

# 三激振器振动系统的振动同步传动<sup>\*</sup>

刘云山<sup>1,2</sup>, 顾大卫<sup>1</sup>, 张居乾<sup>1</sup>, 张学良<sup>1</sup>, 闻邦椿<sup>1</sup>

(1. 东北大学机械工程与自动化学院 沈阳, 110819)

(2. 辽宁轨道交通职业学院机械工程系 沈阳, 110023)

**摘要** 在振动同步理论研究中,存在着一种特殊现象,无直接驱动源的激振器仍能跟随其他有源驱动的激振器进行同步运转,称之为振动同步传动。针对三机驱动水平放置的振动试验台,应用 Lagrange 能量方程建立动力学模型,根据线性叠加原理得到系统稳定时的响应,利用时间双尺度法获取系统的平均力矩平衡方程,并给出了系统实现振动同步和振动同步传动的同步性判据及同步状态与振动同步传动状态下的稳定性判据。在供电频率 50 Hz 的试验条件下,测得电机 2 及电机 3 断电前后系统稳态时的激振器相位差,验证了理论推导的正确性,为振动同步传动理论在多机振动同步机械上的应用提供了依据。

**关键词** 自同步;振动同步传动;无量纲频率俘获力矩;同步性能力指数;同步性;稳定性

**中图分类号** TH113.1

## 引言

同步现象在生物、物理、工程及技术领域都发挥着极其重要的作用。研究同步的历史可以追溯到 1665 年, Huygens 发现了钟摆的同步现象,并作出了相应的解释。近年来,学者们在机械系统的同步理论上做出了大量的理论探讨和试验研究,文献[1-2]为其中的一些代表。

在工程技术领域,多激振器的同步理论得到了极为广泛的应用,促进了社会生产力的发展。1984 年,闻邦椿等<sup>[3]</sup>提出了振动同步传动的概念,从能量传递的角度分析了振动同步传动的物理过程。文献[4-12]也对振动同步传动的现象进行了相关的研究。以双激振电机驱动的自同步振动机械为例,通常情况下,此机械在两台激振电机同时供电的情况下运转。但振动同步传动理论<sup>[1]</sup>指出,只要满足一定的条件,在激振器实现同步运转之后,切断一台电机的电源,两个激振器仍然可以保持其同步运转状态。试验指出,这种单电机供电的情况下,所消耗的电能仅为双电机供电时的 70%~85%,而达到的工艺效果保持不变。这为振动机械的设计带来了新的

思路和途径。

目前,许多学者和工程师正在研究带多个激振器振动机械的振动同步,但多个激振器的振动同步传动少有涉及。笔者以远共振(即系统的运转频率是其固有频率的 3 倍以上)条件下的三激振器同向回转的激振系统为例,从系统动力学耦合特性并通过一些数值和试验,对其振动同步传动原理给予详细阐述。

## 1 系统动力学模型及运动微分方程

图 1 为三机同向回转激振系统的动力学模型,其中包括刚性主体、激振器及弹簧。弹簧对称分布并与基础和主刚体连接,3 个激振器同向回转,其回转轴心连线为一条水平直线,每个激振器分别由感应电机驱动。设  $Oxy$  为固定坐标系,原点  $O$  为机体质心平衡点,  $O_1$  与  $O_3$  连线的中垂线经过原点  $O$  及激振器的回转中心  $O_2$ 。整个振动系统展现出 3 个自由度:  $x, y$  和摆动  $\phi$ , 每个激振器分别围绕各自的旋转轴转动,以  $\varphi_i (i=1, 2, 3)$  表示。

可得系统的运动微分方程如下

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(51375080, 51675090);中央高校基本科研业务费研究生科研创新资助项目(N150306002, N150304010)

收稿日期:2017-08-26;修回日期:2017-11-19

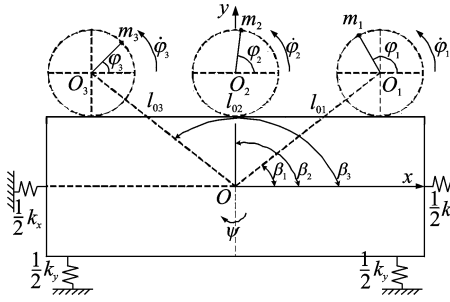


图1 同向回转三激振器振动系统动力学模型

Fig. 1 Dynamic model of the vibrating system with three motordrives rotating in the same direction

$$\begin{cases} M\ddot{x} + f_x\dot{x} + k_x x = \sum_{i=1}^3 m_i r_i (\dot{\varphi}_i^2 \cos\varphi_i + \ddot{\varphi}_i \sin\varphi_i) \\ M\ddot{y} + f_y\dot{y} + k_y y = \sum_{i=1}^3 m_i r_i (\dot{\varphi}_i^2 \sin\varphi_i - \ddot{\varphi}_i \cos\varphi_i) \\ J\ddot{\psi} + f_\psi\dot{\psi} + k_\psi \psi = \sum_{i=1}^3 m_i r_i l_{oi} [\dot{\varphi}_i^2 \sin(\varphi_i - \beta_i) - \ddot{\varphi}_i \cos(\varphi_i - \beta_i)] \\ J_{o1}\ddot{\varphi}_1 + f_{d1}\dot{\varphi}_1 = T_{e1} - m_1 r_1 [-\ddot{x} \sin\varphi_1 + \ddot{y} \cos\varphi_1 + l_{o1} \dot{\psi}^2 \sin(\varphi_1 - \beta_1) + l_{o1} \ddot{\psi} \cos(\varphi_1 - \beta_1)] \\ J_{o2}\ddot{\varphi}_2 + f_{d2}\dot{\varphi}_2 = T_{e2} - m_2 r_2 [-\ddot{x} \sin\varphi_2 + \ddot{y} \cos\varphi_2 + l_{o2} \dot{\psi}^2 \sin(\varphi_2 - \beta_2) + l_{o2} \ddot{\psi} \cos(\varphi_2 - \beta_2)] \\ J_{o3}\ddot{\varphi}_3 + f_{d3}\dot{\varphi}_3 = T_{e3} - m_3 r_3 [-\ddot{x} \sin\varphi_3 + \ddot{y} \cos\varphi_3 + l_{o3} \dot{\psi}^2 \sin(\varphi_3 - \beta_3) + l_{o3} \ddot{\psi} \cos(\varphi_3 - \beta_3)] \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $f_{di}$  为电机  $i$  的轴阻尼系数;  $k_i$  ( $i=x, y, \psi$ ) 为方向弹簧刚度;  $f_i$  ( $i=x, y, \psi$ ) 为  $i$  方向的阻尼系数;  $M = m + \sum_{z=1}^3 m_z$ ;  $J = J_m + \sum_{z=1}^3 m_z (l_{oz}^2 + r_l^2)$ ;  $J_{oz} = m_z r_z^2 + j_{oz}$ ,  $z=1, 2, 3$ ;  $k_\psi = \frac{1}{2} (l_x^2 k_y + l_y^2 k_x)$ ;  $f_\psi = \frac{1}{2} (l_x^2 f_y + l_y^2 f_x)$ 。

## 2 系统实现振动同步传动的判据

设 3 个激振器在稳态运行时的平均相位为  $\varphi$ , 激振器 1 和 2 以及激振器 2 和 3 之间的相位差分别为  $2\alpha_1$  和  $2\alpha_2$ , 可得

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi + \frac{4}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 = \varphi + \zeta_1 \\ \varphi_2 = \varphi - \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 = \varphi + \zeta_2 \\ \varphi_3 = \varphi - \frac{2}{3}\alpha_1 - \frac{4}{3}\alpha_2 = \varphi + \zeta_3 \end{cases} \quad (2)$$

在 3 台电机的最小正周期内, 平均角速度的平均值为一常数, 即

$$\omega_{m0} = \frac{1}{T_L} \int_t^{t+T_L} \dot{\varphi}(t) dt \quad (3)$$

设  $\dot{\varphi}$  和  $\dot{\alpha}_i$  ( $i=1, 2$ ) 的瞬时变化系数为和, 得

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = (1 + \varepsilon_0 + \frac{4}{3}\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\varepsilon_2) \omega_{m0} = (1 + \nu_1) \omega_{m0} \\ \dot{\varphi}_2 = (1 + \varepsilon_0 - \frac{2}{3}\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\varepsilon_2) \omega_{m0} = (1 + \nu_2) \omega_{m0} \\ \dot{\varphi}_3 = (1 + \varepsilon_0 - \frac{2}{3}\varepsilon_1 - \frac{4}{3}\varepsilon_2) \omega_{m0} = (1 + \nu_3) \omega_{m0} \end{cases} \quad (4)$$

应用线性叠加法则, 设  $m_i = \eta_i m_0$ ,  $i=1, 2, 3$ , 其中  $m_2$  为标准激振器, 即  $\eta_2 = 1$ , 得到系统运动微分方程的稳态响应解为

$$\begin{cases} x = \frac{r_m r}{\mu_x} \sum_{i=1}^3 \eta_i \cos(\varphi + \zeta_i + \gamma_x) \\ y = \frac{r_m r}{\mu_y} \sum_{i=1}^3 \eta_i \sin(\varphi + \zeta_i + \gamma_y) \\ \psi = \frac{r_m r}{l_e \mu_\psi} \sum_{i=1}^3 \eta_i r_{li} \sin(\varphi + \zeta_i - \beta_i + \gamma_x) \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $r_m = m_0/M$ ;  $l_e = \sqrt{J/M}$ ;  $r_{li} = l_{o1}/l_e$  ( $i=1, 2, 3$ )。

## 3 系统实现振动同步传动同步性判据

对式(5)进行微分可得  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{\psi}$  和  $\ddot{\varphi}_i$ , 代入式(1)的后 3 个方程, 在  $\varphi=0 \sim 2\pi$  上求积分且取平均值, 忽略  $\nu_i$  的高阶项, 可得 3 个激振器的平均力矩平衡方程如下

$$T_{oi} = T_{eoi} - f_{di} \omega_{m0} = \chi_{fi} + \chi_{ai} \quad (i=1, 2, 3) \quad (6)$$

其中:  $T_{oi}$  为电机  $i$  的电磁输出力矩, 其为电机的电磁转矩与电机转子阻尼力矩之差;  $\chi_{fi}$  及  $\chi_{ai}$  的具体形式由文献[11]给出, 且  $\chi_{fi}$  和  $\chi_{ai}$  的表达式中包含相位差的代数项。

振动系统通过调整 3 个激振器之间的相位差从而在 3 个激振器之间传递电磁力矩以平衡 3 个电机之间输出力矩之差, 使得系统达到同步。系统实现同步的同步性判据为

$$\begin{cases} \left| \frac{\Delta T_{o12}}{T_u} - (\eta_1^2 W_{s o1} - \eta_2^2 W_{s o2}) \right| \leq \tau_{c12 \max} \\ \left| \frac{\Delta T_{o23}}{T_u} - (\eta_2^2 W_{s o2} - \eta_3^2 W_{s o3}) \right| \leq \tau_{c23 \max} \end{cases} \quad (7)$$

其中:  $\Delta T_{o12}$  和  $\Delta T_{o23}$  为电机 1 与 2 及电机 2 与 3 之间的输出力矩之差;  $T_u = m_0 r^2 \omega_{m0} / 2$  为标准激振器的动能;  $\tau_{c12 \max}$  和  $\tau_{c23 \max}$  为激振器 1 与 2 及激振器 2 与 3 之间无量纲频率俘获力矩的最大值;  $W_{s o1}$ ,  $W_{s o2}$  及  $W_{s o3}$  的表达式由文献[11]给出。

定义振动系统的同步性能指数为

$$\begin{cases} \zeta_{12} = \tau_{c12\max} / \tau_a \\ \zeta_{23} = \tau_{c23\max} / \tau_a \end{cases} \quad (8)$$

其中:  $\tau_a$  为 3 电机平均无量纲负载力矩, 表达式由文献[11]给出。

振动系统的同步性能指数越大, 则振动系统越容易实现同步。当振动系统处于同步并稳态时, 首先切断电机 1 的电源, 此时  $T_{e01} = 0$ , 如果 3 个激振器仍能实现同步运转, 则系统将以振动同步传动的方式进行运转, 系统重新达到稳态后的振动同步传动角速度为  $\omega_{i01}$ , 相位差为  $2\alpha'_{11}$  和  $2\alpha'_{22}$ 。笔者得到电机 1 断电后系统实现振动同步传动的同步性判据为

$$\begin{cases} \left| \frac{\Delta T'_{o12}}{T'_u} - (\eta_1^2 W_{s01} - \eta_2^2 W_{s02}) \right| \leq \tau'_{c12\max} \\ \left| \frac{\Delta T'_{o23}}{T'_u} - (\eta_2^2 W_{s02} - \eta_3^2 W_{s03}) \right| \leq \tau'_{c23\max} \end{cases} \quad (9)$$

此时系统实现振动同步传动时的同步性能指数如式(10)所示, 同步性能指数越大, 系统越容易实现振动同步传动

$$\begin{cases} \zeta'_{12} = \tau'_{c12\max} / \tau'_a \\ \zeta'_{23} = \tau'_{c23\max} / \tau'_a \end{cases} \quad (10)$$

当系统再次处于稳态同步时, 切断电机 3 的电源, 此时  $T_{e03} = 0$ , 系统重新达到稳态后的振动同步传动角速度为  $\omega_{i02}$ , 相位差为  $2\alpha''_{11}$  和  $2\alpha''_{22}$ , 此时得到系统实现振动同步传动的同步性判据为

$$\begin{cases} \left| \frac{\Delta T''_{o12}}{T''_u} - (\eta_1^2 W_{s01} - \eta_2^2 W_{s02}) \right| \leq \tau''_{c12\max} \\ \left| \frac{\Delta T''_{o23}}{T''_u} - (\eta_2^2 W_{s02} - \eta_3^2 W_{s03}) \right| \leq \tau''_{c23\max} \end{cases} \quad (11)$$

此时系统实现振动同步传动时的同步性能指数如下

$$\begin{cases} \zeta''_{12} = \tau''_{c12\max} / \tau''_a \\ \zeta''_{23} = \tau''_{c23\max} / \tau''_a \end{cases} \quad (12)$$

同步性能指数越大, 振动系统越容易实现振动同步传动。

## 4 振动同步传动状态的稳定性判据

对式(6)在  $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_{10}$ ,  $\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_{20}$  处进行线性化处理, 整理得到系统的稳定性方程

$$\Delta \dot{\alpha} = \mathbf{G} \Delta \alpha \quad (13)$$

其中:  $\Delta \alpha_i = \bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_{i0}$ ,  $i = 1, 2$ 。

通过  $\det(\mathbf{G} - \lambda I) = 0$  得矩阵  $\mathbf{G}$  的特征方程如下

$$\lambda^2 + c_1 \lambda + c_2 = 0 \quad (14)$$

其中

$$\begin{cases} c_1 = \omega_{m0}^* (p_1 + p_2 + p_3) / k'_{e0} \\ c_2 = \frac{3\omega_{m0}^{*2}}{4k_{e0}^2} (p_1 p_3 + p_1 p_2 + p_2 p_3) \\ p_1 = \eta_1 \eta_2 W_{\alpha12} \cos(2\bar{\alpha}_{10} + \theta_{c12}) \\ p_2 = \eta_1 \eta_3 W_{\alpha13} \cos(2\bar{\alpha}_{10} + 2\bar{\alpha}_{20} + \theta_{c13}) \\ p_3 = \eta_2 \eta_3 W_{\alpha23} \cos(2\bar{\alpha}_{20} + \theta_{c23}) \end{cases} \quad (15)$$

由 Routh-Hurwitz 准则可知, 当矩阵  $\mathbf{G}$  的特征方程(14)满足

$$\begin{cases} c_1 > 0 \\ c_2 > 0 \end{cases} \quad (16)$$

时, 平凡解  $\Delta \alpha = 0$  是稳定的。

切断电机 1 的电源, 此时  $T_{e01}$  和  $k_{e01}$  均为零, 此时系统的稳定性方程为

$$\Delta \alpha' = \mathbf{G}' \Delta \alpha' \quad (17)$$

通过  $\det(\mathbf{G}' - \lambda I) = 0$  得矩阵  $\mathbf{G}'$  的特征方程为

$$\lambda^2 + c'_1 \lambda + c'_2 = 0 \quad (18)$$

由 Routh-Hurwitz 准则可知, 当矩阵  $\mathbf{G}'$  的特征方程(18)满足式(19)时, 可解  $\Delta \alpha' = 0$  是稳定的

$$\begin{cases} c'_1 > 0 \\ c'_2 > 0 \end{cases} \quad (19)$$

切断电机 3 的电源, 此时  $T_{e03}$  和  $k_{e03}$  均为零, 系统的稳定性判据为

$$\begin{cases} a_{3ij} > 0 \\ \det(\mathbf{A}_3) > 0 \\ \det(\mathbf{A}_{30}) > 0 \end{cases} \quad (20)$$

其中: 矩阵  $\mathbf{A}_3$  满足广义 Lyapunov 方程;  $\mathbf{A}_{30}$  为  $\mathbf{A}_3$  的顺序主子式。

## 5 数值分析和试验验证

图 2 为三机驱动振动同步试验台, 对应图 1 所示的动力学模型, 试验台的系统结构参数如下:  $\beta_1 = 15^\circ$ ,  $\beta_2 = 90^\circ$ ,  $\beta_3 = 165^\circ$ ,  $m_0 = 4 \text{ kg}$ ,  $M = 155 \text{ kg}$ ,  $r = 0.05 \text{ m}$ ,  $l_{01} = l_{03} = 0.45 \text{ m}$ ,  $l_{02} = 0.1 \text{ m}$ ,  $r_{l1} = r_{l3} = 1.25$ ,  $r_{l2} = r_{l1} \sin \beta_1$ ,  $J_m = 16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $r_m = 0.026$ ,  $k_x = 95 \text{ kN/m}$ ,  $k_y = 75 \text{ kN/m}$ ,  $k_\phi = 15 \text{ kN/rad}$ ,  $f_x = f_y = 0.3 \text{ kN} \cdot \text{s/m}$ ,  $f_\phi = 0.2 \text{ kN} \cdot \text{s/rad}$ ,  $f_{d1} = f_{d2} = f_{d3}$ 。3 台电机逆时针同向回转, 型号均为 VB-326-W(380 V, 50 Hz, 6-pole, Y-连接, 额定电流 0.82 A, 额定转速 950 r/min, 0.2 kW, 激振力 0~3 kN, 绝缘等级 IP54), 3 电机由变频器控制在

50 Hz下运转。

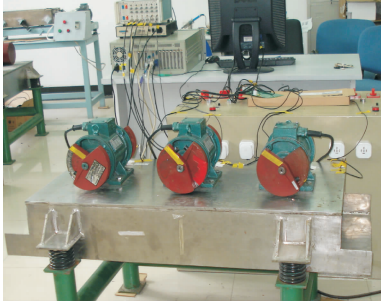


图2 三机驱动振动同步试验台

Fig. 2 Vibrating synchronous bedstand with three exciters

### 5.1 有关系统特性的数值分析

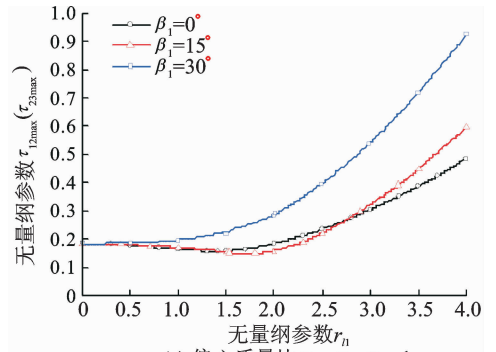
$\tau_{c12}(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$  和  $\tau_{c23}(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$  是  $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \beta_i, i=1, 2, 3$ ,  $r_m$  和  $r_{l1}$  的约束方程, 在给定  $r_m=0.026$  及  $\beta_2=\pi/2$  和  $\beta_1+\beta_3=\pi$  的前提下, 可得到  $\tau_{cij\max}$  随系统参数  $r_{l1}$  及  $\beta_1$  变化的曲线。

如图3所示,  $\tau_{c12\max}=\tau_{c23\max}$ , 且  $\tau_{cij\max}$ ,  $\tau'_{cij\max}$  及  $\tau''_{cij\max}$  随系统参数  $r_{l1}$  及  $\beta_1$  变化的曲线为同一曲线。

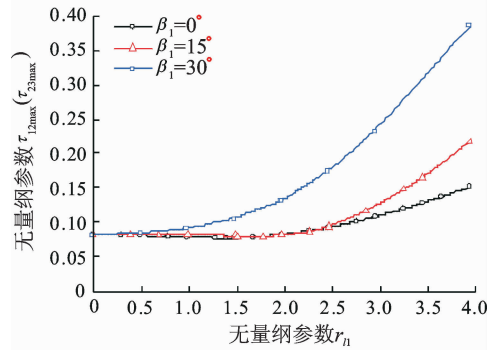
$\tau_{cij\max}$  的数值越大, 则激振器之间的无量纲频率俘获力矩越大, 系统实现同步所允许的电机特性差异随之越大。同时,  $\tau'_{cij\max}$  及  $\tau''_{cij\max}$  的数值越大, 则激振器之间的无量纲频率俘获力矩越大, 系统实现振动同步传动所允许的电机特性差异随之越大。在振动系统当中,  $\tau_{cij\max}$ ,  $\tau'_{cij\max}$  和  $\tau''_{cij\max}$  的值时刻保持相同, 而电机之间的特性差异随着系统中某个电机的断电随之变大。所以在一个系统结构参数固定的系统中, 振动同步传动较系统的振动同步更难以实现。

由图3可知,  $\tau_{cij\max}$ ,  $\tau'_{cij\max}$  和  $\tau''_{cij\max}$  在  $\eta_1=\eta_2=\eta_3=1$  时较  $\tau_{cij\max}$ ,  $\tau'_{cij\max}$  和  $\tau''_{cij\max}$  在  $\eta_1=\eta_3=0.5, \eta_2=1$  时大, 即系统在  $\eta_1=\eta_2=\eta_3=1$  的条件下更容易实现同步及振动同步传动。另外, 在  $\beta_1=0^\circ$  的条

件下,  $r_{l1}=\sqrt{2}$  是  $\tau_{cij\max}$  的分界点, 系统在  $r_{l1} > \sqrt{2}$  时比  $r_{l1} < \sqrt{2}$  时的同步运转所允许的两电机间残余力矩之差要大。



(a) Eccentric mass ratio  $\eta_1=\eta_2=\eta_3=1$



(b) Eccentric mass ratio  $\eta_1=\eta_3=0.5, \eta_2=1$

图3  $\tau_{cij\max}, \tau'_{cij\max}, \tau''_{cij\max}$  随系统参数变化曲线

Fig. 3  $\tau_{cij\max}, \tau'_{cij\max}, \tau''_{cij\max}$  versus the parameters of system

### 5.2 三激振器相同情况下的试验分析

图4为三激振器相同时( $\eta_1=\eta_2=\eta_3$ )的试验结果。试验开始时, 三台电机均以相同电源供电。在约10 s处, 激振器彼此之间的相位差达到稳定状态, 为  $2\alpha_1 \approx 198.6^\circ, 2\alpha_2 \approx 205.4^\circ$  和  $2\alpha_3 \approx 43.7^\circ$ 。

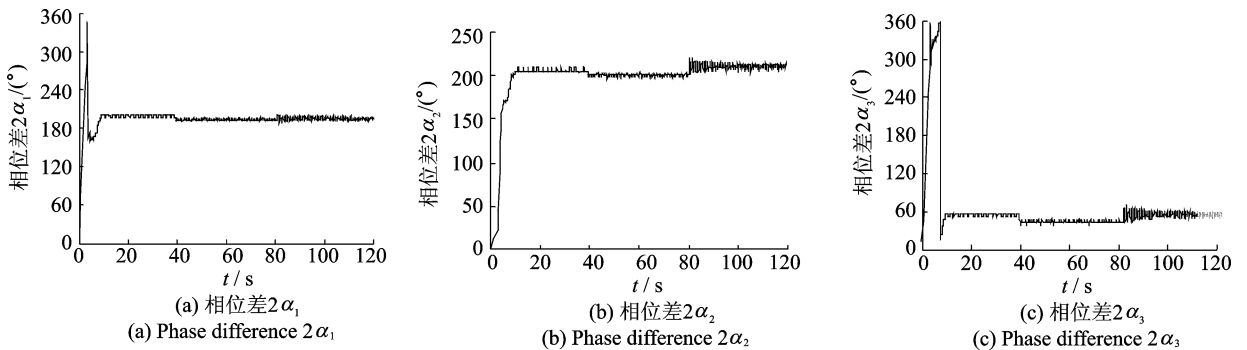


图4 三激振器相同时的同步试验结果

Fig. 4 Experimental results on synchronization of three identical exciters

40 s 处,切断电机 1 的电源,此时振动系统原有的平衡状态被打破,经历短暂的波动,系统进入振动同步传动状态。在振动同步传动过程中,平均耦合力矩担任能量传输的工具<sup>[8]</sup>,将来自于供电电机 2 和 3 的能量传递给断电的电机 1 以克服后者的负载力矩并继续保持同步运转。振动同步传动状态下的稳定相位差为  $2\alpha_1 \approx 191.5^\circ$ ,  $2\alpha_2 \approx 199.7^\circ$  和  $2\alpha_3 \approx 29.1^\circ$ 。

80 s 处,切断电机 3 的电源,此时振动系统的振动同步传动状态被打破,经历短暂的波动,系统再次进入振动同步传动状态。此时,振动同步传动状态下的稳定相位差为  $2\alpha_1 \approx 196.3^\circ$ ,  $2\alpha_2 \approx 208.6^\circ$  和  $2\alpha_3 \approx 42.5^\circ$ 。

在第 2 次的振动同步传动过程中,系统的转速及相位差较之前呈现出细小的间歇性波动,导致其波动的原因如下:

1) 在两个电机断电的情况下,系统的平均耦合力矩恰好能够克服三台电机总的平均负载力矩,处于一种临界状态;

2) 供电电机 2 的电压波动及电机自身相关参数随外界环境变化而变化,导致电机 2 通过振动系统加载到电机 1,3 上的负载呈现不均匀性。

### 5.3 三激振器不同情况下的试验分析

图 5 为三激振器不同时 ( $\eta_1 = \eta_3 = 0.5, \eta_2 = 1$ ) 的试验结果,试验仍然使用图 2 所示的试验台。

试验开始时,三台电机同时供电,在约 13 s 处,激振器彼此之间的相位差达到稳定状态,但呈现出较小的间歇性波动,为  $2\alpha_1 \approx 168.5^\circ \sim 172.3^\circ$ ,  $2\alpha_2 \approx 175.1^\circ \sim 178.3^\circ$  和  $2\alpha_3 \approx -15.8^\circ \sim -14.2^\circ$ 。

40 s 处,切断电机 1 的电源,此时振动系统原有的平衡状态被打破,经历短暂的波动,系统进入振动同步传动状态,此阶段平均耦合力矩担任能量传输的工具。稳定状态的相位差为  $2\alpha_1 \approx 156.9^\circ$ ,  $2\alpha_2 \approx 164.8^\circ$  和  $2\alpha_3 \approx -40.5^\circ$ 。通过电机 1 断电前后系统的稳定性的对比,可以看出电机 1 断电后系统的稳定性更好,这是因为少了一个电机的内部扰动。

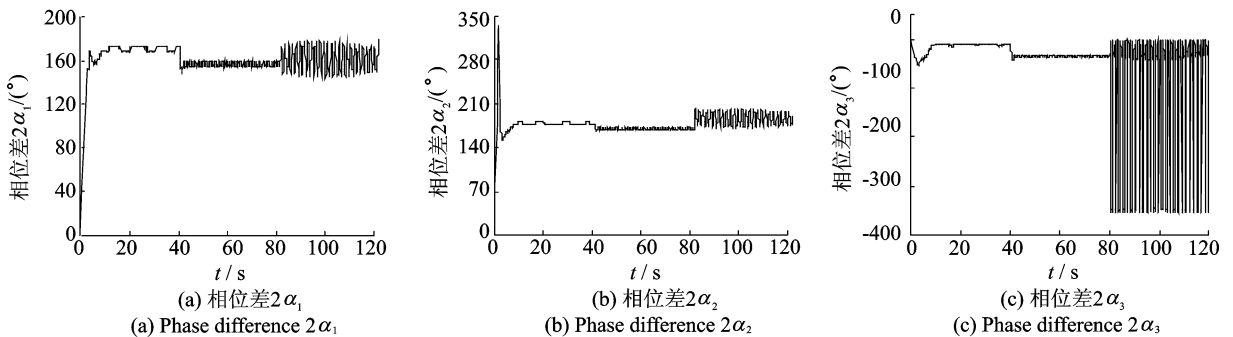


图 5 三激振器不同时同步试验结果

Fig. 5 Experimental results on synchronization of three non-identical exciters

80 s 处,切断电机 3 的电源,系统的转速及各激振器之间的相位差开始出现较大的波动,系统处于不稳定状态。原因如下:在两台电机断电的情况下,系统的平均耦合力矩不足以克服三台电机总的平均负载力矩。这也验证了图 3 的结果:  $\tau_{cij \max}$  在  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 1$  时较  $\tau_{cij \max}$  在  $\eta_1 = \eta_3 = 0.5, \eta_2 = 1$  时大,即振动系统在三激振器相同的条件下更容易实现同步及振动同步传动。

### 5.4 系统参数带入理论验证

以三激振器相同 ( $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$ ) 时的试验结果为例,将试验系统结构参数代入稳定性判据中,如表 1 所示,可知同步状态及振动同步传动状态下的稳定性指数都大于零 ( $\alpha_{3ij} > 0, \det(\mathbf{A}_3) > 0, \det(\mathbf{A}_{30}) > 0$ ),说明系统稳定,与试验结果相符合,这也验证了

所用理论方法的有效性。

表 1 电机 3 断电后系统振动同步传动状态下的稳定性

Tab. 1 Stability on vibratory synchronization transmission

$$(\theta_{c12} = \theta_{c23} = 190.54^\circ, \theta_{c13} = 240.36^\circ)$$

$a_{3ij}$	$\det(\mathbf{A}_3)$	$\det(\mathbf{A}_{30})$
$a_{311} = a_{333} = 0.9535$		
$a_{322} = 0.987$		
$a_{312} = a_{321} = 0.025$	0.896	0.941
$a_{323} = a_{332} = 0.022$		
$a_{313} = a_{331} = 3.422 \times 10^{-3}$		

## 6 结 论

1) 理论上定性给出了超远共振条件下同向

回转三激振器水平直线放置激振系统实现振动同步传动的两大判据:同步性判据及同步状态的稳定性判据。

2) 对于三机同向回转激振系统而言,要想实现振动同步传动,首先必须实现三机同时供电条件下的系统同步运转,产生频率俘获力矩,以保证系统在振动同步传动过程中使得平均耦合力矩担任起能量传输的工具,将来自于供电电机的能量及转矩通过系统传递给断电的激振器以克服后者的负载力矩得以继续保持同步运转。

3) 由三激振器相同及三激振器不同两组试验结果可知,电机1及电机3断电前后系统稳态时的相位差变化不大,因此系统稳定时的主要运动形式在电机断电前后保持不变。说明该三机振动系统在振动同步传动状态下仍然可以维持正常工作。

4) 通过比较分析三激振器相同及三激振器不同两组试验结果:当三激振器相同时,系统在振动同步状态及振动同步传动状态的主要运动形式为圆周运动及摆动运动;而当三激振器不同时,系统在各个同步阶段的主要运动形式为摆动运动,而摆动对工程实际来说毫无意义。同时,在三激振器相同的情况下,系统更容易实现振动同步传动及各个阶段的同步状态更加稳定。本研究表明,在工程生产中应尽量选择偏心块质量一样的电机来进行振动同步及振动同步传动方面的设计。

### 参 考 文 献

[1] 李叶,耿志远,李鹤,等. 非线性振动系统非共振振动自同步特性[J]. 振动、测试与诊断, 2016, 36(2): 295-300.  
Li Ye, Geng Zhiyuang, Li He, et al. Vibration self-synchronization features of a nonlinear vibrating system under non-resonant [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2016, 36(2): 295-300. (in Chinese)

[2] 张楠,邱燕超,张学良,等. 软式非线性同步振动沉桩系统的动力学分析[J]. 振动、测试与诊断, 2017, 37(2): 320-325.  
Zhang Nan, Qiu Yanchao, Zhang Xueliang, et al. Dynamic analysis of a flexible nonlinear synchronous vibration pile driving system [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2017, 37(2): 320-325. (in Chinese)

[3] 闻邦椿,林向阳. 振动同步传动及工业应用[J]. 机械工程学报, 1984, 20(3): 26-43.

Wen Bangchun, Lin Xiangyang. Vibratory synchronization transmission and its industry applications [J]. Journal of Mechanical Engineering, 1984, 20(3): 26-43. (in Chinese)

- [4] 闻邦椿,赵春雨. 机械系统的振动同步与控制同步[M]. 北京:科学出版社, 2003:1-113.
- [5] Wen Bangchun, Fan Jian, Zhao Chunyu. Vibratory synchronization and controlled synchronization in engineering [M]. Beijing: Science Press, 2009:1-143.
- [6] 闻邦椿,李以农. 振动利用工程[M]. 北京:科学出版社, 2005:33-34.
- [7] 闻邦椿,刘凤翹. 振动机械的理论及应用[M]. 北京:机械工业出版社, 1988:218-239.
- [8] Zhang Xueliang, Wen Bangchun, Zhao Chunyu. Vibratory synchronization transmission of two exciters in a super-resonant vibrating system [J]. Journal of Mechanical Science & Technology, 2014, 28(6): 2049-2058.
- [9] Zhang Xueliang, Zhao Chunyu, Wen Bangchun. Theoretical and experimental study on synchronization of the two homodromy exciters in a non-resonant vibrating system [J]. Shock and Vibration, 2013(20): 327-340.
- [10] Zhang Xueliang, Wen Bangchun, Zhao Chunyu. Vibratory synchronization and coupling dynamic characteristics of multiple unbalanced rotors on a mass-spring rigid base [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2014, 60(2): 1-8.
- [11] Zhang Xueliang, Wen Bangchun, Zhao Chunyu. The synchronization of three homodromy coupled exciters in a non-resonant vibrating system of plane motion [J]. Acta Mechanica Sinica, 2012, 28(5): 1424-1435.
- [12] Zhang Xueliang, Wen Bangchun, Zhao Chunyu. Theoretical, numerical and experimental study on synchronization of three identical exciters in a vibrating system [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2013, 26(4): 746-757.



**第一作者简介:**刘云山,男,1975年7月生,博士生、讲师。主要研究方向为机械动力学、振动工程利用与控制。曾发表《双机双质体振动系统的自同步运动》(《中国工程机械学报》2017年第15卷第2期)等论文。

E-mail: liyunshan75@163.com