

# 考虑模型偏差的结构动力学模型修正<sup>\*</sup>

陈学前<sup>1,2</sup>, 沈展鹏<sup>1,2</sup>, 刘信恩<sup>1,2</sup>

(1. 中国工程物理研究院总体工程研究所 绵阳, 621999) (2. 工程材料与结构冲击振动四川省重点实验室 绵阳, 621999)

**摘要** 针对结构有限元模型修正后仍可能存在模型偏差的问题, 提出用待修正参数的不确定性来表征模型偏差的有限元模型修正方法。首先, 基于响应面方法识别得到待修正参数的最优值, 并通过计算结果与试验结果比较获得模型偏差; 然后, 基于响应面模型并结合灵敏度分析计算得到模型偏差对待修正参数的影响, 从而得到考虑模型偏差后待修正参数的区间; 最后, 通过一个悬臂梁工程实例的模型修正, 验证了笔者所提出方法的可行性。结果表明, 考虑模型偏差的修正可以提高模型可靠性。

**关键词** 响应面模型; 模型偏差; 模型修正; 灵敏度分析

**中图分类号** O325; TP306; TH113.1

## 引言

可靠的动力学模型对于结构的动力响应预测和结构动态设计都具有十分重要的意义。因此, 常常需要根据结构振动或模态试验结果对结构的有限元模型进行修正, 使修正后的模型可作为基准有限元模型对其进行后期的健康检测与评估, 以便能更好服务结构的工程设计。为此, 有限元建模与修正技术在过去 30 多年取得了长足的发展<sup>[1-6]</sup>。有限元模型修正过程是一个结构参数识别和确认的优化过程, 每一次迭代都需要调用有限元程序对结构重新进行计算, 针对复杂结构, 计算量大, 直接调用有限元分析的优化不易于工程实际应用, 为此, 相关学者提出了基于各种代理模型的有限元模型修正方法<sup>[6-11]</sup>, 可以大大提高修正效率, 增加有限元模型修正的工程适用性。但是, 由于有限元模型修正是个参数识别的优化过程, 因试验结果偏差或结构建模偏差的存在, 实际优化过程中可能存在目标函数不完全趋近于零的情况, 最终优化后的目标函数可能是某个小的值, 如果基于该模型对结构的响应进行预测评估, 总会使人们心存疑虑。总的来说, 工程中不存在一个完美模型来描述其物理实际, 为此, 近年来有学者开始关注考虑模型偏差的有限元模型修正与预测<sup>[12-16]</sup>, 使得模型偏差能在模型预测中得到体

现, 从而增强模型的预测能力, 以便更好为决策服务。但是, 目前考虑模型偏差的模型修正与预测更多侧重于模型偏差的建模与预测, 即通过已知确认试验数据获取确认域的模型偏差, 并据此建立全域里的模型偏差模型, 以获取预测位置处的模型偏差。这种考虑模型偏差的模型修正方法在实际工程中存在一定缺陷, 如确认域的结构与预测域的结构不一致时, 此时由于需要将模型偏差在结构空间跨层传播到预测域, 由于建立模型偏差在结构空间跨层传播模型时存在较大困难, 目前研究较少。

笔者提出用待修正参数的不确定性来表征模型偏差, 使得模型偏差对预测结果的影响可以方便地通过待修正参数的传播实现其在参数空间内插/外推预测以及结构空间的跨层传播。为提高模型修正效率, 采用多项式响应面模型完成结构传统确定性的模型修正, 得到待修正参数的最优值, 并基于灵敏度分析与响应面模型, 识别得到模型偏差对待修正参数的影响。最后, 通过悬臂梁模型修正实例对所提出的方法进行了验证。根据不确定性的一般分类, 结构系统中的不确定性大致可以分参数不确定性和模型形式不确定性(即模型偏差)<sup>[17]</sup>。本模型修正得到系统待修正参数用区间表征, 在表征形式上与考虑系统中各参数不确定性的有限元模型修正结果类似, 但意义不同。考虑系统中各参数不确定性的有限元模型修正中, 待修正参数表征的是系统

<sup>\*</sup> 科学挑战专题资助项目(TZ2018007); 科技部“高性能计算”重大专项课题资助项目(2016YFB0201005); 国家自然科学基金面上资助项目(11472256); 国防基础科研计划资助项目(C1520110002)

收稿日期: 2016-06-14; 修回日期: 2016-08-15

中的各参数不确定性(如不同次装配带来连接刚度的不确定性),而文中得到的待修正参数区间是表征系统中的模型偏差。

## 1 修正后有限元模型的模型偏差

模型偏差定义为计算结果与试验结果的差异,实际工程中,为减小模型偏差,一般先对初始有限元模型进行修正。

有限元模型修正过程是一个结构参数识别和确认的优化过程,考虑到响应面法由于具有计算量小,精度较高,且待修正参数与响应量之间具有显示函数关系,便于进一步开展基于灵敏度分析的考虑模型偏差的模型修正,笔者采用多项式响应面函数作为代理模型,开展结构系统的有限元模型修正。

响应面法的基本思想是假设随机输入变量对结构响应变量的影响可用数学函数来表达,通过确定性有限元方法在随机输入变量空间构造有限样本点,用二次多项式拟合这些样本点,得到响应面函数。研究表明,参数间相互效应对响应面模型总方差的贡献非常小<sup>[11]</sup>,并且一般结构模态参数随系统待修正参数的变化都较为平滑,故文中采用无交叉项的二次多项式模型作为代理模型,其精度也能满足要求。笔者采用响应面模型的表达式如下

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 = b_0 + \sum_{i=1}^n b_{ii} \left(x_i + \frac{b_i}{2b_{ii}}\right)^2 - \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{4b_{ii}} \quad (1)$$

其中: $n$ 为待修正参数的个数; $b_0$ , $b_i$ 及 $b_{ii}$ 为待定系数,需根据试验样本点的计算结果对其进行识别。

传统确定性的有限元模型修正可归结为如下优化问题

$$\begin{cases} \text{Min} & F(p) = \max \left( \left\| \frac{y_e - y_a(p)}{y_e} \right\| \times 100 \right) \\ \text{s. t.} & \underline{p} \leq p \leq \bar{p} \end{cases} \quad (2)$$

目标函数定义为在结构待修正参数 $p \in R^N$ 取值范围 $\underline{p} \leq p \leq \bar{p}$ 内,试验与计算模态参数的最大相对误差值, $y_e$ , $y_a(p)$ 分别为试验与计算的模态参数。

经修正得到的模型仍可能存在模型偏差 $\delta(p_c)$ ,定义为待修正参数取最优值 $p_c$ 时计算结果与试验结果的差别,有如下表达式

$$\delta(p_c) = |y_e - y_a(p_c)| \quad (3)$$

由于待修正参数的初始区间可能估计不准,或对于高度非线性模型,由于待修正参数的初始设计

空间较大,拟合精度难以保证,参数识别可能陷入局部最优。因此,借鉴文献[9-10]自适应响应面方法解决该问题,即待修正参数修正可能需要进行多步确定性的修正过程。基于遗传算法具有全局搜索能力强的优点,笔者在每步确定性模型修正过程中采用遗传算法对修正参数进行识别。设定优化收敛的判据 $\frac{|F_{k+1} - F_k|}{F_k} \leq \epsilon_1$ ( $\epsilon_1$ 为设定的小数,如 $1 \times 10^{-4}$ ,若不满足,则以最近获得的参数优化值为中心,缩放或平移新的参数关心区域,重新取得试验设计点,并对结构开展相应的动力学计算分析、响应面构建及优化分析。结构待修正参数修正流程如图1所示。

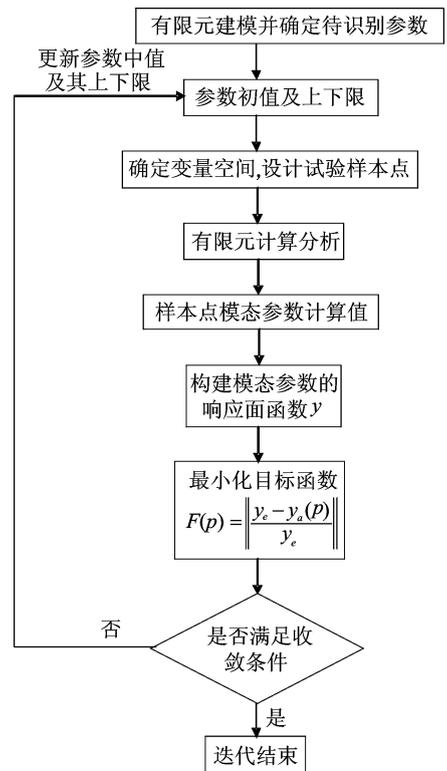


图1 基于响应面的有限元模型修正流程图

Fig. 1 Flow chart of finite element model updating based on response surface method

## 2 模型偏差的影响分析

通过前面确定性的有限元模型修正,获得待修正参数的最优值 $p_c$ ,将其代入响应面模型(1),计算优化后结构的模态参数,并与试验结果比较得到模型偏差 $\delta(p_c)$ 。采用灵敏度分析的方法求解模型偏差的影响,模型偏差与待修正参数偏差有如下关系

$$\delta(p_c) = |S \cdot \Delta p| \quad (4)$$

其中: $S = \partial y / \partial p$ 表示待修正参数关于模态参数的灵

敏度矩阵,可以根据响应面模型(1)方便计算得到。

求解式(4),得到待修正参数偏差的表达式为

$$\Delta p = |G\delta(p_c)| \quad (5)$$

其中,  $G = (S^T S)^{-1} S^T$ 。

将待修正参数偏差  $\Delta p$  与其最优值  $p_c$  按以下方式叠加,得到考虑模型偏差后的参数识别区间为

$$p^I = [p_c - \Delta p \quad p_c + \Delta p] \quad (6)$$

### 3 实 例

图 2 所示为悬臂梁结构,其厚度为 15 mm,结构材料为钢,名义弹性模量为 200 GPa,密度为 7 800 kg/m<sup>3</sup>。其根部通过 3 个 M8 的螺栓施加 10 N·m 拧紧力矩实现根部固支。通过模态试验获得结构前 3 阶弯曲频率分别为 39.32, 244.87, 679.01 Hz。

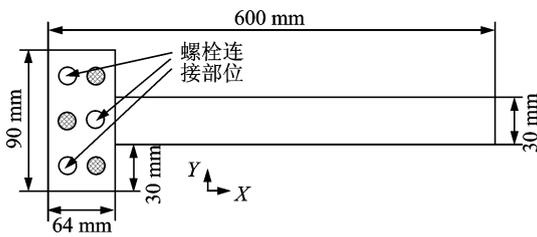


图 2 悬臂梁结构示意图  
Fig. 2 Sketch map of cantilever

在 ANSYS 中采用 BEAM3 二维梁单元建立梁悬臂自由部分的有限元模型,固支端刚度采用拉压与扭转弹簧单元组合单元模拟该悬臂梁的根部挠性刚度,其中弹簧刚度为待识别参数。建立梁的有限元模型如图 3 所示。

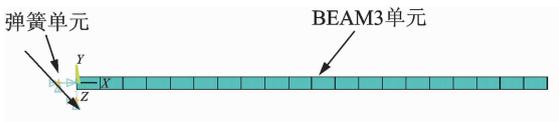


图 3 悬臂梁结构的有限元模型  
Fig. 3 Finite element model of cantilever

有限元模型中假定拉压刚度  $K_t$  的初始区间值为  $[3 \quad 6] \times 10^7$  N/m,扭转刚度  $K_r$  的初始区间值为  $[9 \quad 15] \times 10^4$  N·m,根据如图 1 所示模型修正流程对这两个待修正参数进行修正。在参数识别过程中所建立的二次多项式响应面模型,表征其拟合精度指标的  $R^2$  值均为 1,说明本方法采用无交叉项的二次响应面模型作为代理模型能满足精度要求。表 1 为模型修正前后计算频率与实测频率比较(修正前计算结果是待修正参数取初始区间中值的计算

值), $f_1 \sim f_3$  分别为 1 阶~3 阶频率。

表 1 表明,相比初始模型,修正后结构前 3 阶固有频率的计算结果与试验结果的最大相对误差由 2.32%减小到 0.29%,模型更精确了,但仍有一定偏差。

表 1 修正前后计算频率与实测频率比较

Tab. 1 Comparison of the frequencies between the simulation results and the test results Hz

频率	试验结果	初始结果	初始误差/%	修正结果	误差/%
$f_1$	39.32	39.99	1.70	39.22	0.25
$f_2$	244.87	250.56	2.32	245.58	0.29
$f_3$	679.01	692.54	1.99	677.87	0.17

图 4~图 6 是两个待修正参数和目标函数的收敛过程图。从图 4、图 5 可以得到待修正参数  $K_t$ ,  $K_r$  的识别结果分别是  $3.701 \times 10^7$  N/m,  $6.918 \times 10^4$  N·m。从图 6 可以看出,修正后模型的固有频率  $f_1 \sim f_3$  计算结果与试验结果仍存在一定差异,即修正后的模型存在偏差。

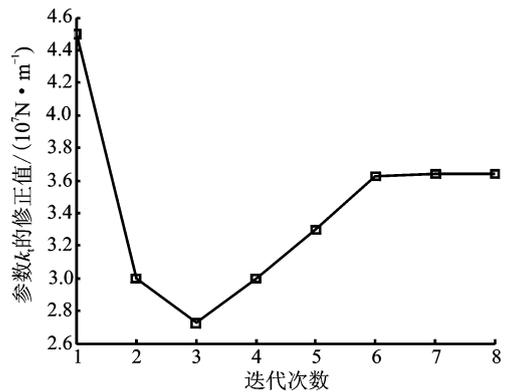


图 4 待修正参数  $K_t$  的迭代收敛情况

Fig. 4 Convergence curve of the updating parameter  $K_t$

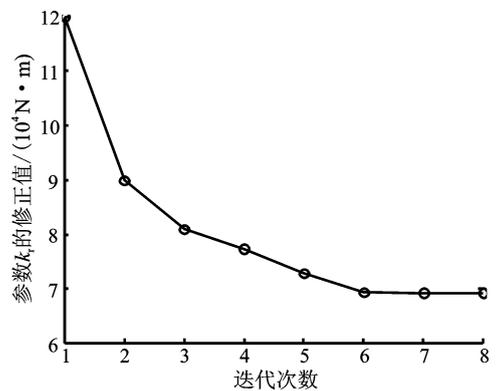
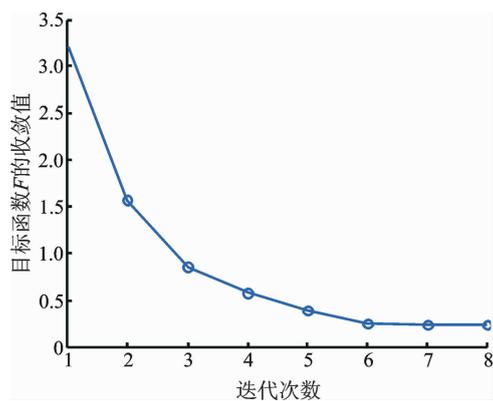


图 5 待修正参数  $K_r$  的迭代收敛情况

Fig. 5 Convergence curve of the updating parameter  $K_r$

图6 目标函数  $F$  的迭代收敛情况Fig. 6 Convergence curve of the objective function  $F$ 

为了得到更可靠的有限元模型,需要考虑模型偏差影响,对待修正参数再次修正。结合响应面模型(1),计算待修正参数关于前3阶固有频率的灵敏度矩阵,再根据式(5)计算得到待修正参数偏差分别为  $0.490 \times 10^7$  N/m,  $0.497 \times 10^4$  N·m。并根据式(6)得到考虑模型偏差后待修正参数  $K_t, K_r$  的区间分别是  $[3.211 \ 4.191] \times 10^7$  N/m,  $[6.421 \ 7.415] \times 10^4$  N·m。

根据待修正参数的初始设计区间、模型修正后的参数识别区间,采用均匀分布的拉丁超立方抽样方法构造 1 000 个随机样本,并计算悬臂梁的前3阶固有频率,并与试验数据进行比较,概率密度曲线如图7所示。从图7可以看出,相比模型修正前,修正后模型的固有频率计算结果明显更接近试验结果;如不考虑模型偏差,修正模型的计算结果与试验结果存在一定差异,而考虑模型偏差后的计算结果概率曲线则能完全覆盖试验结果,基于该模型进行响应预测的结果将更可靠。

## 4 结束语

鉴于结构有限元模型修正后仍可能存在模型偏差的问题,笔者提出了考虑模型偏差的结构动力学模型修正方法。该方法分两步进行:a. 基于响应面模型对待修正参数进行优化识别,并求出模型修正后的模型偏差;b. 基于响应面模型并结合灵敏度分析得到模型偏差对结构待修正参数的影响,得到待修正参数的不确定性,并用待修正参数的区间来表示考虑模型偏差的有限元模型修正结果。由于本方法采用响应面模型,可以大幅提高修正效率,增强工程应用价值。针对提出的考虑模型偏差的动力学模型修正方法,通过悬臂梁算例对模型修正方法与流程进行了展示,修正结果较好覆盖了试验结果,因

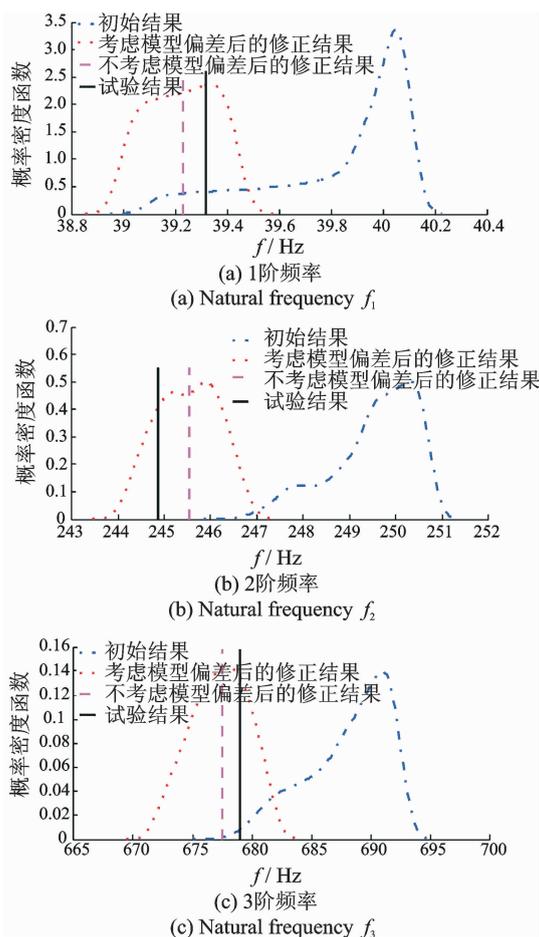


图7 修正前后结构前3阶固有频率计算结果与试验结果比较

Fig. 7 Comparison of the first three frequencies between the simulation results and the test results

此,基于该模型进行响应预测的结果将更可靠。

通过考虑模型偏差得到的结构动力学修正模型,可以提高结构的可靠性预测结果。但是,由于待修正参数是区间表征的不确定性参数,在进行结构动力学响应的传播分析时,如何快速高效对这些不确定性参数进行传播分析以得到关心量的预测结果,特别针对非线性效应较强的模型,需要进一步开展相关研究。并且,当结构中某些材料参数存在不确定性或连接不确定性时,如何综合模型中参数不确定性与模型偏差的影响,以修正得到更可靠的有限元模型还需要进一步研究。

## 参 考 文 献

- [1] Friswell M I, Mottershead J E. Finite element model updating in structural dynamics [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995:58-127.
- [2] Berman A, Nagy E. Improvement of a large dynamic analytical model using ground vibration test data [J]. AIAA Journal, 1982, 21(8):1168-1173.

- [3] Ren R, Beards C F. Identification of 'effective' linear joints using coupling and joint identification techniques [J]. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1998, 120(2):331-338.
- [4] Li Wei. A new method for structural model updating and joint stiffness identification [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2002, 16(1): 155-167.
- [5] 刘洋, 段忠东, 周道成. 基于模态综合技术的结构有限元模型修正 [J]. *振动、测试与诊断*, 2009, 29(3): 287-292.  
Liu Yang, Duan Zhongdong, Zhou Daocheng. Finite element model updating of complex structure using component mode synthesis technique [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2009, 29(3): 287-292. (in Chinese)
- [6] 费庆国, 韩晓林, 苏鹤玲. 响应面有限元模型修正的实现与应用 [J]. *振动、测试与诊断*, 2010, 30(2): 132-134.  
Fei Qingguo, Han Xiaolin, Su Heling. Response surface based finite element model updating and its application [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2010, 30(2): 132-134. (in Chinese)
- [7] 任伟新, 陈华斌. 基于响应面的桥梁有限元模型修正 [J]. *土木工程学报*, 2008, 41(12): 73-78.  
Ren Weixin, Chen Huabin. Response-surface based on finite element model updating of bridge structures [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2008, 41(12): 73-78. (in Chinese)
- [8] 方圣恩, 林友勤, 夏樟华. 考虑结构参数不确定性的随机模型修正方法 [J]. *振动、测试与诊断*, 2014, 34(5):832-837.  
Fang Shengen, Lin Youqin, Xia Zhanghua. Stochastic model updating method considering the uncertainties of structural parameter [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2014, 34(5): 832-837. (in Chinese)
- [9] Wang Gary, Dong Zuomin, Aitchison P. Adaptive response surface method-a global optimization scheme for computation-intensive design problems [J]. *Journal of Engineering Optimization*, 2001, 33(6): 707-734.
- [10] 魏锦辉, 任伟新. 结构有限元模型修正的自适应响应面方法 [J]. *振动与冲击*, 2013, 32(8):114-119.  
Wei Jinhui, Ren Weixin. FE model updating based on adaptive response surface method [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2013, 32(8):114-119. (in Chinese)
- [11] Fang Shengen, Perera R. A response surface methodology based damage identification technique [J]. *Smart Materials and Structures*, 2009, 18(6):065009.
- [12] Xi Zhimin, Fu Yan, Yang Renjye. Model bias characterization in the design space under uncertainty [J]. *International Journal of Performability Engineering*, 2013, 9(4): 433-444.
- [13] Zhan Zhenfei, Fu Yan, Yang Reijye. On stochastic model interpolation and extrapolation methods for vehicle design [J]. *SAE International Journal of Materials and Manufacturing*, 2013, 6(3):517-531.
- [14] Zhan Zhenfei, Fu Yan, Yang Reijye, et al. A bayesian inference based model interpolation and extrapolation [J]. *SAE International Journal of Materials and Manufacturing*, 2012, 5(2):357-364.
- [15] Jiang Zhen, Chen Wei, Fu Yan, et al. Reliability-based design optimization with model bias and data uncertainty [J]. *SAE International Journal of Materials and Manufacturing*, 2013, 6(3):502-516.
- [16] Xi Zhimin, Fu Yan, Yang Reijye. An ensemble approach for model bias prediction [J]. *SAE International Journal of Materials and Manufacturing*, 2013, 6(3):532-539.
- [17] Oberkampf W L, Roy C J. *Verification and validation in scientific computing* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010: 50-57.



**第一作者简介:**陈学前,男,1975年11月生,硕士、副研究员。主要研究方向为结构动力学建模与模拟、模型修正与确认。曾发表《Influence of uncertainty and excitation amplitude on the vibration characteristics of rubber isolators》(《Journal of Sound and Vibration》2016, Vol. 377, Issue 9)等论文。  
E-mail: chenxq@caep.cn

**通信作者简介:**刘信恩,男,1976年6月生,博士、副研究员。主要研究方向为结构动力学建模与模拟、模型修正与确认及不确定性量化等。  
E-mail: liuxe@caep.cn

