第 39 卷第 1 期
2019 年 2 月

振动、测试与诊断
Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis

Vol. 39 No. 1
Feb. 2019

doi:10.16450/j.cnki.issn.1004-6801.2019.01.015

大传动比微型活齿传动系统非线性共振研究*

李 冲[1,2]， 邢继春[3]， 方记文[1,2]， 赵 忠[1,2]

(1. 江苏科技大学机械工程学院 镇江，212003)
(2. 江苏科技大学江苏省船海机械装备先进制造重点实验室 镇江，212003)
(3. 燕山大学机械工程学院 秦皇岛，066004)

摘要 为了实现活齿传动在精密传动领域的应用，设计了一种大传动比微型活齿传动系统。基于行星齿轮传动的线弹性动力学理论建立了活齿传动系统的动力学模型，考虑啮合齿数变化引起的非线性效应，建立了活齿传动系统非线性动力学方程。运用谐波平衡法和正规摄动法推导出系统的非线性幅频关系及非线性共振响应方程。利用给出的任意两组活齿传动系统算例参数，分析了活齿传动系统幅频曲线随系统参数的变化规律，给出了系统在不同倍频下的共振响应。结果表明：阻尼系数 ζ 和啮合活齿数 f 对幅频曲线的影响最大，系统在 $\omega_e \approx \omega_1$ 和 $\omega_e \approx 1/2\omega_1$ 时共振显著。因此，为了减小活齿传动系统振动及提高系统平稳性，应尽量减小活齿数量和波发生器偏心距。研究结果为活齿传动系统结构改进和传动效率的提高奠定理论基础。

关键词 大传动比；活齿传动；非线性共振；谐波平衡法；正规摄动法
中图分类号 TH113.1

引 言

随着航空、航天、武器等尖端技术的不断发展，机械传动逐步走向高精度、高效率、大功率密度及微型化的趋势[1]。活齿传动作为一种结构紧凑、传动比大、承载能力高的传动方式[2]，近年来成为众多学者研究的一大热点课题。活齿传动最初由德国技术人员在 20 世纪 30～40 年代提出，国内对活齿传动的研究始于 20 世纪 70 年代后期[3]。周建军等[4]对活齿传动机构的设计和分类进行了系统阐述，为样机的设计及可行性奠定了理论基础。赵纯可等[5]对二差齿摆杆活齿传动进行了深入研究，给出了齿形的设计与加工方法等。刘大伟等[6]给出了非匀速活齿机构的传动原理及典型结构，该种机构具有设计制造简单，能实现变速传动效果多样性。李剑锋等[7]对二齿差钢球活齿传动齿廓干涉进行了研究，给出了避免定盘封闭槽发生齿廓干涉的设计条件。李冲等[8]提出了一种机电集成压电谐波传动系统，将微型钢球活齿传动与压电驱动实现完美结合，具有低速、大转矩特性。

科研工作者对于不同类型活齿传动的动力学特性进行了研究。梁尚明等[9]建立了摆动活齿传动系统的动力学模型，并分析了弯曲振动、扭转振动及其耦合效应。金向阳等[10]对航空用微小型正弦活齿系统的扭转振动进行了数学建模，得到了其动态特性参数，找出了结构中影响动态特性参数的薄弱环节。安子军等[11]采用集中参数法建立摆杆活齿传动系统的 3 自由度扭转振动动力学模型，给出模态频率和振型。文献[12-13]借鉴行星齿轮传动模型对微型钢球活齿传动系统进行动力学建模并对压电谐波活齿传动系统进行了耦合振动研究。

活齿系统在工作时，参与啮合的齿数处于变化中，故活齿系统输出转矩呈非线性变化。活齿系统的非线性动力学特性对其传动效率产生重要影响。通过对活齿传动系统进行非线性共振研究，可以了解系统的动态特性，避免系统非线性共振的产生，进而提高系统传动的平稳性。笔者对设计的大传动比微型活齿传动系统进行非线性动力学建模，给出非线性幅频关系及共振响应规律。

1 活齿传动系统设计

活齿传动系统由波发生器、中心轮、活齿架及活齿构成，如图 1 所示。工作时，波发生器按照谐波运动的形式沿圆周方向摆动，波发生器边缘与活齿接

* 国家自然科学基金资助项目(51605423，51705217)；中国博士后科学基金资助项目(2018M640515)；江苏省高等学校自然科学研究资助项目
收稿日期：2017-03-17；修回日期：2017-06-14

触时通过谐波力迫使活齿沿中心轮齿廓滚动，活齿带动活齿架转过一定角度。在波发生器连续谐波的作用下，活齿架输出完整周期运动。

笔者所用微型活齿传动系统，设活齿个数 $Z_{\mathrm{p}}=30$，中心轮波齿数 $Z_{\mathrm{c}}=29$，则系统传动比为

$$i_{\mathrm{cp}}=\frac{Z_{\mathrm{p}}}{Z_{\mathrm{p}}-Z_{\mathrm{c}}}=30 \tag{1}$$

设微型活齿系统偏心距 $a=0.1$ mm，a 取值较小是为了能够通过微纳米驱动机构来提供偏心，使活齿系统能够应用于微型精密传动部位。中心轮齿廓是活齿传动的关键部位，中心轮齿廓方程为

$$\begin{cases} X=b\cos(\varphi-\arcsin[a\sin((i_{\mathrm{cp}}-1)\varphi)/b])+ \\ \qquad a\cos(i_{\mathrm{cp}}\varphi)\pm r_{\mathrm{p}}\cos\psi \\ Y=b\sin(\varphi-\arcsin[a\sin((i_{\mathrm{cp}}-1)\varphi)/b])+ \\ \qquad a\sin(i_{\mathrm{cp}}\varphi)\pm r_{\mathrm{p}}\sin\psi \end{cases} \tag{2}$$

其中：φ 为活齿架转角；ψ 为活齿中心运动轨迹上该点法线与 x 轴的夹角；$b=r_{\mathrm{s}}+r_{\mathrm{p}}$；$r_{\mathrm{s}}$，$r_{\mathrm{p}}$ 分别为波发生器和活齿的半径。

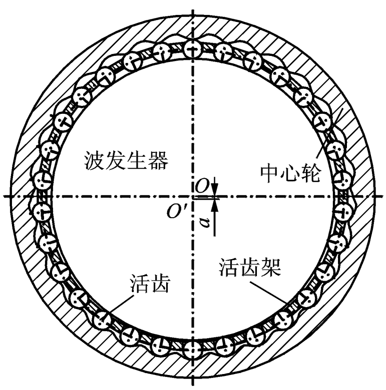
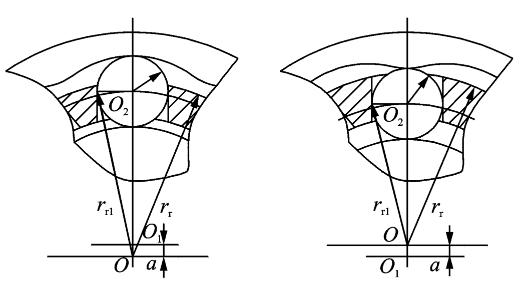


图 1 活齿传动系统构成图

Fig. 1 Composition diagrams of movable tooth drive system

图 2 为活齿位于中心轮齿廓上两个极限位置的几何关系图。由图 2(a)及活齿连续传动条件、不干涉条件可得活齿架外圆半径的尺寸范围为

$$\sqrt{(b+a)^2+r_{\mathrm{p}}^2}<r_{\mathrm{rw}}<b-a+r_{\mathrm{p}} \tag{3}$$



(a) 齿根位置　　(b) 齿顶位置

(a) Dedendum position　　(b) Addendum position

图 2 活齿与中心轮齿廓的位置关系

Fig. 2 Location relationship between movable tooth and central cog profile

由图 2(b)及活齿连续传动条件、不干涉条件可得活齿架内圆半径的尺寸范围为

$$a+b-r_{\mathrm{p}}<r_{\mathrm{rn}}<\sqrt{(b-a)^2+r_{\mathrm{p}}^2} \tag{4}$$

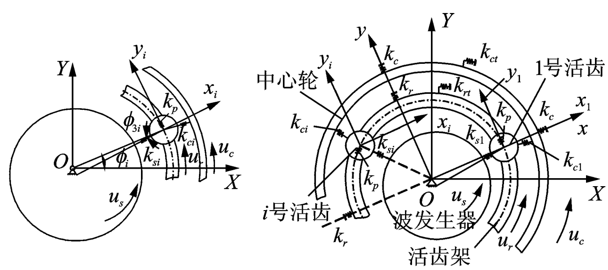
2 活齿传动系统动力学建模

微型活齿系统动力学模型如图 3 所示，OXY 为定坐标系，Oxy 为活齿架坐标系，$O_ix_iy_i$ 为活齿坐标系（$i=1,2,\cdots,Z_{\mathrm{p}}$），波发生器、中心轮、活齿架和活齿分别用下标 s，c，r，p 表示。x_j，y_j，u_j 为线位移和周向线位移（$j=\mathrm{s},\mathrm{c},\mathrm{r},\mathrm{p}_1,\cdots,\mathrm{p}_Z$）。该模型假设：a. 各构件啮合处为弹性变形，主体部分是刚性的；b. 各构件在平面内振动；c. 只考虑活齿的平移振动。

在图 3(a)中，波发生器、中心轮和活齿架相对于活齿的位移沿啮合线方向的投影为

$$\begin{cases} \delta_{\mathrm{s}i}=(x_{\mathrm{s}}-x_{\mathrm{p}i})\cos\phi_{1i}+(y_{\mathrm{s}}-y_{\mathrm{p}i})\sin\phi_{1i}+u_{\mathrm{s}}\sin\phi_{3i} \\ \delta_{\mathrm{c}i}=(x_{\mathrm{c}}-x_{\mathrm{p}i})\cos\theta_i+(y_{\mathrm{c}}-y_{\mathrm{p}i})\sin\theta_i-u_{\mathrm{c}}\sin\phi_{\theta i} \\ \delta_{\mathrm{r}i}=(x_{\mathrm{p}i}-x_{\mathrm{r}})\sin\phi_i+(y_{\mathrm{r}}-y_{\mathrm{p}i})\cos\phi_i-u_{\mathrm{r}} \end{cases} \tag{5}$$

其中：$\phi_{1i}=\phi_i+\phi_{3i}$，$\phi_{\theta i}=\phi_i-\theta_i$；$\theta_i$ 为构件振动角位移；ϕ_i 为活齿 i-活齿架的连线与 X 轴的夹角；ϕ_{3i} 为波发生器-活齿 i 的连线与活齿 i-活齿架连线的夹角。



(a) 相对位移　　(b) 系统受力

(a) Relative displacement　　(b) System forces

图 3 传动系统动力学模型

Fig. 3 Dynamic model of drive system

由波发生器相对于活齿的位移关系可得

$$\begin{cases} m_{\mathrm{s}}\ddot{x}_{\mathrm{s}}+\sum\limits_{i=1}^{Z}k_{\mathrm{s}}\delta_{\mathrm{s}i}\cos\phi_{1i}+k_{\mathrm{s}z}x_{\mathrm{s}}=0 \\ m_{\mathrm{s}}\ddot{y}_{\mathrm{s}}+\sum\limits_{i=1}^{Z}k_{\mathrm{s}}\delta_{\mathrm{s}i}\sin\phi_{1i}+k_{\mathrm{s}z}y_{\mathrm{s}}=0 \\ (I_{\mathrm{s}}/r_{\mathrm{s}}^2)\ddot{u}_{\mathrm{s}}-\sum\limits_{i=1}^{Z}k_{\mathrm{s}}\delta_{\mathrm{s}i}\sin\phi_{3i}+k_{\mathrm{s}t}u_{\mathrm{s}}=T_{\mathrm{s}}/r_{\mathrm{s}} \end{cases} \tag{6}$$

由中心轮相对于活齿的位移关系可得

$$
\begin{cases}
m_{c}\ddot{x}_{c}+\sum\limits_{i=1}^{Z}k_{c}\delta_{ci}\cos\theta_{i}+k_{cz}x_{c}=0\\
m_{c}\ddot{y}_{c}+\sum\limits_{i=1}^{Z}k_{c}\delta_{ci}\sin\theta_{i}+k_{cz}y_{c}=0\\
(I_{c}/r_{c}^{2})\ddot{u}_{c}-\sum\limits_{i=1}^{Z}k_{c}\delta_{ci}\sin\phi_{\theta i}+k_{ct}u_{c}=0
\end{cases}\tag{7}
$$

由活齿架相对于活齿的位移关系可得

$$
\begin{cases}
m_{r}\ddot{x}_{r}-\sum\limits_{i=1}^{Z}k_{r}\delta_{ri}\sin\phi_{i}+k_{rz}x_{r}=0\\
m_{r}\ddot{y}_{r}+\sum\limits_{i=1}^{Z}k_{r}\delta_{ri}\cos\phi_{i}+k_{rz}y_{r}=0\\
(I_{r}/r_{r}^{2})\ddot{u}_{r}-\sum\limits_{i=1}^{Z}k_{r}\delta_{ri}+k_{rt}u_{r}=0
\end{cases}\tag{8}
$$

由活齿相对于各构件的位移关系可得

$$
\begin{cases}
m_{p}\ddot{x}_{pi}-k_{c}\delta_{ci}\cos\theta_{i}+k_{r}\delta_{ri}\sin\phi_{i}-k_{s}\delta_{si}\cos\phi_{1i}=0\\
m_{p}\ddot{y}_{pi}-k_{c}\delta_{ci}\sin\theta_{i}-k_{r}\delta_{ri}\cos\phi_{i}-k_{s}\delta_{si}\sin\phi_{1i}=0\\
(I_{p}/r_{p}^{2})(\ddot{u}_{i}+\ddot{u}_{j})=0
\end{cases}\tag{9}
$$

其中：m_j 和 I_j 分别为各构件的质量和等效质量，kg；k_j，k_{jz}，k_{jt} 分别为活齿与各构件的啮合刚度、径向支撑刚度和切向扭转刚度，N/m；r_j 为各构件理论半径，m；T_s 为波发生器转矩，N・m。

3　非线性共振响应

活齿系统工作时，参与啮合的齿数会在 $Z_p/2$ 和 $(Z_p/2+1)$ 间交替变化，故系统的输出转矩会出现波动变化，如图 4 所示，每经过 π/435，转矩出现一次突变。将一个周期内的 T 随 θ 变化用多项式拟合

$$
T_{1}=\tau_{1}\theta^{2}+\tau_{2}\theta+\tau_{3}\quad\left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{435}\right)\tag{10}
$$

其中：τ_1，τ_2 和 τ_3 分别为拟合系数。

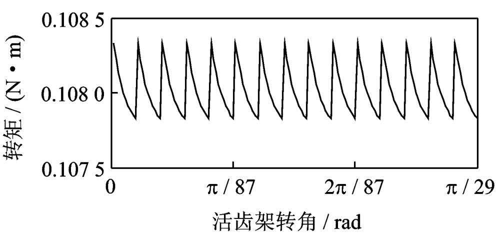


图 4　输出转矩随活齿架转角变化

Fig. 4　Output torque changes with corner of teeth center

为将转矩 T 在整个时间历程中用连续方程表示，将式(10)通过傅里叶展开

$$
T(\theta)=\frac{a_{0}}{2}+\sum_{i=1}^{n}\left(a_{n}\cos\frac{2n\pi\theta}{\tau}+b_{n}\sin\frac{2n\pi\theta}{\tau}\right)=
$$

$$
\frac{a_{0}}{2}+\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{a_{n}^{2}+b_{n}^{2}}\sin\left(\frac{2n\pi\theta}{\tau}+\phi_{T}\right)\right)\tag{11}
$$

其中：a_n 和 b_n 为傅里叶系数；$a_0=\frac{2}{3}\tau^2\tau_1+\tau\tau_2+2\tau_3$；$a_n=\frac{\tau^2\tau_1}{\pi^2n^2}$；$b_n=-\frac{\tau^2\tau_1+\tau\tau_2}{\pi n}$；$\phi_T=\arctan\frac{a_n}{b_n}$。

假设活齿相对于活齿架的转角为 $\delta\theta$，活齿架转矩增量为 δT_r，则 T_r 在 $\theta=\theta_0$ 处的泰勒级数展开式为

$$
\begin{aligned}
T_{r}=T_{r0}+\delta T_{r}=\frac{a_{0}}{2}+&\\
&\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{a_{n}^{2}+b_{n}^{2}}\sin\left(\frac{2n\pi\theta_{0}}{\tau}+\phi_{T}\right)\right)+\\
&\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2n\pi}{\tau}\sqrt{a_{n}^{2}+b_{n}^{2}}\cos\left(\frac{2n\pi\theta_{0}}{\tau}+\phi_{T}\right)\right)\delta\theta-\\
&\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4n^{2}\pi^{2}}{\tau^{2}}\sqrt{a_{n}^{2}+b_{n}^{2}}\sin\left(\frac{2n\pi\theta_{0}}{\tau}+\phi_{T}\right)\right)(\delta\theta)^{2}+\cdots
\end{aligned}\tag{12}
$$

由啮合刚度和输出转矩的关系可得

$$
\begin{aligned}
k_{r}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta T_{r}}{S_{j}^{2}\delta\theta}=c_{n}\sum_{i=1}^{n}\Bigg[&\frac{2n\pi}{\tau}\cos\left(\frac{2n\pi\theta_{0}}{\tau}+\phi_{T}\right)-\\
&\frac{4n^{2}\pi^{2}}{\tau^{2}}\sin\left(\frac{2n\pi\theta_{0}}{\tau}+\phi_{T}\right)\delta\theta+\cdots\Bigg]=\\
&c_{n}\sum_{i=1}^{n}\left[A_{k}-\frac{2n\pi A_{k}}{\tau}\tan\left(\frac{2n\pi\theta_{0}}{\tau}+\phi_{T}\right)\delta\theta\right]=\\
&\bar{k}_{r}+\Delta k_{r}
\end{aligned}\tag{13}
$$

其中：S_j 为波发生器向径；$A_k=\frac{2n\pi}{\tau}\cos\left(\frac{2n\pi\theta_0}{\tau}+\phi_T\right)$；$\Delta k_r=-\frac{2n\pi A_k\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{\tau S_j^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\left(\frac{2n\pi\theta_0}{\tau}+\phi_T\right)\cdot\delta\theta$；$\bar{k}_r=\frac{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{S_j^2}\sum\limits_{i=1}^{n}A_k$；$c_n=\frac{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{S_j^2}$。

同理，假设活齿与波发生器、中心轮之间的啮合刚度的增量为 Δk_s，Δk_c 与平均刚度 $\bar{k}_s$，$\bar{k}_c$ 的比值和 Δk_r 与 $\bar{k}_r$ 的比值相同，则可得

$$
\begin{cases}
k_{s}=\bar{k}_{s}-\dfrac{2n\pi}{\tau}\tan\left(\dfrac{2n\pi\theta_{0}}{\tau}+\phi_{T}\right)\delta\theta\bar{k}_{s}=\bar{k}_{s}+\Delta k_{s}\\
k_{c}=\bar{k}_{c}-\dfrac{2n\pi}{\tau}\tan\left(\dfrac{2n\pi\theta_{0}}{\tau}+\phi_{T}\right)\delta\theta\bar{k}_{c}=\bar{k}_{c}+\Delta k_{c}
\end{cases}\tag{14}
$$

式(12)是通过傅里叶展开和泰勒级数展开得到的，将图 4 中转矩波形简化为正弦形式，可得

$$
\begin{aligned}
T_{r}'=T_{av}+\frac{1}{2}(T_{\max}-T_{\min})\cos(\omega_{e}t)=\frac{a_{0}}{2}+&\\
\alpha_{T}\cos(\omega_{e}t)&
\end{aligned}\tag{15}
$$

将式(12)与式(15)合并，则活齿架转矩增量为

$$
\delta T_{r}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2n\pi}{\tau}\sqrt{a_{n}^{2}+b_{n}^{2}}\cos\left(\frac{2n\pi\theta_{0}}{\tau}+\phi_{T}\right)\right)\delta\theta-
$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4n^2\pi^2}{\tau^2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\sin\left(\frac{2n\pi\theta_0}{\tau}+\phi_T\right)\right)(\delta\theta)^2+\alpha_T\cos(\omega_e t) \tag{16}$$

将式(16)代入式(13)和式(14),然后将式(13),式(14)代入式(6)~式(9),整理可得

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{F}_e \tag{17}$$

其中:$\boldsymbol{M}$ 为系统质量矩阵;$\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵;$\boldsymbol{q}$ 为广义坐标列阵;$\boldsymbol{F}$ 为外力列阵;$\Delta\boldsymbol{F}$ 为非线性啮合力增量列阵;$\Delta\boldsymbol{F}_e$ 为外部激励啮合力列阵;$\Delta\boldsymbol{F}=B_k u_i\varepsilon\boldsymbol{\Lambda}$,$\Delta\boldsymbol{F}_e=B_k\varepsilon\cos(\omega_e t)\boldsymbol{\Lambda}$;$\boldsymbol{\Lambda}$ 为只含正弦和余弦元素的列向量;$B_k=\dfrac{2n\pi A_k\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{\tau S_j^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\left(\dfrac{2n\pi\theta_0}{\tau}+\phi_T\right)$;$C_k=\dfrac{\alpha_k}{r_p}$;$\dfrac{u_i}{r_r}=\varepsilon$;$\delta\theta=\dfrac{u_i}{r_r}$;$\varepsilon$ 为小参数。

系统位移包括静态和动态两部分 $\boldsymbol{q}=\bar{\boldsymbol{q}}+\Delta\boldsymbol{q}$,将 $\boldsymbol{q}$ 代入式(17),得到系统非线性动力学方程为

$$\boldsymbol{M}\Delta\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}\Delta\boldsymbol{q}=\Delta\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{F}_e \tag{18}$$

将式(18)正则化,可得系统正则化动态方程为

$$\Delta\ddot{\boldsymbol{q}}_N+\boldsymbol{K}_N\Delta\boldsymbol{q}_N=\Delta\boldsymbol{F}_N+\Delta\boldsymbol{F}_{eN} \tag{19}$$

其中:$\boldsymbol{K}_N$ 为正则刚度矩阵;$\Delta\boldsymbol{F}_N$,$\Delta\boldsymbol{F}_{eN}$ 分别为正则啮合力、外部激励矢量;$\Delta\boldsymbol{F}_N=\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{F}=B_k u_i\varepsilon\boldsymbol{P}_N^{\mathrm{T}}$;$\Delta\boldsymbol{F}_{eN}=\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{F}_{ez}=C_k\varepsilon\cos(\omega_e t)\boldsymbol{P}_{eN}^{\mathrm{T}}$。

进行变量替换,设 $C_{zNi}=2\zeta\omega_i$,系统阻尼项、激励频率与派生固有频率之差与 ε 同数量级,令

$$\begin{cases}\zeta=\varepsilon\zeta_1\\ \omega_{ei}^2=\omega_i^2(1+\varepsilon\sigma_1)\\ \Delta q_{Ni}=q_{N0i}+\varepsilon q_{N1i}\\ B_k=B_{ki}\omega_i^2\\ C_k=C_{ki}\omega_i^2\end{cases} \tag{20}$$

引入变量 $\psi_i=\omega_{ei}t$,将式(19)转化为对 ψ_i 的微分,令 ε 的同次幂系数相等,可得近似微分方程组为

$$\ddot{\boldsymbol{q}}_{N0}+\boldsymbol{q}_{N0}=\boldsymbol{0} \tag{21}$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}}_{N1}+\boldsymbol{q}_{N1}=-\sigma_1\ddot{\boldsymbol{q}}_{N0}-2\zeta_1\dot{\boldsymbol{q}}_{N1}+\boldsymbol{P}_N B_{ki}u_{01}+C_{ki}\boldsymbol{P}_{eN}\cos(\psi_i+\theta) \tag{22}$$

解方程式(21),设激励中初始相位角 θ 恰能使响应的相位为 $\omega_{ei}t$,可得其解为

$$q_{N0}^i=A_{N0}^i\cos(\psi_i)=A_{N0}^i\cos(\omega_{ei}t) \tag{23}$$

将式(23)和 $u=u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2u_2$ 代入一次近似方程式(22),可得

$$\begin{cases}\ddot{q}_{N1}^1+q_{N1}^1=-\sigma_1^1\ddot{q}_{N0}^1+P_{N1}B_{k1}(A_{N1}^1q_{N0}^1+A_{N1}^2q_{N0}^2+A_{N1}^3q_{N0}^3)-2\zeta_1\dot{q}_{N0}^1+C_{k1}P_{eN1}(\cos\psi_i\cos\theta+\sin\psi_i\sin\theta)\\ \ddot{q}_{N1}^2+q_{N1}^2=-\sigma_1^2\ddot{q}_{N0}^2+P_{N2}B_{k2}(A_{N1}^1q_{N0}^1+A_{N1}^2q_{N0}^2+A_{N1}^3q_{N0}^3)-2\zeta_1\dot{q}_{N0}^2+C_{k2}P_{eN2}(\cos\psi_i\cos\theta+\sin\psi_i\sin\theta)\\ \ddot{q}_{N1}^3+q_{N1}^3=-\sigma_1^3\ddot{q}_{N0}^3+P_{N3}B_{k3}(A_{N1}^1q_{N0}^1+A_{N1}^2q_{N0}^2+A_{N1}^3q_{N0}^3)-2\zeta_1\dot{q}_{N0}^3+C_{k3}P_{eN3}(\cos\psi_i\cos\theta+\sin\psi_i\sin\theta)\end{cases} \tag{24}$$

首先,解式(24)中的第1式,为消除久期项,令 $\sin(\psi_i)$ 和 $\cos(\psi_i)$ 的系数为0,且消除 θ 可得

$$(\sigma_1^1+P_{N1}B_{k1}A_{N1}^1)^2+(2\zeta_1)^2=\left(\frac{C_{k1}P_{eN1}}{A_{N0}^1}\right)^2 \tag{25}$$

将式(25)两边同时乘以 ε^2,令 $\varepsilon\sigma_1^1=\omega_{e1}^2/\omega_1^2-1$,$\varepsilon\zeta_1=\zeta$,$\varepsilon P_{eN1}C_{k1}=C'_{k1}$,则式(25)可化简为

$$\left[1-\left(\frac{\omega_{e1}}{\omega_1}\right)^2-\varepsilon P_{N1}B_{k1}A_{N1}^1\right]^2+(2\zeta)^2=\left(\frac{C'_{k1}}{A_{N0}^1}\right)^2 \tag{26}$$

将 ζ 用 $\zeta\omega_{e1}/\omega_1$ 代替,并令 $s_1=\omega_{e1}/\omega_1$,可得活齿传动系统在激励频率 ω_{e1} 接近派生系统固有频率 ω_1 时振幅与频率的关系式为

$$s_1^2=\pm\sqrt{\left(\frac{C'_{k1}}{A_{N0}^1}\right)^2-4\zeta^2(1-\varepsilon P_{N1}B_{k1}A_{N1}^1-\zeta^2)}-\varepsilon P_{N1}B_{k1}A_{N1}^1-2\zeta^2+1 \tag{27}$$

同理可得,当激励频率 ω_{e2} 和 ω_{e3} 分别接近 ω_2 和 ω_3 时,系统振幅与频率的关系式为

$$\begin{cases}s_2^2=\pm\sqrt{\left(\dfrac{C'_{k2}}{A_{N0}^2}\right)^2-4\zeta^2(1-\varepsilon P_{N2}B_{k2}A_{N1}^2-\zeta^2)}-\varepsilon P_{N2}B_{k2}A_{N1}^2-2\zeta^2+1\\ s_3^2=\pm\sqrt{\left(\dfrac{C'_{k3}}{A_{N0}^3}\right)^2-4\zeta^2(1-\varepsilon P_{N3}B_{k3}A_{N1}^3-\zeta^2)}-\varepsilon P_{N3}B_{k3}A_{N1}^3-2\zeta^2+1\end{cases} \tag{28}$$

联立式(27)和式(28),整理可得

$$A_{N0}^i=\frac{C'_{ki}}{\sqrt{(1-s_i^2-\varepsilon P_{Ni}B_{ki}A_{N1}^i)^2+(2\zeta s_i)^2}} \tag{29}$$

其中:$\varepsilon P_{eNi}C_{ki}=C'_{ki}$;$s_i=\omega_{ei}/\omega_i$。

解式(24)可得非线性方程一次近似解为

$$\begin{cases}q_{N1}^1=P_{N1}B_k\left(A_{N1}^2A_{N0}^2\dfrac{\cos\omega_{02}t-\cos\omega_{01}t}{\omega_{01}^2-\omega_{02}^2}+A_{N0}^3A_{N1}^3\dfrac{\cos\omega_{03}t-\cos\omega_{01}t}{\omega_{01}^2-\omega_{03}^2}\right)+\dfrac{C_kP_{eN1}\omega_{01}^2(\cos\omega_e t-\cos\omega_{01}t)}{\omega_{01}^2-\omega_e^2}\\ q_{N1}^2=P_{N2}B_k\left(A_{N0}^1A_{N1}^1\dfrac{\cos\omega_{02}t-\cos\omega_{01}t}{\omega_{01}^2-\omega_{02}^2}+A_{N0}^3A_{N1}^3\dfrac{\cos\omega_{03}t-\cos\omega_{02}t}{\omega_{03}^2-\omega_{02}^2}\right)+\dfrac{C_kP_{eN2}\omega_{02}^2(\cos\omega_e t-\cos\omega_{02}t)}{\omega_{02}^2-\omega_e^2}\\ q_{N1}^3=P_{N3}B_k\left(A_{N0}^1A_{N1}^1\dfrac{\cos\omega_{03}t-\cos\omega_{01}t}{\omega_{01}^2-\omega_{03}^2}+A_{N0}^2A_{N1}^2\dfrac{\cos\omega_{03}t-\cos\omega_{02}t}{\omega_{02}^2-\omega_{03}^2}\right)+\dfrac{C_kP_{eN3}\omega_{03}^2(\cos\omega_e t-\cos\omega_{03}t)}{\omega_{03}^2-\omega_e^2}\end{cases} \tag{30}$$

4　算例分析

4.1　幅频曲线随参数变化

任取活齿传动系统两组基本参数如表 1 所示，两组参数对应的活齿数量为 30 和 15。由式(29)可得，在激励频率分别接近派生系统的一阶固有频率时，系统振动频率与振幅随阻尼系数 ζ、啮合活齿个数 f、波发生器偏移量 a、活齿半径 r_{p} 和波发生器半径 r_{s} 的变化如图 5 和图 6 所示，图中 s_i 为无量纲单位。由图可知：

1）当 $s_i=\omega_{ei}/\omega_i\approx 1$ 时，系统振动的振幅剧增，且在 s_1，s_2 大于 1 而接近 1 时和 s_3 小于 1 而接近 1 时振幅出现最大值，这主要是由于式(29)中的 $P_{Ni}B_{ki}A_{N1}^{i}$ 中 i 取不同值时的符号不同造成的。

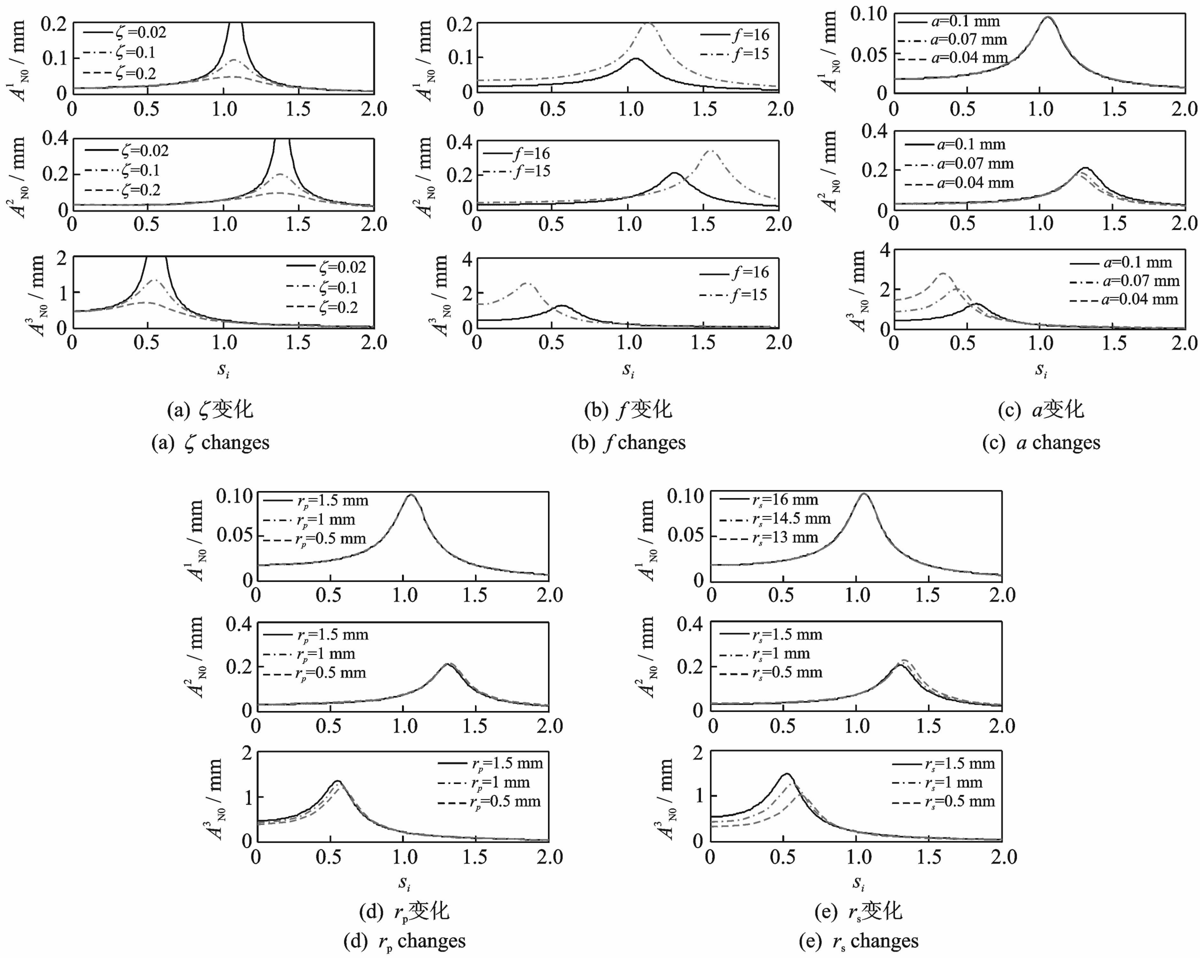
2）系统最大振幅值偏离 $s_i=1$ 的程度随 s_1，s_2 和 s_3 的顺序依次增大，且振幅偏离 $s_i=1$ 的距离代表了非线性的显著程度。

3）随着阻尼系数 ζ 的增大，当 s_i 恒定时系统的响应振幅逐渐减小，这是由于阻尼较大时对共振具有一定的抑制作用。

4）随着啮合活齿数 f 的增大，系统的响应振幅较大幅度减小，振幅偏离 $s_i=1$ 的程度减小，且偏离量随着 s_i 的增加而增加，故参与啮合的活齿数越少时系统的非线性越显著。这是由于随着 f 的改变，啮合刚度发生变化，进而非线性啮合力发生改变。

5）波发生器偏移量 a、活齿半径 r 和波发生器半径 R 对系统振幅和频率的影响都是在 s_1 时很小，在 s_3 时比较大。区别在于，在 s_1 和 s_2 时振幅随 a 的增加而增加，随 r 和 R 的增加而减小，在 s_3 时振幅随 a 的增加而减小，随 r 和 R 的增加而增加。

6）振幅随 a，r 和 R 的变化规律不同的原因在于，由刚度计算式知刚度随 a 的变化与刚度随 r 和 R 的变化趋势相反，故振幅随 a 与 r 和 R 的变化规律不同。在同一系统参数影响下，由于不同 s_i 时 P_{Ni} 和 B_k 随参数的变化不同，造成了不同 s_i 时振幅随同一参数的变化规律不同。



(a) ζ变化
(a) ζ changes

(b) f变化
(b) f changes

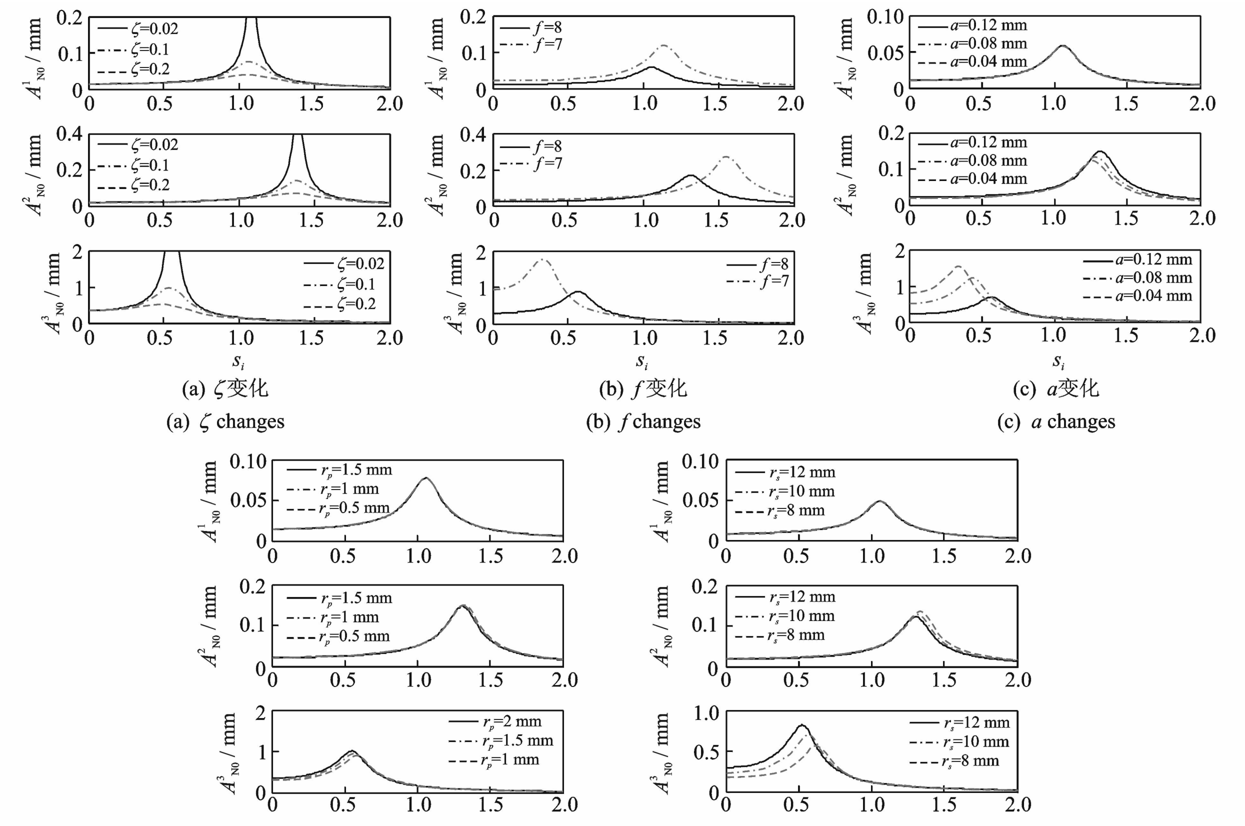
(c) a变化
(c) a changes

(d) r_{p}变化
(d) r_{p} changes

(e) r_{s}变化
(e) r_{s} changes

图 5　活齿系统幅频曲线随第 1 组参数变化

Fig. 5　Amplitude-frequency curve of movable tooth system changes with first group parameters



(a) ζ变化 (b) f变化 (c) a变化

(a) ζ changes (b) f changes (c) a changes

(d) r_p变化 (e) r_s变化

(d) r_p changes (e) r_s changes

图 6 活齿系统幅频曲线随第 2 组参数变化

Fig. 6 Amplitude-frequency curve of movable tooth system changes with second group parameters

表 1 活齿系统参数

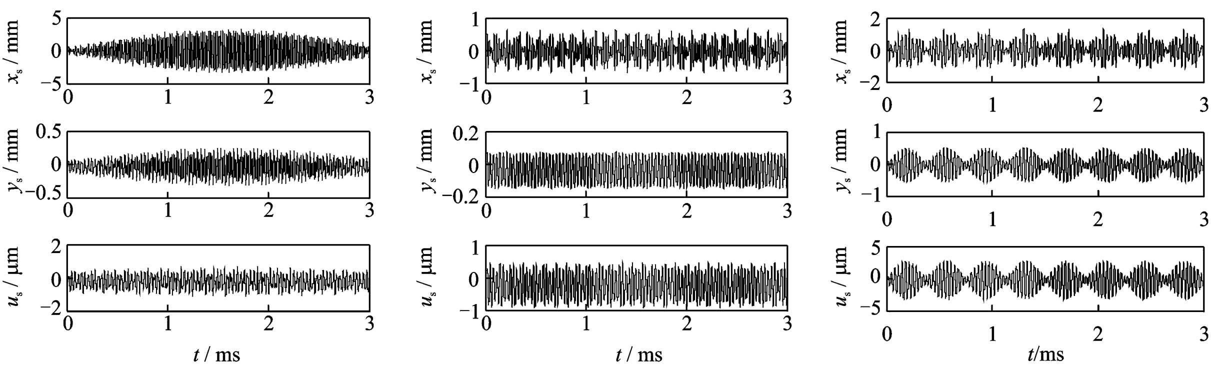
Tab. 1 Parameters of movable tooth system

类别	参数	活齿架	中心轮	波发生器	活齿
第 1 组	m_j/kg	1.31×10^{-2}	5.64×10^{-2}	2.59×10^{-2}	3.30×10^{-5}
	I_j/kg	9.34×10^{-3}	8.41×10^{-2}	1.30×10^{-2}	1.32×10^{-5}
	r_j/mm	15.8	16.6	14.5	1
第 2 组	m_j/kg	1.76×10^{-2}	5.18×10^{-2}	1.30×10^{-2}	3.30×10^{-5}
	I_j/kg	1.44×10^{-2}	7.72×10^{-2}	9.30×10^{-3}	1.32×10^{-5}
	r_j/mm	11.8	12.6	10.6	1

7）活齿传动系统在两组参数下的幅频响应变化规律相同，不同之处在于，活齿数量为 15 齿时系统响应幅值小于 30 齿时的幅值。

4.2 系统共振响应

由式(30)知，当激励频率接近系统的某一固有频率时，活齿传动系统整体或局部将发生共振现象。分别求解当 $\omega_e\approx\omega_1$，$\omega_e\approx2\omega_1$ 及 $\omega_e\approx1/2\omega_1$ 时的响应，图 7 为波发生器的响应，可以得出以下规律。



(a) $\omega_e\approx\omega_1$ (b) $\omega_e\approx2\omega_1$ (c) $\omega_e\approx1/2\omega_1$

图 7 激励频率接近不同倍频时的系统响应

Fig. 7 The system response when excitation frequencies near multi-time frequency

1）当 $\omega_e \approx \omega_1$ 时，x_s 向和 y_s 向的响应振幅较大，此时波发生器 x_s 向和 y_s 向发生共振，且 x_s 向的共振更加剧烈，故在频率 ω_1 时对应的活齿系统的振型为波发生器平移振动。

2）当 $\omega_e \approx 2\omega_1$ 时，x_s 向、y_s 向和 u_s 向的振幅都比较小，故系统在 2 倍频时共振现象不明显。

3）当 $\omega_e \approx 1/2\omega_1$ 时，x_s 向、y_s 向和 u_s 向的振幅都很大，此时波发生器既存在平移振动又存在扭转振动，且验证了亚谐波共振的存在。由于 $\omega_e \approx 1/2\omega_1$ 时的最大振幅小于 $\omega_e \approx \omega_1$ 时的振幅，故亚谐波共振的剧烈程度小于 1 倍频共振时的剧烈程度。

5　结　论

1）阻尼系数 ζ 和啮合活齿个数 f 对幅频曲线的影响最大，且 f 越少时系统的非线性越显著。

2）系统在 $\omega_e \approx \omega_1$ 和 $\omega_e \approx 1/2\omega_1$ 时共振显著，且亚谐波共振程度小于 1 倍频共振程度。

3）在进行活齿传动系统改进和优化时，为了减小系统振动及提高系统平稳性，应尽量减小活齿数量和波发生器偏心距，同时活齿传动系统的工作频率应当远离 1/2 倍频和 1 倍频。

参　考　文　献

[1]　王国彪，赖一楠，范大鹏，等．新型精密传动机构设计与制造综述[J]．中国机械工程，2010，21(16)：1891-1897.
Wang Guobiao, Lai Yinan, Fan Dapeng, et al. Summary of new type precision transmission design and manufacture [J]. China Mechanical Engineering, 2010, 21(16): 1891-1897. (in Chinese)

[2]　Yi Yali, An Zijun. Research on digital design and manufacture technology of rolling swing movable teeth transmission[J]. Applied Mechanics and Materials, 2011, 86: 370-373.

[3]　苏建．二齿差钢球活齿传动的分析与设计[D]．北京：北京工业大学，2012：1-7.

[4]　Zhou Jianjun, Chen Zichen. Creative design of movable tooth gear drives[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering: English Edition, 2004, 17(S): 98-101.

[5]　赵纯可，梁尚明，张杰．二齿差摆杆活齿传动的齿形分析与仿真[J]．四川大学学报：工程科学版，2015，47(S1)：151-157.
Zhao Chunke, Liang Shangming, Zhang Jie. Tooth profile analysis and simulation of the two-tooth defference swing-rod movable teeth transmission[J]. Journal of Sichuan University: Engineering Science Edition, 2015, 47(S1): 151-157. (in Chinese)

[6]　刘大伟，任廷志，章裕琳．非匀速活齿机构的传动原理及典型结构[J]．机械工程学报，2014，50(1)：47-54.
Liu Dawei, Ren Tingzhi, Zhang Yulin. Transmission theory and typical structure of nonuniform mechanism with movable teeth[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(1): 47-54. (in Chinese)

[7]　李剑锋，苏健，陈兴，等．二齿差钢球活齿传动的齿廓方程及齿廓干涉分析[J]．北京工业大学学报，2014，40(5)：641-647.
Li Jianfeng, Su Jian, Chen Xing, et al. Tooth profile equation and interference analysis of the two-tooth difference steel ball movable tooth transmission[J]. Journal of Beijing University of Technology, 2014, 40(5): 641-647. (in Chinese)

[8]　李冲，许立忠．压电谐波电机驱动系统非线性主共振分析[J]．振动、测试与诊断，2016，36(3)：575-579.
Li Chong, Xu Lizhong. Non-linear primary resonance of driving system for a harmonic piezoelectric motor [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2016, 36(3): 575-579. (in Chinese)

[9]　梁尚明，张均富，徐礼钜，等．摆动活齿传动系统振动的动力学模型[J]．振动工程学报，2003，16(3)：285-289.
Liang Shangming, Zhang Junfu, Xu Liju, et al. Dynamic model of swing movable teeth transmission system vibration[J]. Journal of Vibration Engineering, 2003, 16(3): 285-289. (in Chinese)

[10]　金向阳，于广滨，关祥毅．航空用微小型正弦活齿系统扭振动力学分析[J]．中北大学学报：自然科学版，2007，28(4)：299-303.
Jin Xiangyang, Yu Guangbin, Guan Xiangyi. Torsion dynamics of aviation micro cylinder sine oscillating tooth system[J]. Journal of North University of China: Natural Science Edition, 2007, 28(4): 299-303. (in Chinese)

[11]　安子军，高飞．摆杆活齿传动扭转振动分析与建模研究[J]．机械设计与研究，2007，23(3)：79-81.
An Zijun, Gao Fei. Torsion vibration analysis and modeling research on swing-rod movable teeth transmission[J]. Machine Design and Research, 2007, 23(3): 79-81. (in Chinese)

[12]　Xu Lizhong, Li Huaiyong. Dynamics for an electromechanical integrated harmonic piezodrive system [J]. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 2014, 46(3): 709-726.

[13]　Xu Lizhong, Li Chong. Coupled dynamics for an electromechanical integrated harmonic piezodrive system [J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2014, 39(12): 9137-9159.

第一作者简介：李冲，男，1988 年 6 月生，博士、讲师。主要研究方向为微型传动及动力学分析。曾发表《压电谐波电机驱动系统非线性主共振分析》(《振动、测试与诊断》2016 年第 34 卷第 3 期)等论文。

E-mail：lichong@just.edu.cn