮啮合原理得到; k_s 为单齿啮合区的啮合刚度; k_{s1} , k_{s2} 分别为双齿啮合区不同齿对的啮合刚度。

本研究采用解析法计算单对齿啮合刚度。将动态齿侧间隙和动态啮合刚度代替以往啮合模型中定常间隙和准静态周期时变啮合刚度, 可得太阳轮和行星轮之间动态啮合力为

$$F_{spi} = \tilde{k}_{spi} f(\tilde{b}_{spi}, \Delta_{spi1}, \Delta_{spi2}) + \tilde{c}_{spi} f_1(\tilde{b}_{spi}, \Delta_{spi1}, \Delta_{spi2}) \quad (23)$$

其中: \tilde{k}_{spi} 为动态啮合刚度; \tilde{b}_{spi} 为动态齿侧间隙;

\tilde{c}_{spi} 为啮合阻尼, $\tilde{c}_{spi} = \xi \sqrt{\tilde{k}_{spi} m_s m_{pi} / (m_s + m_{pi})}$, ξ 为阻尼系数; $f(\tilde{b}_{spi}, \Delta_{spi1}, \Delta_{spi2})$, $f_1(\tilde{b}_{spi}, \Delta_{spi1}, \Delta_{spi2})$ 分别为关于间隙和速度的分段函数, 具有非线性。

f 和 f_1 的表达式分别为

$$f(\tilde{b}_{spi}, \Delta_{spi1}, \Delta_{spi2}) = \begin{cases} \Delta_{spi1} - \tilde{b}_{spi} & (\Delta_{spi1} > \tilde{b}_{spi}) \\ 0 & (\Delta_{spi1} \leq \tilde{b}_{spi}, \Delta_{spi2} \leq \tilde{b}_{spi}) \\ \Delta_{spi2} - \tilde{b}_{spi} & (\Delta_{spi2} > \tilde{b}_{spi}) \end{cases} \quad (24)$$

$$f_1(\tilde{b}_{spi}, \Delta_{spi1}, \Delta_{spi2}) = \begin{cases} \dot{\Delta}_{spi1} & (\Delta_{spi1} > \tilde{b}_{spi}) \\ 0 & (\Delta_{spi1} \leq \tilde{b}_{spi}, \Delta_{spi2} \leq \tilde{b}_{spi}) \\ \dot{\Delta}_{spi2} & (\Delta_{spi2} > \tilde{b}_{spi}) \end{cases} \quad (25)$$

其中: Δ_{spij} 和 $\dot{\Delta}_{spij}$ 分别为动态传递误差和动态传递误差的1阶导数; $j=1$ 代表齿面啮合, $j=2$ 代表齿背啮合。

动态传递误差分别为

$$\Delta_{spi1} = (x_s - x_c - x_{pi}) \sin(\alpha_{spi} - \gamma_{spi}) + (y_s - y_c - y_{pi}) \cos(\alpha_{spi} - \gamma_{spi}) + \theta_{zs} R_s - \theta_{xp} R_s - \theta_{pi} R_{zpi} + E_{spi} \quad (26)$$

$$\Delta_{spi2} = (x_s - x_c - x_{pi}) \sin(\alpha_{spi} + \gamma_{spi}) - (y_s - y_c - y_{pi}) \cos(\alpha_{spi} + \gamma_{spi}) - \theta_{zs} R_s + \theta_{xp} R_s + \theta_{pi} R_{zpi} + E_{spi} \quad (27)$$

其中: γ_{spi} 为齿轮位置角; α_{spi} 为动态啮合角; E_{spi} 为由齿形误差等引起的齿形偏差。

1.6 齿圈-行星轮动态非线性啮合力

行星轮啮合点压力角与转速的关系如图7所示。坐标系 O_{pxy} 原点在行星轮的理论中心位置, 坐标轴 Oy 反向始终指向齿圈的理论中心位置, 旋转坐标系 $O_{p\epsilon\eta}$ 的中心为行星轮的理论中心位置并随行星轮旋转。由几何关系得任意时刻行星轮啮合点的压力角为

$$\tan\alpha_{pi} = -\int_{t_1}^t \omega_{pi} dt + \tan\alpha_{rpi0} \quad (28)$$

其中: α_{rpi0} 为啮合周期起始时刻啮合点压力角; $t \in [t_1, t_2]$, t_1 为啮合周期起始时刻, t_2 为啮合周期终止时刻; ω_{pi} 为行星架的旋转坐标系下行星轮的自转速度, 定义逆时针为正, 顺时针为负。

结合渐开线齿轮的啮合原理、动态中心距和动态啮合角可推导得出齿圈啮合点压力角

$$\tan\alpha_r = \frac{L_{rpi}}{r_{br} \sin\alpha_{rpi}} + \frac{r_{bpi} - r_{br}}{r_{br} \tan\alpha_{rpi}} + \frac{r_{bpi} \tan\alpha_{pi}}{r_{br}} \quad (29)$$

通过式(28)、式(29)可确定齿面或齿背啮合状

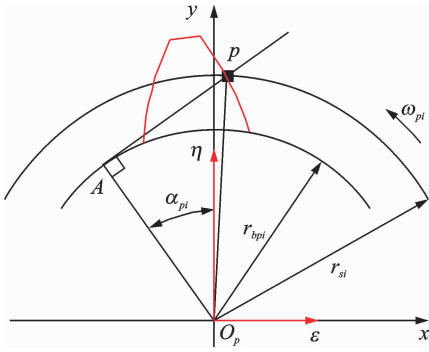


图 7 啮合点速度分析

Fig. 7 Velocity analysis of meshing point

态任意参与啮合轮齿的啮合点压力角。

对于齿圈和行星轮组成的内啮合副,采用解析法计算啮合刚度,单齿啮合刚度计算公式为

$$k_s(\alpha_{pi}) = \frac{1}{\delta_{Br}(\alpha_{pi}) + \delta_{Mr}(\alpha_{pi}) + \delta_{Bpi}(\alpha_{pi}) + \delta_{Mpi}(\alpha_{pi}) + \delta_C} \quad (30)$$

其中: δ_{Br} 和 δ_{Bpi} 分别为齿圈和第 i 个行星轮轮齿本身的变形; δ_{Mr} 和 δ_{Mpi} 分别为齿圈和第 i 个行星轮轮体的附加变形; δ_C 为轮齿之间的接触变形。

将动态齿侧间隙和动态啮合刚度代替以往啮合模型中定常间隙和准静态周期时变啮合刚度,可得齿圈和行星轮之间动态啮合力为

$$F_{rpi} = \bar{k}_{rpi} f(\bar{b}_{rpi}, \Delta_{rpi1}, \Delta_{rpi2}) + \bar{c}_{rpi} f_1(\bar{b}_{rpi}, \Delta_{rpi1}, \Delta_{rpi2}) \quad (31)$$

其中: \bar{k}_{rpi} 为动态啮合刚度; \bar{b}_{rpi} 为动态齿侧间隙; \bar{c}_{rpi} 为啮合阻尼, $\bar{c}_{rpi} = \xi \sqrt{\bar{k}_{rpi} m_r m_{pi} / (m_r + m_{pi})}$, ξ 为啮合阻尼系数; $f(\bar{b}_{rpi}, \Delta_{rpi1}, \Delta_{rpi2})$, $f_1(\bar{b}_{rpi}, \Delta_{rpi1}, \Delta_{rpi2})$ 分别为间隙和速度非线性函数。

f 和 f_1 的表达式分别为

$$f(\bar{b}_{rpi}, \Delta_{rpi1}, \Delta_{rpi2}) = \begin{cases} \Delta_{rpi1} - \bar{b}_{rpi} & (\Delta_{rpi1} > \bar{b}_{rpi}) \\ 0 & (\Delta_{rpi1} \leq \bar{b}_{rpi}, \Delta_{rpi2} \leq \bar{b}_{rpi}) \\ \Delta_{rpi2} - \bar{b}_{rpi} & (\Delta_{rpi2} > \bar{b}_{rpi}) \end{cases} \quad (32)$$

$$f_1(\bar{b}_{rpi}, \Delta_{rpi1}, \Delta_{rpi2}) = \begin{cases} \dot{\Delta}_{rpi1} & (\Delta_{rpi1} > \bar{b}_{rpi}) \\ 0 & (\Delta_{rpi1} \leq \bar{b}_{rpi}, \Delta_{rpi2} \leq \bar{b}_{rpi}) \\ \dot{\Delta}_{rpi2} & (\Delta_{rpi2} > \bar{b}_{rpi}) \end{cases} \quad (33)$$

其中: Δ_{rpij} 和 $\dot{\Delta}_{rpij}$ 分别为动态传递误差和动态传递误差的 1 阶导数; $j=1$ 代表齿面啮合, $j=2$ 代表齿背啮合。

$\Delta_{rpi1} > \bar{b}_{rpi}$ 为齿面啮合状态,若 $\Delta_{rpi2} > \bar{b}_{rpi}$ 为齿背啮合状态,否则为脱齿状态。动态传递误差分别为

$$\Delta_{rpi1} = (x_r - x_c - x_{pi}) \sin(\alpha_{rpi} + \gamma_{rpi}) - (y_r - y_c - y_{pi}) \cos(\alpha_{rpi} + \gamma_{rpi}) + \theta_{zpi} R_{pi} - \theta_{zr} R_r - \theta_{zc} R_c + E_{rpi} \quad (34)$$

$$\Delta_{rpi2} = (x_r - x_c - x_{pi}) \sin(\alpha_{rpi} - \gamma_{rpi}) + (y_r - y_c - y_{pi}) \cos(\alpha_{rpi} - \gamma_{rpi}) - \theta_{zpi} R_{pi} + \theta_{zr} R_r + \theta_{zc} R_c + E_{rpi} \quad (35)$$

其中: γ_{rpi} 为齿轮位置角; α_{rpi} 为动态啮合角; E_{rpi} 为齿形误差。

2 行星齿轮系统非线性动力学模型

通过拉格朗日方程建立系统动力学模型。动能函数包括太阳轮、齿圈、行星轮和行星架的动能函数,势能函数包含行星架与各行星轮之间的势能函数,而耗能函数等于 0,未考虑传动轴和轴承等弹性元件。非保守力包括行星齿轮传动的内、外啮合齿轮副在齿面啮合、齿背啮合交替变化时产生的动态啮合力。结合图 2 和图 3,分别针对齿面、齿背啮合状态进行受力分析,将作用于太阳轮、齿圈和第 i 个行星轮各广义坐标上的非保守广义力组成列向量 \mathbf{Q} , \mathbf{Q}_r 和 \mathbf{Q}_{pi} 。将动能函数、势能函数和非保守力带入拉格朗日方程得出行星系统动力学方程。

太阳轮动力学方程为

$$\begin{cases} m_s \ddot{x}_s - m_s e_s \dot{\theta}_{zs}^2 \cos(\theta_{zs} + \varphi_{s0}) - m_s e_s \ddot{\theta}_{zs} \sin(\theta_{zs} + \varphi_{s0}) = \sum_{i=1}^N F_{spi} \sin(\alpha_{spi} - \Gamma_{spi} \gamma_{spi}) \\ m_s \ddot{y}_s - m_s e_s \dot{\theta}_{zs}^2 \sin(\theta_{zs} + \varphi_{s0}) + m_s e_s \ddot{\theta}_{zs} \cos(\theta_{zs} + \varphi_{s0}) = \sum_{i=1}^N \Gamma_{spi} F_{spi} \cos(\alpha_{spi} - \Gamma_{spi} \gamma_{spi}) \\ (I_{zs} + m_s e_s^2) \ddot{\theta}_{zs} - m_s \ddot{x}_s e_s \sin(\theta_{zs} + \varphi_{s0}) + m_s \ddot{y}_s e_s \cos(\theta_{zs} + \varphi_{s0}) = -r_{ts} \sum_{i=1}^N \Gamma_{spi} F_{spi} \end{cases} \quad (36)$$

齿圈动力学方程为

$$\begin{cases} m_r \ddot{x}_r - m_r e_r \dot{\theta}_{zr}^2 \cos(\theta_{zr} + \varphi_{r0}) - m_r e_r \ddot{\theta}_{zr} \sin(\theta_{zr} + \varphi_{r0}) = - \sum_{i=1}^N F_{rpi} \sin(\alpha_{rpi} + \Gamma_{rpi} \gamma_{rpi}) \\ m_r \ddot{y}_r - m_r e_r \dot{\theta}_{zr}^2 \sin(\theta_{zr} + \varphi_{r0}) + m_r e_r \ddot{\theta}_{zr} \cos(\theta_{zr} + \varphi_{r0}) = \sum_{i=1}^N \Gamma_{rpi} F_{rpi} \cos(\alpha_{rpi} + \Gamma_{rpi} \gamma_{rpi}) \\ (I_{zr} + m_r e_r^2) \ddot{\theta}_{zr} - m_r \ddot{x}_r e_r \sin(\theta_{zr} + \varphi_{r0}) + m_r \ddot{y}_r e_r \cos(\theta_{zr} + \varphi_{r0}) = -r_{br} \sum_{i=1}^N \Gamma_{rpi} F_{rpi} \end{cases} \quad (37)$$

行星架动力学方程为

$$m_c \ddot{x}_c - m_c e \dot{\theta}_{zc}^2 \cos(\theta_{zc} + \varphi_{c0}) - m_c e \ddot{\theta}_{zc} \sin(\theta_{zc} + \varphi_{c0}) + \sum_{i=1}^N m_{pi} [\ddot{x}_c - r_c \ddot{\theta}_{zc} \sin(\theta_{zc} + \varphi_{pi0}) - r_c \dot{\theta}_{zc}^2 \cos(\theta_{zc} + \varphi_{pi0}) + \ddot{x}_{pi} - e_{pi} \ddot{\theta}_{zpi} \sin(\theta_{zpi} + \varphi_{pi0}) - e_{pi} \dot{\theta}_{zpi}^2 \sin(\theta_{zpi} + \varphi_{pi0})] + \sum_{i=1}^N F_{xspi} = 0 \tag{38a}$$

$$m_c \ddot{y}_c - m_c e \dot{\theta}_{zc}^2 \sin(\theta_{zc} + \varphi_{c0}) + m_c e \ddot{\theta}_{zc} \cos(\theta_{zc} + \varphi_{c0}) + \sum_{i=1}^N m_{pi} [\ddot{y}_c + r_c \dot{\theta}_{zc} \cos(\theta_{zc} + \varphi_{pi0}) - r_c \dot{\theta}_{zc}^2 \sin(\theta_{zc} + \varphi_{pi0}) + \ddot{y}_{pi} + e_{pi} \ddot{\theta}_{zpi} \cos(\theta_{zpi} + \varphi_{pi0}) - e_{pi} \dot{\theta}_{zpi}^2 \sin(\theta_{zpi} + \varphi_{pi0})] + \sum_{i=1}^N F_{yspi} = 0 \tag{38b}$$

$$I_{xc} \ddot{\theta}_{zc} - \sum_{i=1}^N m_{pi} r_c \dot{\theta}_{zc} \cos(\theta_{zc} + \varphi_{pi0}) (\dot{x}_c + \dot{x}_{pi}) - \sum_{i=1}^N m_{pi} r_c \dot{\theta}_{zc} \sin(\theta_{zc} + \varphi_{pi0}) (\dot{y}_c + \dot{y}_{pi}) + \sum_{i=1}^N m_{pi} r_c^2 \ddot{\theta}_{zc} - \sum_{i=1}^N m_{pi} r_c \sin(\theta_{zc} + \varphi_{pi0}) [\ddot{x}_c + \ddot{x}_{pi} - e_{pi} \ddot{\theta}_{zpi} \sin(\theta_{zpi} + \varphi_{pi0})] + \sum_{i=1}^N m_{pi} r_c \cos(\theta_{zc} + \varphi_{pi0}) [\ddot{y}_c + \ddot{y}_{pi} + e_{pi} \ddot{\theta}_{zpi} \cos(\theta_{zpi} + \varphi_{pi0})] - r_c \sum_{i=1}^N \sin(\varphi_{pi}) F_{xspi} + r_c \sum_{i=1}^N \cos(\varphi_{pi}) F_{yspi} = 0 \tag{38c}$$

第 i 个行星轮动力学方程为

$$m_{pi} \ddot{x}_{pi} - m_{pi} e_{pi} \dot{\theta}_{zpi}^2 \cos(\theta_{zpi} + \varphi_{pi0}) - m_{pi} e_{pi} \ddot{\theta}_{zpi} \sin(\theta_{zpi} + \varphi_{pi0}) + m_{pi} \ddot{x}_c - m_{pi} r_c \dot{\theta}_{zc}^2 \cos(\theta_{zc} + \varphi_{pi0}) - m_{pi} r_c \ddot{\theta}_{zc} \sin(\theta_{zc} + \varphi_{pi0}) - F_{xspi} = -F_{spi} \sin(\alpha_{spi} - \Gamma_{spi} \gamma_{spi}) + F_{rpi} \sin(\alpha_{rpi} + \Gamma_{rpi} \gamma_{rpi}) \tag{39a}$$

$$m_{pi} \ddot{y}_{pi} - m_{pi} e_{pi} \dot{\theta}_{zpi}^2 \sin(\theta_{zpi} + \varphi_{pi0}) + m_{pi} e_{pi} \ddot{\theta}_{zpi} \cos(\theta_{zpi} + \varphi_{pi0}) + m_{pi} \ddot{y}_c - m_{pi} r_c \dot{\theta}_{zc}^2 \sin(\theta_{zc} + \varphi_{pi0}) + m_{pi} r_c \ddot{\theta}_{zc} \cos(\theta_{zc} + \varphi_{pi0}) - F_{yspi} = -\Gamma_{spi} F_{spi} \cos(\alpha_{spi} - \Gamma_{spi} \gamma_{spi}) - \Gamma_{rpi} F_{rpi} \cos(\alpha_{rpi} + \Gamma_{rpi} \gamma_{rpi}) \tag{39b}$$

$$(I_{zpi} + m_{pi} e_{pi}^2) \ddot{\theta}_{zpi} - e_{pi} \dot{\theta}_{zpi} \cos(\theta_{zpi} + \varphi_{pi0}) (\dot{x}_{pi} + \dot{x}_c - r_c \dot{\theta}_{zc} \sin(\theta_{zc} + \varphi_{pi0})) - e_{pi} \sin(\theta_{zpi} + \varphi_{pi0}) (\ddot{x}_{pi} + \ddot{x}_c - r_c \ddot{\theta}_{zc} \sin(\theta_{zc} + \varphi_{pi0}) - r_c \dot{\theta}_{zc}^2 \cos(\theta_{zc} + \varphi_{pi0})) - e_{pi} \dot{\theta}_{zpi} \sin(\theta_{zpi} + \varphi_{pi0}) (\dot{y}_{pi} + \dot{y}_c + r_c \dot{\theta}_{zc} \cos(\theta_{zc} + \varphi_{pi0})) + e_{pi} \cos(\theta_{zpi} + \varphi_{pi0}) (\ddot{y}_{pi} + \ddot{y}_c + r_c \ddot{\theta}_{zc} \cos(\theta_{zc} + \varphi_{pi0}) - r_c \dot{\theta}_{zc}^2 \sin(\theta_{zc} + \varphi_{pi0})) = r_{bpi} (\Gamma_{spi} F_{spi} + \Gamma_{rpi} F_{rpi}) \tag{39c}$$

上式中 F_{xspi} 和 F_{yspi} 如下

$$\begin{cases} F_{xspi} = k_{xspi} [(x_c - x_{pi}) - r_c (\theta_{zc} - \bar{\theta}_{zc}) \sin(\varphi_{pi})] \\ F_{yspi} = k_{yspi} [(y_c - y_{pi}) + r_c (\theta_{zc} - \bar{\theta}_{zc}) \cos(\varphi_{pi})] \end{cases} \tag{40}$$

其中： F_{spi} 和 F_{rpi} 分别为太阳轮和齿圈与第 i 个行星轮之间的动态啮合力；齿面啮合状态时， $\Gamma_{spi} = \Gamma_{rpi} = 1$ ；齿背啮合状态时， $\Gamma_{spi} = \Gamma_{rpi} = -1$ ； α_{spi} 和 α_{rpi} 为动态啮合角； γ_{spi} 和 γ_{rpi} 为相对位置角。

非线性动力学模型与非线性动态啮合模型反馈计算流程如图 8 所示。

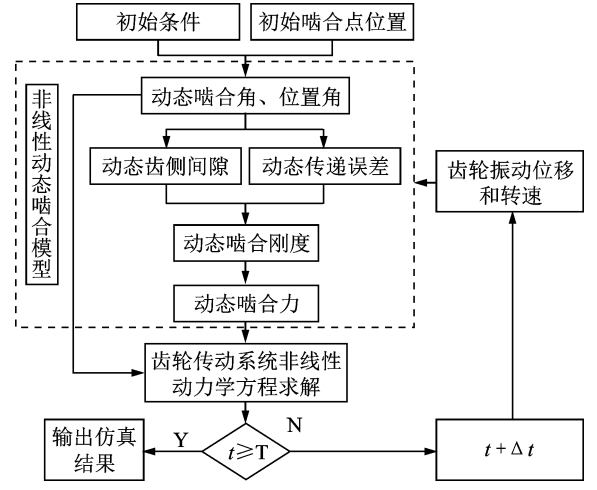


图 8 计算流程

Fig. 8 Simulation flowchart

3 行星齿轮系统试验验证

针对单排行星齿轮传动试验装置分别进行数值仿真和试验测试，试验及模型中齿轮均未进行变位，且各齿轮参数如表 1 所示。

表 1 单级行星齿轮传动参数表

Tab. 1 Parameters of planetary gears

	太阳轮	行星轮	齿圈	行星架
齿数	41	17	73	—
模数/mm	3	3	3	3
齿宽/mm	25	25	65	—
压力角/(°)	20	20	20	20

行星齿轮传动试验台布置如图 9 所示。

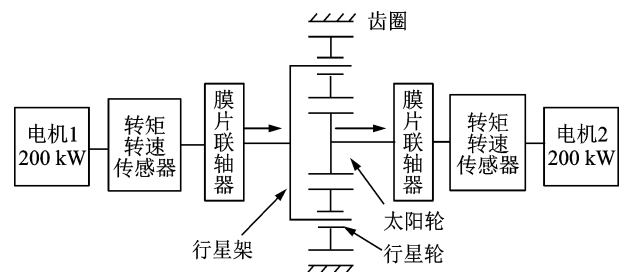


图 9 单排行星齿轮传动试验台布置示意图

Fig. 9 Test diagram of planetary transmission

3.1 测试原理

3.1.1 齿圈齿根应变测试原理

在齿圈端面上选择 8 个轮齿作为测点,每两个相邻轮齿作为 1 组,各组工作片的相对位置相同且相距 90°,温度补偿片的位置在靠近工作片的齿圈外侧,应变片的连接桥路采用单臂半桥方式连接。齿圈应变片粘贴图和连接桥路如图 10 所示。

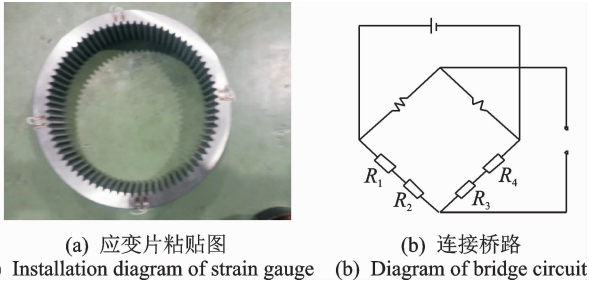


图 10 齿圈应变片粘贴图和连接桥路
Fig. 10 Installation diagram of strain gauge and diagram of bridge circuit

当行星轮通过齿圈上测点时,会引起相应齿根处的应变片产生短时信号。对于每一个测点而言,在行星架旋转 1 圈的过程中(运动周期),每个测点存在 4 段短时信号。单个运动周期,第 i 个短时信号内,各测点的 4 个啮合位置的齿根应变最大值分别为 ϵ_{1i}^{maxr} , ϵ_{2i}^{maxr} , ϵ_{3i}^{maxr} 和 ϵ_{4i}^{maxr} ,则行星齿轮传动第 i 个短时信号内的内啮合均载系数定义为

$$Lsf_i = \frac{4 \max(\epsilon_{1i}^{maxr}, \epsilon_{2i}^{maxr}, \epsilon_{3i}^{maxr}, \epsilon_{4i}^{maxr})}{\epsilon_{1i}^{maxr} + \epsilon_{2i}^{maxr} + \epsilon_{3i}^{maxr} + \epsilon_{4i}^{maxr}} \quad (41)$$

由采集时间内各短时信号内啮合均载系数,可得采集时间内的内啮合均载系数最大值为

$$Lsf_{max} = \max_{i=1}^N (Lsf_i) \quad (42)$$

其中: N 为采集时间内所包含的短时信号的个数。

3.1.2 齿圈横向振动位移

在箱体的侧辅板上安装 1 个电涡流位移传感器,测试齿圈的横向振动位移,如图 11 所示。位移传感器信号线通过箱盖上预留的导线孔伸出与控制器相联,从控制器出来的信号线再与数采前端连接。

3.2 测试结果分析

静态条件下,电涡流位移传感器前端距齿圈表面 0.8mm 左右。输入转速为 1kr/min,输入转矩分别为 28 和 57N·m 时,电涡流位移传感器试验结果如图 12 和图 13 所示。由图可知,传感器端面最远距离齿圈表面 0.9mm 左右,最近距离齿圈表面

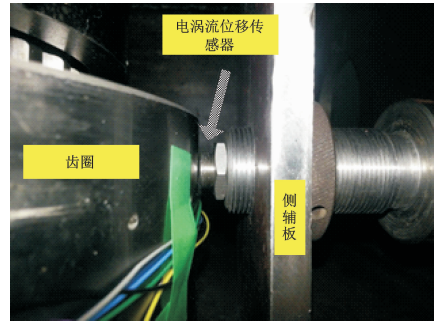


图 11 电涡流位移传感器安装图
Fig. 11 Installation diagram of eddy current displacement sensor

0.7mm 左右,即齿圈的振动位移在 0.2mm 左右。结合频谱图,齿圈的横向振动位移的频率成分主要在 0~200Hz 范围内,包含输入和输出端转频及转频的倍频,同时存在一些无法分析原因的频率成分。

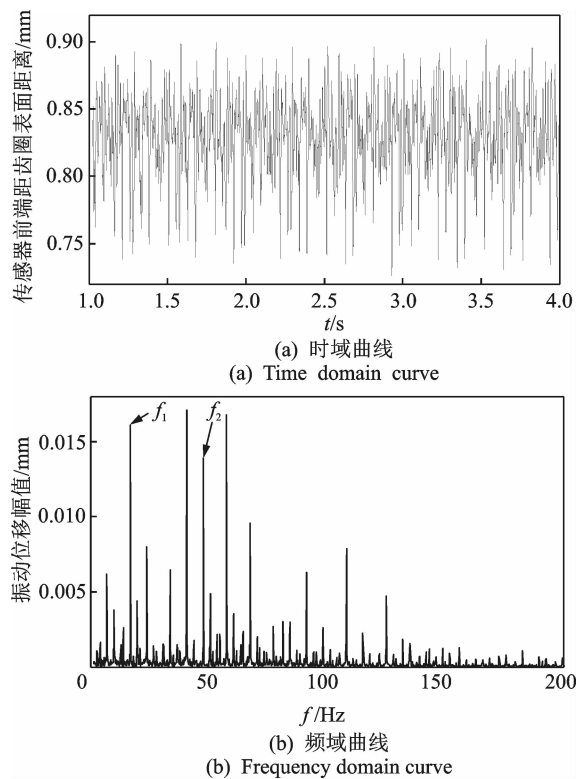
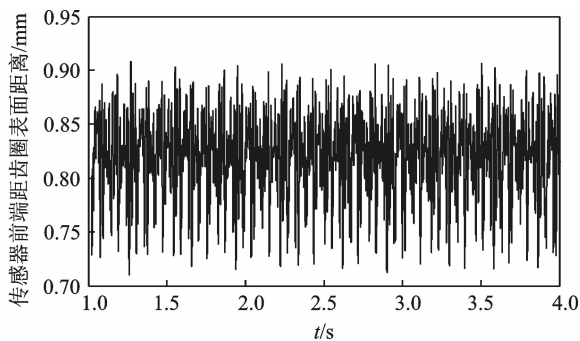


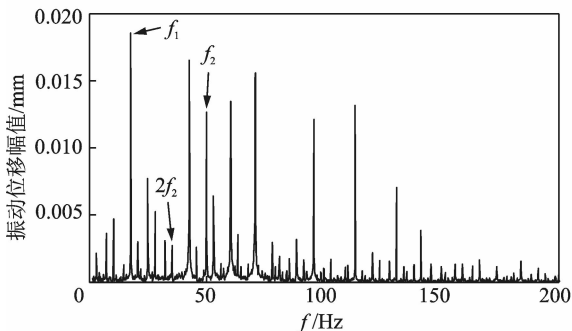
图 12 齿圈振动位移(28N·m, 1kr/min)
Fig. 12 Vibration displacement of ring(28N·m, 1kr/min)

输入转速为 3.5kr/min,输入转矩分别为 28 和 57N·m 时,位移传感器试验结果如图 14 和图 15 所示。由图可知,齿圈振动位移幅值在 0.25mm 左右,较转速 1kr/min 下的振动位移增加了 0.05mm 左右。结合频谱图,由于转速增加,齿圈的横向振动位移的频带变宽,频率成分主要集中在 0~600Hz 范围内,主要包含太阳轮和行星架的转频及转频的



(a) 时域曲线

(a) Time domain curve

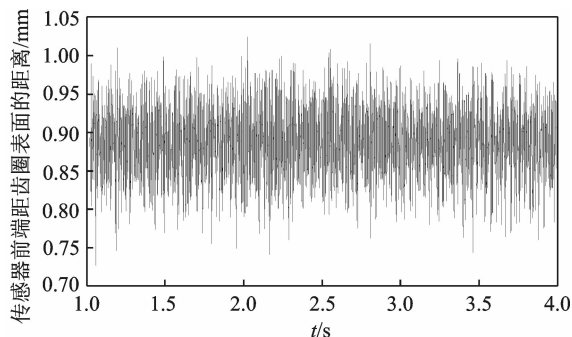


(b) 频域曲线

(b) Frequency domain curve

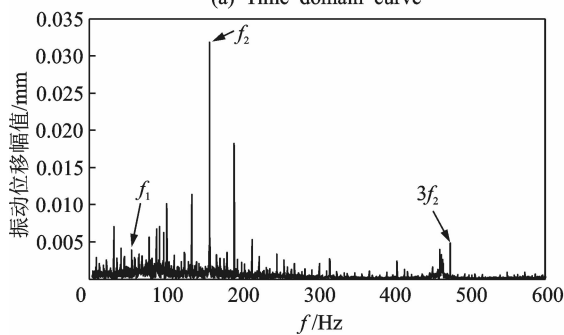
图 13 齿圈振动位移(57N·m, 1kr/min)

Fig. 13 Vibration displacement of ring(57N·m, 1kr/min)



(a) 时域曲线

(a) Time domain curve

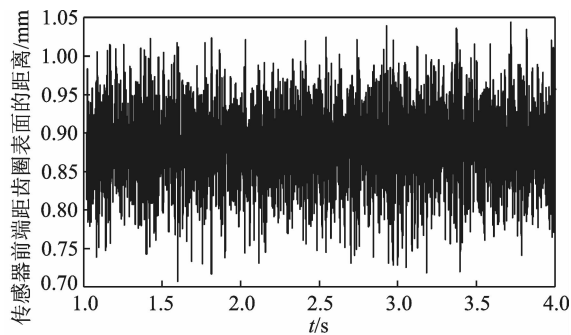


(b) 频域曲线

(b) Frequency domain curve

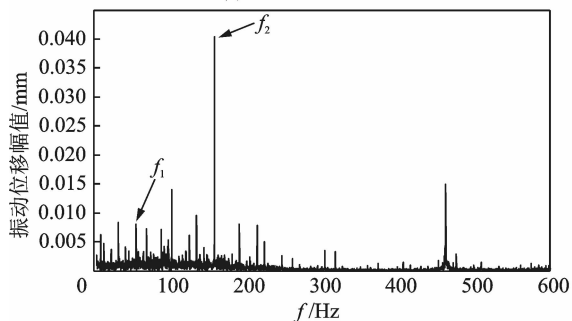
图 15 齿圈振动位移(57N·m, 3.5kr/min)

Fig. 15 Vibration displacement of ring(57N·m, 3.5kr/min)



(a) 时域曲线

(a) Time domain curve



(b) 频域曲线

(b) Frequency domain curve

图 14 齿圈振动位移(28N·m, 3.5kr/min)

Fig. 14 Vibration displacement of ring(28N·m, 3.5kr/min)

峰值, 将其与仿真计算结果进行对比。仿真结果与试验结果及两者之间的误差如表 2 所示。由表可知, 随着转速和转矩的变化, 仿真结果与试验结果均无明显变化趋势, 且二者之间的最大相对误差为 18.78%。

表 2 齿圈横向振动位移峰峰值

Tab. 2 Peak-to-peak value of ring lateral vibration displacement

输入转速/ (kr·min ⁻¹)	输入转矩 28N·m			输入转矩 57N·m		
	试验值	仿真值	误差%	试验值	仿真值	误差%
0.5	0.185	0.158	-14.54	0.205	0.173	-15.43
1.0	0.177	0.171	-3.24	0.198	0.178	-10.29
1.5	0.148	0.165	11.48	0.138	0.152	10.14
2.0	0.169	0.175	3.59	0.151	0.161	6.67
2.5	0.186	0.160	-13.97	0.146	0.123	-15.75
3.0	0.161	0.160	-0.52	0.200	0.167	-16.60
3.5	0.372	0.325	-12.63	0.330	0.268	-18.78

对于振动位移, 仿真结果与试验结果之间产生误差的主要原因包括: a. 电涡流位移传感器并非严格对准齿圈中心; b. 仿真中齿圈简化为刚体, 实际上在受力状态下齿圈会产生弹性变形; c. 在测量过程中箱体辅板上的电涡流传感器会随着箱体的振动而振动。

由齿圈各测点的应变测试结果, 结合式(41)和

倍频, 同样存在一些无法分析出原因的频率成分。

根据齿圈横向振动位移的试验结果, 计算其峰

式(42)得到内啮合均载系数,将其与仿真计算结果进行对比。不同工况下内啮合均载系数的仿真结果与试验结果及误差如表3所示。由表可以看出,随着转速和转矩的变化,内啮合均载系数均无明显变化趋势。仿真结果与试验结果的最大相对误差为18.51%。

表3 内啮合均载系数对比分析

Tab. 3 Comparison of internal meshing load coefficients

输入转速/ (kr · min ⁻¹)	输入转矩 28N · m			输入转矩 57N · m		
	试验值	仿真值	误差%	试验值	仿真值	误差%
0.5	1.377	1.238	-10.13	1.376	1.229	-10.65
1.0	1.700	1.591	-6.44	1.707	1.622	-4.93
1.5	1.631	1.587	-2.66	1.631	1.453	-10.90
2.0	1.581	1.502	-4.99	1.639	1.573	-3.98
2.5	2.090	1.809	-13.44	1.965	1.765	-10.16
3.0	1.555	1.776	14.19	1.524	1.242	-18.51
3.5	2.151	1.977	-8.08	2.109	2.141	1.50

对于均载系数,造成仿真结果与试验结果之间产生误差的主要原因包括:a.由于采集系统通道数量,无法在每个齿根进行贴片,测试结果仅为几个离散位置的结果;b.不同应变片之间的粘贴方向无法完全相同;c.应变片的粘贴工艺、连接导线的阻抗和应变仪自身测量误差都对测试信号形成干扰。

4 结论

1) 针对行星齿轮传动系统,分析了几何偏心、中心距偏差和横向位移引起的中心距变化对啮合角和间隙的影响,分析了齿轮的转速波动、齿轮中心距变化对啮合点位置的影响。分别针对太阳轮-行星轮与齿圈-行星轮提出了齿轮啮合动态模型,推导出齿轮中心距变化对啮合刚度、啮合力的影响。考虑中心距变化、陀螺力矩并结合齿轮啮合动态模型,采用拉格朗日法推导出行星齿轮横-扭耦合非线性动力学模型。

2) 针对单排行星齿轮传动试验装置,开展了振动特性试验研究。对比分析了多个稳态工况下齿轮传动系统中齿圈横向振动位移和内啮合均载系数的数值仿真结果与试验结果,并分析了可能导致仿真结果与试验结果之间产生误差的原因。结果表明,随着转速的增大,齿圈横向振动位移频带变宽,频率成分分布范围更广,且仿真结果与试验结果值均无明显波动,二者的变化趋势基本吻合,其误差在可接受范围内,从而验证了所提出的渐开线直齿轮传动横-扭耦合非线性动力学模型和非线性动态啮合模

型的正确性。

参 考 文 献

- [1] 李润方,王建军. 齿轮系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1996:132-133.
- [2] Ozguven H N, Houser D R. Mathematical models used in gear dynamics—a review[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 121:383-411.
- [3] Wang Jianjun, Li Runfang, Peng Xianghe. Survey of nonlinear vibration of gear transmission systems[J]. Applied Mechanics Reviews, 2003, 56(3):222-227.
- [4] Umezawa K, Houjoh H, Matsumura S, et al. Experimental investigation on modal behavior of a helical gear units with various ratio[C]//Proceedings of the ASME Power Transmission and Gearing Conference. San Diego:[s. n.], 1996:509-517.
- [5] Kahraman A, Singh R. Interactions between time varying mesh stiffness and backlash non-linearity in a geared system[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 146: 135-156.
- [6] 董海军,沈允文,高志英,等. 转速激励下齿轮系统拍击振动的分岔特性[J]. 机械工程学报, 2006, 42(2):169-172.
Dong Haijun, Shen Yunwen, Gao Zhiying, et al. Bifurcation character of rattling in the gear system under the excitation of the rotational speed fluctuation [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(2): 169-172. (in Chinese)
- [7] Walha L, Fakhfakh T, Haddar M. Nonlinear dynamics of a two-stage gear system with mesh stiffness fluctuation, bearing exibility and backlash[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44:1058-1069.
- [8] 崔亚辉,刘占生,叶建槐. 齿轮-转子耦合系统的动态响应及齿侧间隙对振幅跳跃特性的影响[J],机械工程学报,2009,45(7):7-15.
Cui Yahui, Liu Zhansheng, Ye Jianhuai. Dynamic response of geared rotor system and the effect of clearance on jump characteristics of amplitude[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009,45(7):7-15. (in Chinese)
- [9] Chen Z G, Shao Y M, Lim T C. Nonlinear dynamic simulation of gear response under the idling condition [J]. International Journal of Automotive Technology, 2012, 13:541-552.
- [10] Kim W, HeeYoo H, Chung J. Dynamic analysis for a pair of spur gears with translational motion due to bearing deformation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329: 4409-4421.
- [11] Chen Siyu, Tang Jinyuan, Luo Caiwang, et al. Non-linear dynamic characteristics of geared rotor bearing systems with dynamic backlash and friction[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46:466-478.



第一作者简介:刘辉,女,1975年10月生,教授、博士生导师。主要研究方向为车辆动力学。曾发表《A generalized dynamic model of geared system: establishment and application》(《International Journal of Computational Intelligence System》2011, Vol. 4, No. 6)等论文。

E-mail:lh@bit.edu.cn