

# 伸展运动悬臂梁的稳定性分析\*

刘 明<sup>1</sup>, 杨晓东<sup>2</sup>, 张 伟<sup>2</sup>, 秦朝红<sup>3</sup>

(1. 北京理工大学先进结构技术研究院 北京, 100081)

(2. 北京工业大学机械结构非线性振动与强度北京市重点实验室 北京, 100124)

(3. 北京强度环境研究所可靠性与环境工程技术重点实验室 北京, 100076)

**摘要** 对匀速伸展运动悬臂梁的稳定性进行了研究。采用数值方法求解梁的运动微分方程, 研究自由端处位移随时间变化的情况。提出了两种判断这类时变系统失稳的方式, 一是瞬态特征值方法, 通过分析特征值的实部和虚部来判断梁的失稳特性; 二是刚度判定方法, 由刚度随时间的符号变化判断梁的失稳特性。讨论了特征值及刚度随梁长度的变化的趋势, 进而判定时变系统的稳定性。用这两种方法对运动微分方程分别取一阶截断和五阶截断进行了计算, 并将两种方法进行比较, 结果取得了很好的一致性。

**关键词** 伸展悬臂梁; 特征值; 固有频率; 刚度; 稳定性

**中图分类号** O321

## 引 言

轴向可外伸悬臂结构在工程中的应用越来越常见, 被广泛应用于航空航天<sup>[1-2]</sup>、机械加工及机器人等工程领域, 包括新型可伸缩机翼的伸出、航天器附件和板型天线的展开等。其特点是一端固定, 另一端自由, 且结构的展向长度随时间变化。这类结构因其沿轴向是可运动的, 属于典型的时变参数结构。相比于不可移动的结构, 其沿轴向的外伸过程易诱发结构的横向振动及失稳。若不进行有效控制, 引起的振动将会对结构的稳定性及其携带设备的工作精度带来很大影响, 造成难以估量的损失。因此, 研究轴向可外伸结构在运动过程中的稳定性具有重要的理论意义和工程应用价值。

许多学者从不同角度对轴向可伸缩悬臂结构进行研究。Tabarrok 等<sup>[3]</sup>推导了长度随时间变化梁的运动方程, 得到形式为 4 个非线性的偏微分运动方程和一个几何关系的运动方程, 将其简化为线性方程后求解, 得到一阶截断时梁做匀速运动时的解析解。Gosselin 等<sup>[4]</sup>研究了稠密液体中外伸梁的稳定性, 用黏性力和附加质量代替了流体对梁的影响, 用牛顿第二定律推导了梁的振动方程, 对方程无量纲化之后, 采用 Galerkin 截断研究了梁在外伸过程中的稳定性问题。结论说明: 当梁以恒定低速度伸

展时, 梁自由端振幅逐渐增大, 随着梁长度的增加, 流体对梁的阻尼力使振幅又逐渐减小, 最后进入失稳; 若伸展速度较大, 则梁在初始阶段会发生微小颤振, 随后又回到稳定状态, 当轴向速度足够大时, 梁会一直处于失稳, 类似于非时变结构的屈曲失稳状态。Pasternak 等<sup>[5]</sup>研究了带有负刚度多自由度弹簧振子系统的稳定性问题, 用解析方法推导了根据刚度矩阵行列式值来判断系统失稳的条件, 并以两自由度弹簧振子为例进行了验证。

文献[6-8]在理论研究方面推导了可伸缩悬臂梁的横向振动微分方程, 研究了梁自由端振幅和固有频率等动力学特性随时间变化的情况<sup>[9]</sup>, 以及不同的轴向运动规律对梁振动的影响<sup>[10-13]</sup>。在实验方面也有相关学者做了一定的研究<sup>[14-17]</sup>。相比之下, 在悬臂梁外伸时的稳定性方面的研究较少。笔者采用瞬态特征值方法和刚度判定方法分别研究了梁在外伸时的失稳情况, 并进行了比较。

## 1 伸缩悬臂梁模型

笔者从航空航天领域中提炼出时变参数系统的动力学模型, 将可伸缩变形结构简化为具有轴向运动速度的变长度、变质量的悬臂梁。伸展运动悬臂梁模型如图 1 所示。随着力  $F$  方向的改变, 该悬臂梁可进行外伸和回收, 其长度  $L$  为时间的函数, 即  $L=L(t)$ 。

\* 国家自然科学基金优秀青年基金资助项目(11322214); 国家自然科学基金资助项目(11172010, 11402028, 11672007)  
收稿日期: 2017-03-21; 修回日期: 2017-06-30

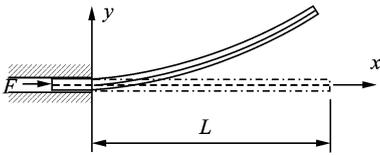


图 1 可伸缩悬臂梁模型

Fig. 1 The deploying cantilever beam model

由于梁只在外伸情况下才会发生失稳,故笔者只研究外伸情况。在一定初始条件下,梁在外伸过程中会产生横向振动。其中,梁的材料参数<sup>[6]</sup>如表 1 所示。

表 1 材料参数

Tab. 1 Material parameter

参数	单位长度质量/ (kg · m <sup>-1</sup> )	弯曲刚度/ (N · m <sup>2</sup> )	初始长度/ m
数值	0.599	3 798	2

## 2 研究内容

可伸缩悬臂梁的运动微分方程<sup>[3]</sup>为

$$\ddot{\mathbf{f}} + 2\left(\frac{U}{L}\right)\mathbf{A}\dot{\mathbf{f}} + \left[\frac{U}{L}\mathbf{A} - \frac{U^2}{L^2}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{A}\right]\mathbf{f} = 0 \quad (1)$$

其中: $\mathbf{f}$  表示广义坐标,  $\mathbf{f} = \{f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n\}$ ;  $EI$  为弯曲刚度;  $L$  为梁任意时刻的长度;  $A_{ij} = \frac{EI}{\rho CL^4} \lambda_i^4 \delta_{ij}$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ;  $\rho$  为梁密度;  $C$  为梁横截面积;  $A_{ij} = \int_0^1 (1 - \eta) \varphi_i \varphi_j' d\eta - \frac{1}{2} \delta_{ij}$ ;  $B_{ij} = \int_0^1 (1 - \eta)^2 \varphi_i' \varphi_j' d\eta - \frac{1}{4} \delta_{ij}$ ;  $\varphi_i = \cosh(\beta_i \eta) - \cos(\beta_i \eta) - \alpha_i [\sinh(\beta_i \eta) - \sin(\beta_i \eta)]$ 。

当梁轴向速度  $U = 1.3 \text{ m/s}$ , 加速度  $a = dU/dt = 0$  时, 在一阶初始条件下对式(1)取一阶截断, 得到

$$\{f_1 \dot{f}_1\}_{t=0} = \{0.1 \ 0\} \quad (2)$$

采用 Runge-Kutta 法求解  $f_1$ , 利用式(3)得到梁自由端位移随时间变化的情况。

$$Y(X, t) = f_1(t) \varphi_1(X, L) \quad (3)$$

其中: $f_1(t)$  为模态坐标;  $\varphi_1(X, L)$  为时变模态函数。

在稳定阶段, 梁自由端的位移响应变化曲线如图 2 所示。可见, 梁在外伸的初始阶段, 其自由端位移呈周期性逐渐增大, 此时处于稳定阶段。

在失稳阶段, 梁自由端的位移响应变化曲线如图 3 所示。可以看出, 当梁外伸到一定程度时, 自由端偏向于坐标轴一方一直伸展下去, 系统的周期性震荡将彻底消失, 此时处于屈曲失稳状态。

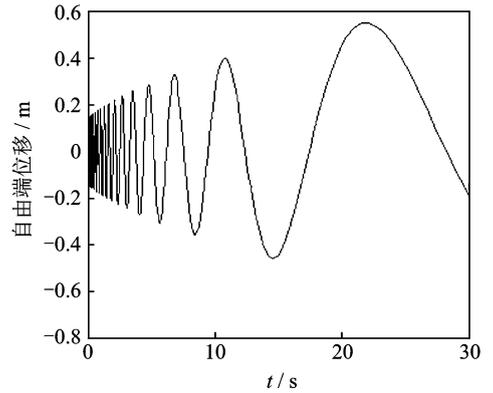


图 2 稳定阶段梁自由端位移响应

Fig. 2 The tip displacement response at stable state

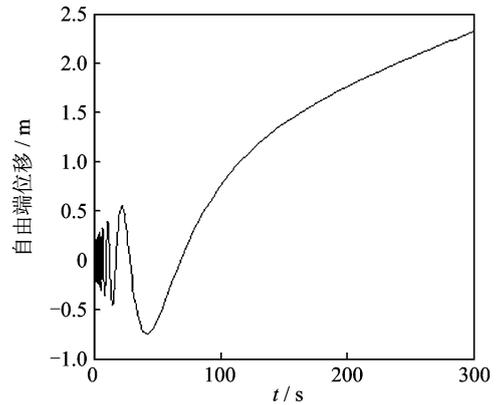


图 3 失稳阶段梁自由端位移响应

Fig. 3 The tip displacement response at unstable state

基于式(1), 笔者用特征值和刚度矩阵随时间的变化趋势两种判断方法来确定梁在外伸时的失稳时间。

### 2.1 用特征值判断失稳

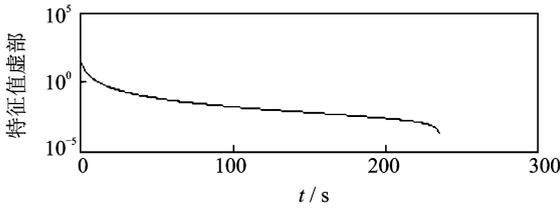
在一阶初始条件下, 对式(1)取一阶截断, 即式(2)。当梁以  $U = 1.3 \text{ m/s}$  的速度伸展时, 求解式(1), 得到其特征根随时间变化的关系如图 4 所示。

在时变系统中, 特征值是随时间不断变化的, 故称为瞬态特征值。瞬态特征值的虚部即瞬态固有频率, 瞬态特征值的实部即表示能量的变化。从图 4 可以看出, 在初始阶段, 瞬态固有频率逐渐减小, 而实部为 0。随着梁的逐渐外伸, 当瞬态固有频率等于 0, 即系统没有周期性震荡时实部出现分岔, 并出现大于 0 的情况。此时, 梁出现屈曲失稳,  $t = 235.38 \text{ s}$ 。

在一阶初始条件下, 式(1)取 5 阶截断, 即

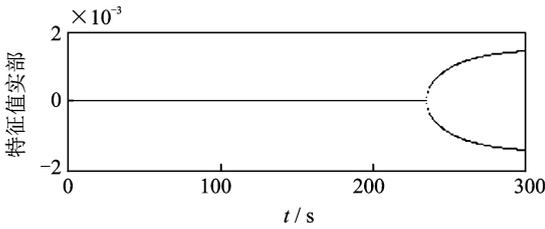
$$\{f_1 \ f_2 \ \dots \ f_5 \ \dot{f}_1 \ \dot{f}_2 \ \dots \ \dot{f}_5\}_{t=0} = \{0.1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0\} \quad (4)$$

图 5 为以相同的速度外伸时, 系统瞬态特征值的虚部和实部的变化情况。



(a) 特征值虚部随时间变化曲线

(a) The varying curve of imaginary part of eigenvalue

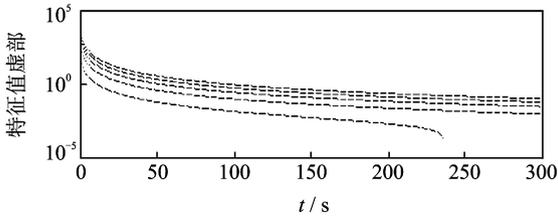


(b) 特征值实部随时间变化曲线

(b) The varying curve of real part of eigenvalue

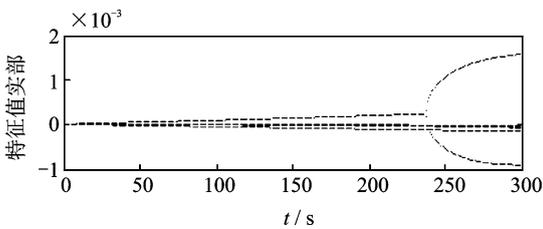
图 4 一阶截断时瞬态特征值变化曲线

Fig. 4 The varying curve of instantaneous eigenvalue at one order truncation



(a) 特征值虚部随时间变化曲线

(a) The varying curve of imaginary part of eigenvalue



(b) 特征值实部随时间变化曲线

(b) The varying curve of real part of eigenvalue

图 5 五阶截断时瞬态特征值变化曲线

Fig. 5 The varying curve of instantaneous eigenvalue at five order truncation

图 5(a) 从下往上的曲线依次表示第 1 阶瞬态固有频率至第 5 阶瞬态固有频率, 其中最先到零点的曲线对应的是第 1 阶瞬态固有频率。从图 5 可以看出, 由于多阶模态的存在, 使得一阶模态对应的特征值实部不在为零, 但并没有改变发生分叉的时间。因此, 系统在上述初始条件下, 发生失稳时梁的长度是不变的。

## 2.2 用刚度矩阵判断失稳

由于梁的长度随时间不断变化, 导致其瞬时刚度也随时间在变化。对于时不变结构, 当梁处于失稳状态时会出现负刚度现象, 即刚度从正变为负。

根据式(1), 可直接得出梁的刚度在一阶截断下的表达式为

$$k = \frac{\dot{U}}{L} A_{11} - \frac{U^2}{L^2} (A_{11} + B_{11}) + \Lambda_{11} \quad (5)$$

其中:  $A_{11}$  和  $B_{11}$  可由式(1)得出。

刚度  $k$  随时间的变化曲线如图 6 所示。可以看出, 随着梁的不断伸展, 其刚度不断降低, 直至为 0, 此后梁出现负刚度, 即产生失稳现象。产生失稳的点为  $t = 235.38$  s, 与图 4 所得结论相符。

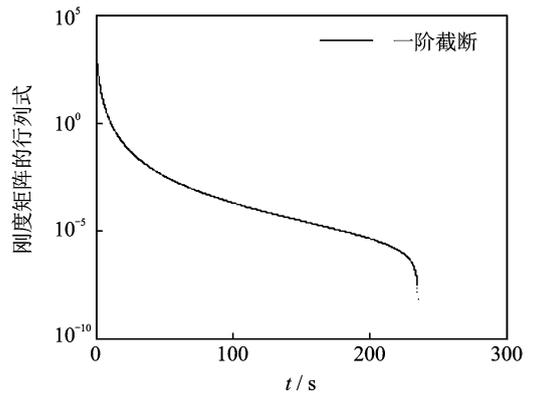


图 6 刚度变化曲线

Fig. 6 The varying curve of stiffness

由式(1)得到五阶截断时系统的刚度矩阵为

$$k = \frac{\dot{U}}{L} \mathbf{A} - \frac{U^2}{L^2} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{\Lambda} \quad (6)$$

其中:  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  可由式(1)得出。

用 Matlab 得出刚度矩阵所有顺序主子式的行列式值, 其对应曲线如图 7 所示。图中最粗的曲线表示五阶顺序主子式的行列式, 从下往上依次按递

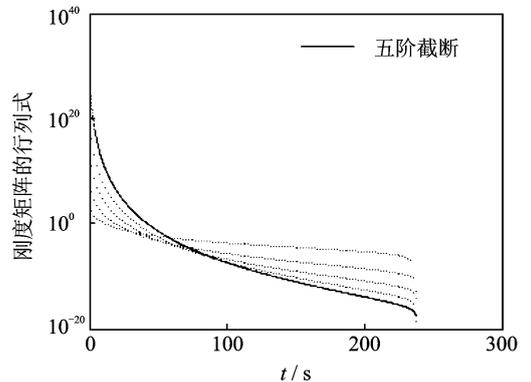


图 7 刚度矩阵行列式变化图

Fig. 7 The varying curve of stiffness matrix determinant

减顺序对应各阶顺序主子式的行列式,直至最上面的曲线对应的为一阶顺序主子式的行列式。从图中可以看出,随着梁的不断伸长,其刚度不断降低,5条曲线一旦出现小于0的情况,即发生失稳。经分析可知,最早出现零点的曲线对应的是五阶顺序主子式的行列式。此时出现0值所对应的时间依然是 $t = 235.38$  s,和图6得出的结论相同。

### 3 结束语

笔者首先研究了梁在外伸过程中,其自由端位移在稳定阶段和失稳阶段时不同的振动情况,得出了失稳后梁的运动状态;其次,通过分析瞬态特征值和刚度矩阵行列式随时间的变化趋势,来判断伸展悬臂梁失稳的时间;最后,将两种方法的结果进行了比较,结果得到了很好的一致性,由此验证了这两种方法的正确性。

#### 参 考 文 献

- [1] 马兴瑞,王本利,苟兴宇. 航天器动力学[M]. 北京:科学出版社,2001: 219-223.
- [2] 黄文虎,曹登庆,韩曾尧. 航天器动力学与控制的研究进展与展望[J]. 力学进展,2012,42(4):367-394. Huang Wenhui, Cao Dengqing, Han Zengyao. Advances and trends in dynamics and control of spacecrafts[J]. Advances in Mechanics, 2012, 42(4): 367-394. (in Chinese)
- [3] Tabarrok B, Leech C M, Kim Y I. On the dynamics of an axially moving beam[J]. Journal of the Franklin Institute, 1974, 297:201-220.
- [4] Gosselin F, Paidoussis M P, Misra A K. Stability of a deploying/extruding beam in dense fluid[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 299:124-142.
- [5] Pasternak E, Dyskin A V, Sevel G. Chains of oscillators with negative stiffness elements[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333:6676-6687.
- [6] Kalaycioglu S, Misra A K. Approximate solutions for vibrations of deploying appendages [J]. Journal of Guidance, 1991, 14: 287-293.
- [7] Downer J D, Park K C. Formulation and solution of inverse spaghetti problem: application to beam deployment dynamics [J]. AIAA Journal, 1993, 31: 339-347.
- [8] Theodore R J, Arakeri J H, Ghosal A. The modeling of axially translating flexible beams [J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 191:364-376.
- [9] Sugiyama S, Kobayashi N, Komaki Y. Modeling and experimental methods for dynamic analysis of the spaghetti problem[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2005, 127:44-51.
- [10] 李俊峰,王照林. 带挠性伸展附件的航天器姿态动力学研究[J]. 清华大学学报,1996,36(10):35-40. Li Junfeng, Wang Zhaolin. Attitude dynamic of a spacecraft with deploying flexible appendages[J]. Tsinghua Science and Technology, 1996, 36(10): 35-40. (in Chinese)
- [11] 朱桂东,王本利,邵成勋. 带梁式伸展附件航天器动力学分析[J]. 空间科学学报,1996,16(4):326-330. Zhu Guidong, Wang Benli, Shao Chengxun. Dynamic property analysis for spacecraft with beam-like deploying appendages[J]. Chinese Journal of Space Science, 1996, 16(4):326-330. (in Chinese)
- [12] Kelleche A, Tatar N, Khemmoudj A. Stability of an axially moving viscoelastic beam [J]. Journal of Dynamical and Control Systems, 2017, 23:283-299.
- [13] Ma Guoliang, Xu Minglong, An Zengyong, et al. Active vibration control of an axially moving cantilever structure using MFC[J]. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 2016, 52: 967-974.
- [14] 陈曦. 可伸缩机翼控制系统设计及非线性振动实验研究[D]. 北京:北京工业大学,2012.
- [15] Matsuzaki Y, Toyama M, Taki Y. Vibration of a cantilevered beam during deployment and retrieval: analysis and experiment[J]. Smart Materials & Structures, 1995, 4: 334-339.
- [16] 王亮,陈怀海,贺旭东,等. 轴向运动悬臂梁系统阻尼与边界条件试验[J]. 振动、测试与诊断,2010,30(5): 547-597. Wang Liang, Chen Huaihai, He Xuedong, et al. Test on damping and boundary condition of axially moving cantilever beam [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2010, 30(5): 547-597. (in Chinese)
- [17] Duan Yingchang, Wang Jianping, Wang Jingquan, et al. Theoretical and experimental study on the transverse vibration properties of an axially moving nested cantilever beam [J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(13): 2885-2897.



第一作者简介:刘明,男,1989年2月生,博士生。主要研究方向为非线性振动、材料表/界面力学。曾发表《On the perturbation methods for vibration analysis of linear time-varying systems》(《International Journal of Applied Mechanics》2016, Vol. 8, No. 3)等论文。  
E-mail:liuming05.03@163.com

