

基于叶片贡献度的叶盘系统频率转向特性*

张宏远^{1,2}, 袁惠群³, 杨文军², 赵天宇²

(1. 沈阳理工大学汽车与交通学院 沈阳, 110159)

(2. 东北大学机械工程与自动化学院 沈阳, 110819) (3. 东北大学理学院 沈阳, 110819)

摘要 为了分析频率转向对失谐叶盘系统振动的影响, 针对某型航空发动机压气机叶盘系统, 采用子结构模态综合法建立了有限元缩减模型, 从应变能角度分析了叶盘系统的频率转向特性, 计算了失谐叶盘系统模态振动贡献度因子和局部化因子。通过不同频率转向间隙对应的失谐叶盘系统受迫振动响应贡献度因子与局部化因子, 分析了频率转向间隙和叶片贡献度因子对失谐叶盘系统局部化的影响。结果表明, 频率转向对失谐叶盘系统振动局部化影响显著, 在频率转向区域, 失谐叶盘系统的振动局部化程度较高; 随着频率转向间隙变化, 叶片应变能对失谐叶盘系统局部化的贡献度呈现一定的规律性。

关键词 失谐叶盘; 频率转向; 局部化; 应变能; 贡献度

中图分类号 TH113; O342

引言

航空发动机压气机谐调叶盘具有频率转向现象^[1-2], 而加工误差、工作过程中的磨损和抑制颤振等原因会导致各叶片的固有频率的差异, 即失谐。失谐会造成严重的局部化^[3]。

国内外研究人员对于失谐叶盘系统频率转向特性开展了大量研究。文献[4-5]对叶盘频率与系统参数的关系进行了研究。文献[6-9]研究了叶盘频率转向与失谐之间的关系。文献[10-13]对叶片频率转向与振型转换特性进行了研究。王南飞等^[14]的研究表明旋转叶片必须考虑预应力影响。上述研究没有考虑在频率转向区域叶片对叶盘系统振动局部化的贡献度。

笔者采用子结构模态综合法, 考虑了预应力效应对叶盘系统有限元缩减模型的影响, 分析谐调叶盘系统的频率转向特性和应变能分布, 提出贡献度因子来衡量叶片和轮盘对失谐叶盘系统局部化的影响, 通过计算不同转向间隙对应的贡献度因子, 分析叶片对失谐叶盘系统振动局部化的贡献度。

1 叶盘系统建模

航空发动机叶盘系统如采用整体模型将花费大量计算时间, 若再考虑榫头与榫槽的非线性接触会使分析极为困难。由于失谐不能采用循环对称模型, 因此采用子结构模态综合法^[15-17], 共划分 38 个子结构, 叶片网格采用 solid45 单元, 轮盘网格采用 solid187 单元, 每个子结构共有 52 163 个单元和 79174 个节点。叶片的密度为 4 400 kg/m³, 弹性模量为 113 GPa, 泊松比为 0.3; 轮盘的密度为 4 700 kg/m³, 弹性模量为 150 GPa, 泊松比为 0.3。压气机叶盘系统子结构缩减模型如图 1 所示。

第 i 个叶盘子结构的强迫振动方程可表达为

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{K}_i \mathbf{q}_i = \mathbf{F}_i \quad (i=1, 2, \dots, 38) \quad (1)$$

其中: \mathbf{M}_i , \mathbf{K}_i , \mathbf{q}_i , \mathbf{F}_i 分别为第 i 个子结构的质量、刚度、位移和子结构的作用力矩阵。

航空发动机等旋转机械旋转部件是否考虑离心力的影响对计算结果有较大的影响, 因此, 考虑预应力的方程为

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{K}'_i \mathbf{q}_i = \mathbf{F}_i \quad (i=1, 2, \dots, 38) \quad (2)$$

* 国家自然科学基金重点资助项目(51335003); 国家自然科学基金资助项目(51775093); 辽宁省自然科学基金资助项目(20170540782); 辽宁省高等学校基本科研资助项目(LG201713); 沈阳市科技创新专项资助项目(F15-199-1-01)
收稿日期: 2017-04-12; 修回日期: 2017-06-15

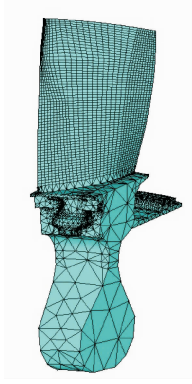


图1 叶盘系统子结构缩减模型

Fig.1 Finite element model of a bladed disk

其中: $\mathbf{K}'_i = \mathbf{K} + \mathbf{K}_s$, \mathbf{K}_s 为离心力刚度矩阵,即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_m \\ \ddot{\mathbf{q}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{mm} & \mathbf{K}'_{ms} \\ \mathbf{K}'_{sm} & \mathbf{K}'_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

令子结构界面固定,可得

$$\mathbf{M}_{ss} \{\ddot{\mathbf{q}}_s\} + \mathbf{K}'_{ss} \{\mathbf{q}_s\} = 0 \quad (4)$$

由式(4)求得正则化模态 $\boldsymbol{\phi}_1$, 即

$$\boldsymbol{\phi}_1 = [\boldsymbol{\phi}_l \boldsymbol{\phi}_h]$$

其中: $\boldsymbol{\phi}_l$ 和 $\boldsymbol{\phi}_h$ 分别为低阶和高阶模态。

$\boldsymbol{\phi}_1$ 满足以下条件

$$\boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{M}_{ss} \boldsymbol{\phi}_1 = \mathbf{E} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{K}'_{ss} \boldsymbol{\phi}_1 = \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_l^2) \quad (6)$$

其中: \mathbf{E} 为单位矩阵。

由于在分析叶盘系统的振动模态时主要关注低阶模态,所以选取低阶的模态 $\boldsymbol{\phi}_l$ 构成主模态 $\boldsymbol{\phi}_m$, 即

$$\boldsymbol{\phi}_m = \boldsymbol{\phi}_l \quad (7)$$

当忽略惯性项并只考虑界面自由度的作用力,

由方程(3)得:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{mm} & \mathbf{K}'_{ms} \\ \mathbf{K}'_{sm} & \mathbf{K}'_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

可得 $\mathbf{K}'_{sm} \{\mathbf{q}_m\} + \mathbf{K}'_{ss} \{\mathbf{q}_s\} = 0$, 即 $\{\mathbf{q}_s\} = -\mathbf{K}'_{ss}^{-1} \cdot \mathbf{K}'_{sm} \{\mathbf{q}_m\}$ 。

令 $\{\mathbf{q}_m\} = \mathbf{E}$, $\{\mathbf{q}_s\} = \boldsymbol{\phi}_j$

$$\boldsymbol{\phi}_j = -\mathbf{K}'_{ss}^{-1} \mathbf{K}'_{sm} \mathbf{E} = -\mathbf{K}'_{ss}^{-1} \mathbf{K}'_{sm}$$

约束模态

$$\boldsymbol{\phi}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \boldsymbol{\phi}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\mathbf{K}'_{ss}^{-1} \mathbf{K}'_{sm} \end{bmatrix} \quad (9)$$

第 i 个子结构的 Ritz 基向量为

$$\boldsymbol{\phi}_i = [\boldsymbol{\phi}_c \boldsymbol{\phi}_m]_i = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ \boldsymbol{\phi}_j & \boldsymbol{\phi}_1 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ -\mathbf{K}'_{ss}^{-1} \mathbf{K}'_{sm} & \boldsymbol{\phi}_1 \end{bmatrix}_i \quad (10)$$

坐标变换方程为

$$\mathbf{q}_i = \boldsymbol{\phi}_i \begin{bmatrix} \mathbf{p}_m \\ \mathbf{p}_s \end{bmatrix}_i \quad (11)$$

其中: \mathbf{p} 为子结构模态坐标; $\boldsymbol{\phi}_i$ 为坐标变换矩阵^[15]。

用式(11)将式(2)转换到模态坐标系

$$\bar{\mathbf{M}}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \bar{\mathbf{K}}_i \mathbf{q}_i = \bar{\mathbf{F}}_i \quad (i=1, 2, \dots, 38) \quad (12)$$

其中: $\bar{\mathbf{M}}_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M}_i \boldsymbol{\phi}_i$; $\bar{\mathbf{K}}_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K}'_i \boldsymbol{\phi}_i$; $\bar{\mathbf{F}}_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{F}_i$ 。

采用文献[18]的方法缩减自由度,令

$$\boldsymbol{\phi}_m = [\boldsymbol{\phi}'_1] = \boldsymbol{\phi}_l \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\phi}'_i = [\boldsymbol{\phi}_c \boldsymbol{\phi}'_m]_i = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ \boldsymbol{\phi}_j & \boldsymbol{\phi}'_1 \end{bmatrix}_i =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ -\mathbf{K}'_{ss}^{-1} \mathbf{K}'_{sm} & \boldsymbol{\phi}'_1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ -\mathbf{K}'_{ss}^{-1} \mathbf{K}'_{sm} & \boldsymbol{\phi}_l \end{bmatrix}_i \quad (14)$$

其中: $\boldsymbol{\phi}'_1$ 为截断后的模态。

$$\mathbf{q}_i = \boldsymbol{\phi}'_i \begin{bmatrix} \mathbf{p}_m \\ \mathbf{p}_a \end{bmatrix}_i \quad (15)$$

其中: \mathbf{p}_a 为 \mathbf{p}_s 缩减后的模态坐标。

式(12)可以转换为

$$\mathbf{p}_i = [\mathbf{p}_m \ \mathbf{p}_a]_i^T$$

考虑子结构之间的刚体连接,非独立坐标系

$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1^T \ \mathbf{p}_2^T \ \dots \ \mathbf{p}_{38}^T]_i^T$ 用来把整个叶盘系统转换到广义坐标系下^[15]

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\beta} \mathbf{X} \quad (16)$$

叶盘系统自由度进行缩减后的强迫振动方程为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (i=1, 2, \dots, 38) \quad (17)$$

表1列出了叶片在不同模态截断数下的部分无量纲动频。通过对比可知,模态截断数的取值显著影响计算精度,当模态截断数 $T_n < 20$ 时,精度较差;当模态截断数 $T_n \geq 20$ 时,精度较好,模态截断数的增加对精度影响较小。

2 谐调叶盘系统模态振型转换特性

2.1 谐调叶盘系统的频率转向区域

通过对叶盘系统模态分析,将获得的频率除以某一频率值进行无量纲化,将无量纲固有频率按照节径排列,可以大致分成4个模态族,如图2所示。图中的模态族II和模态族III的0~6节径构成了谐调叶盘系统的频率转向区域。图中所涉及的频率和应变能等都除以某一频率值无量纲化。

由图2可知模态族I的频率都集中在1.0附近,由图3可知模态族I的大部分应变能在叶片上,

表1 不同模态截断数下叶片无量纲动频

Tab.1 The dimensionless dynamic frequency of blade with different modal truncation numbers

阶数	$T_n=5$	$T_n=10$	$T_n=15$	$T_n=20$	$T_n=40$	$T_n=60$
1	0.964 29	0.964 27	0.956 89	0.956 86	0.956 86	0.956 86
2	1.026 74	1.026 71	1.018 39	1.018 04	1.018 04	1.018 03
3	1.027 71	1.027 70	1.019 11	1.018 04	1.018 04	1.018 03
4	1.039 94	1.039 93	1.036 37	1.036 26	1.036 26	1.036 26
5	1.041 63	1.041 60	1.036 47	1.036 26	1.036 26	1.036 26
6	1.050 71	1.050 70	1.050 59	1.050 50	1.050 50	1.050 50
7	1.051 04	1.051 04	1.050 71	1.050 50	1.050 50	1.050 50
8	1.060 33	1.060 31	1.058 90	1.058 80	1.058 80	1.058 80
9	1.061 17	1.061 16	1.059 29	1.058 80	1.058 80	1.058 80
10	1.065 36	1.065 31	1.064 06	1.063 99	1.063 99	1.063 99

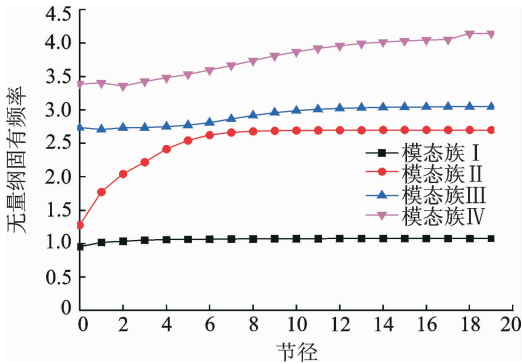


图2 谐调叶盘系统频率转向特性

Fig.2 The frequency steering characteristics of the tuned bladed disk system

节径的变化对叶盘的频率基本没有影响,在该模态族为叶片模态;由图2和图3可知,在模态族II的0~6节径叶盘的振动能量大部分在轮盘上,节径的变化对叶盘的振动影响显著,模态族II为轮盘模态;同理可知,模态族III的0~6节径为叶片模态。

图4为模态族II在频率转向区域的振动特性,选择节径数为1~7和激励阶次为1~6时叶盘系统应变能分布。从图4可知:在频率转向区域(0~6节径),应变能随着节径数的增大而增大,在节径数为6时达到最大,当超过频率转向区域,即节径

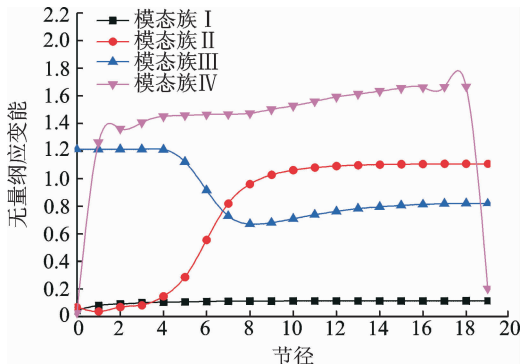


图3 各模态族叶片应变能

Fig.3 Strain energy of modal families

数为7时,叶盘系统的应变能大幅度降低;在同一节径数下,当节径数与激励阶次相同时叶盘系统的应变能最大,比如图中当节径为3、激励阶次为3时的应变能,这一结论符合三重点原理^[19];当激励阶次和节径数同为6时谐调叶盘系统的应变能最大。

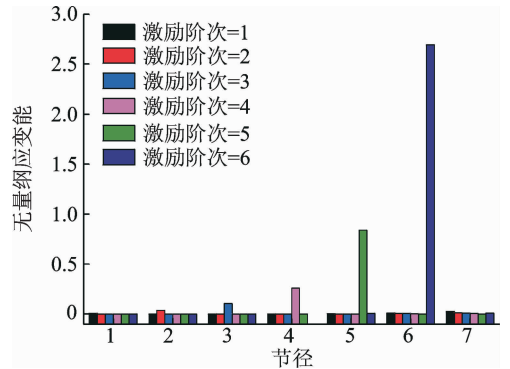


图4 模态族II在频率转向区域应变能分布

Fig.4 Strain energy of modal family II in the region of frequency veering

2.2 频率转向间隙

在频率转向区域,节径数的变化显著影响叶盘系统模态振动局部化。为了分析相邻模态族叶片应变能对叶盘系统振动的贡献度,引入了频率转向间隙^[10],相对频率间隙 d 计算公式为

$$d = \left[\frac{(f_2 - f_1)_p}{f_{2\max} - f_{1\min}} \right]_{\min} \quad (18)$$

其中: f_1, f_2 和 p 分别为模态族I的无量纲频率、模态族II的无量纲频率及对应的节径; $f_{1\min}$ 和 $f_{2\max}$ 分别为模态族I最小无量纲频率和模态族II的最大无量纲频率。

采用式(18)以模态族II和模态族III为例,计算了相邻两个模态族在频率转向区域的频率转向间隙,计算结果如表2所示。

表 2 模态族 II 和模态族 III 频率转向间隙

Tab. 2 The frequency veering distance of modal family II and III

节径	模态族 II 无量纲频率	模态族 III 无量纲频率	无量纲频率 转向间隙
0	1.278	2.736	0.824
1	1.776	2.708	0.525
2	2.042	2.733	0.338
3	2.219	2.736	0.233
4	2.414	2.750	0.139
5	2.544	2.771	0.089
6	2.624	2.810	0.071
7	2.663	2.865	0.076
8	2.680	2.918	0.089
9	2.689	2.960	0.101
10	2.693	2.989	0.110
11	2.696	3.009	0.116
12	2.697	3.023	0.121
13	2.698	3.032	0.124
14	2.699	3.038	0.126
15	2.699	3.042	0.127
16	2.699	3.044	0.128
17	2.700	3.046	0.128
18	2.700	3.047	0.129
19	2.700	3.047	0.129

由表 2 可知,随着节径数的增加,频率转向间隙呈现先减小再增加的趋势。频率转向间隙在 6 节径时达到最小,最小值为 0.071,在频率转向区域(0~6 节径)频率转向间隙数值变化非常明显,在远离频率转向区域(9~19 节径),频率转向间隙基本保持不变。

3 叶片对失谐叶盘系统振动局部化贡献度

3.1 贡献度因子

从谐调叶盘系统模态振型转换特性可知,在频率转向区域,叶盘系统的振幅和应变能随着节径数的变化呈现一定的规律性,为了评价在频率转向区域叶片和轮盘对失谐叶盘系统振动局部化的影响,从模态应变能角度定义了式(19)的贡献度因子。

叶片贡献度因子

$$C_b = \frac{\left| \sum_{i=1}^{38} E_{b_i} \right|}{\left| \sum_{i=1}^{38} E_{b_i} + E_{d_i} \right|} \quad (19)$$

其中: C_b 为叶片贡献度因子; E_{b_i} 为第 i 个扇区叶片应变能; E_{d_i} 为第 i 个扇区轮盘应变能。

3.2 失谐叶盘系统模态振动局部化贡献度

叶片刚度失谐后会使得叶盘系统模态振型出现较大改变,各叶片的振动能量也不同,当较大的振动能量集中在几个叶片上时就会导致模态振动局部化现象。为了定量描述叶盘系统振动局部化程度,引入了文献[10]定义的局部化因子,该局部化因子的定义如式(20)所示。由于文中叶片刚度失谐模拟采用叶片弹性模量失谐来实现,三种失谐模式是通过实验测得的三组叶片静频,然后采用二分法和有限元分析来识别失谐参数,通过反复迭代计算,最终获得与实验测得的叶片静频对应的弹性模量值。通过计算三种失谐模式下叶盘系统在频率转向区域的局部化因子,获得如图 5 所示的局部化因子随激励频率的变化情况。

$$L = \sqrt{\frac{(\varphi_{bj}^2 - \frac{1}{N-1} \sum_{i=1, i \neq j}^N \varphi_{bi}^2)}{(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1, i \neq j}^N \varphi_{bi}^2)}} \quad (20)$$

从图 5 可知,随着激励频率的增大,叶盘系统的局部化因子开始变化较小,然后逐渐增大。当激励频率为 2.6 时,模态族 II 和模态族 III 的频率转向间隙为最小,失谐叶盘系统振动局部化显著,导致在该处振动局部化因子急剧增加。

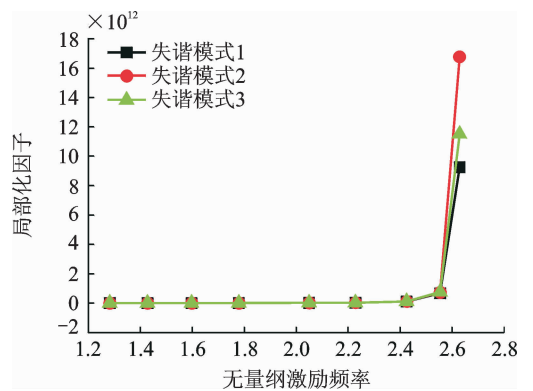


图 5 激励频率对失谐叶盘系统模态振动局部化影响
Fig. 5 Effect of excitation frequency on the mode vibration localization of the mistuned bladed disk system

3.3 失谐叶盘系统受迫振动响应局部化贡献度

在频率转向区域,对失谐叶盘系统进行受迫振动分析,计算三种失谐模式下频率转向间隙对应模态族 II 的叶片贡献度因子和局部化因子,频率转向间隙(无量纲)对失谐叶盘系统振动受迫响应贡献度如图 6 所示。

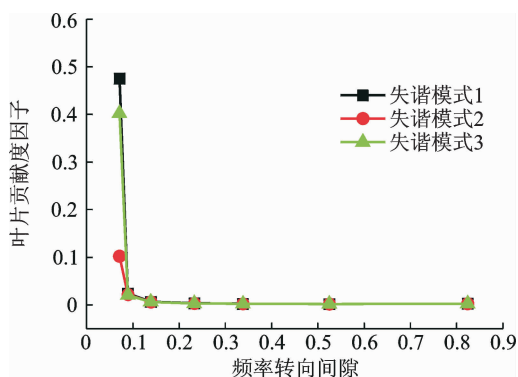


图6 频率转向间隙对失谐叶盘系统振动响应贡献度影响
Fig. 6 Effect of frequency veering distance on the contribution degree of forced vibration response

从图6可知,随着频率转向间隙的增大,叶片贡献度因子逐渐减小,在最小频率转向间隙处三种失谐模式的叶片贡献度因子最小,其中失谐模式2的叶片贡献度因子最小。图7分析了叶片贡献度因子与叶盘系统局部化因子的关系,从图上可知,随着叶片贡献度因子的增大,局部化因子增大,叶盘系统局部化程度逐渐增加。

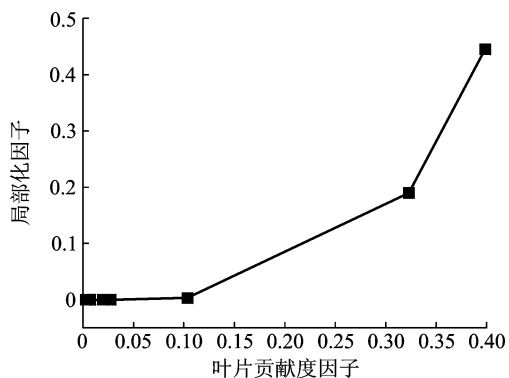


图7 叶片贡献度对失谐叶盘系统振动响应局部化影响
Fig. 7 Effect of the contribution degree on the localization of forced vibration response

4 结束语

基于航空发动机压气机叶盘系统建立了有限元模型,进行了模态分析和受迫振动响应分析,通过计算频率转向间隙、贡献度因子和局部化因子,从应变能角度研究了在频率转向区域谐调和失谐叶盘系统振动特性;分析了谐调叶盘系统模态振型转换特性,找到了频率转向区域,在模态族II和模态族III发生了频率转向现象;在频率转向区域叶盘系统的应变能随节径和激励阶次的变化而变化,在激励阶次6和节径数为6时应变能最大;定义了贡献度因子,通

过计算贡献度因子分析了失谐叶盘系统模态振动局部化贡献度;通过计算局部化因子,分析了失谐叶盘系统受迫振动响应,在频率转向区域叶片贡献度因子和局部化因子呈现一定的规律性。

参 考 文 献

- [1] Kuttler J R, Sigillito V G. On curve veering[J]. Journal of Sound and Vibration, 1981, 75(4): 585-588.
- [2] Rivas-Guerra A J, Mignolet M P. Maximum amplification of blade response due to mistuning: localization and mode shape aspects of the worst disks[J]. Journal of Turbomachinery, 2003, 125: 442-454.
- [3] Ewins D J, Imregun M. Vibration modes of packeted bladed disks[J]. ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 1984, 106: 175-180.
- [4] Wei S T, Pierre C. Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry part 2: forced vibrations[J]. ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 1988, 110: 439-449.
- [5] Castanier M P, Ottarsson G, Pierre C. A reduced order modeling technique for mistuned bladed disks[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1997, 119: 439-447.
- [6] Kenyon J A, Griffin J H, Kim N E. Sensitivity of turned bladed disk response to frequency veering [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2005, 127: 835-842.
- [7] Hussein M I, Pierre C, Castanier M P. Correlation of tuned free vibration characteristics with mistuning sensitivity for a bladed disk [C]// AIAA 2003-1544. Norfolk, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2003: 1-18.
- [8] 赵志彬, 贺尔铭, 王红建. 叶盘振动失谐敏感性与频率转向特性内在关系研究[J]. 机械科学与技术, 2010, 29(12): 1606-1611.
Zhao Zhibin, He Erming, Wang Hongjian. Correlation between frequency veering and vibration mistuning sensitivity of a bladed disk [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2010, 29(12): 1066-1611. (in Chinese)
- [9] 李益萱, 贺尔铭, 王红建, 等. 叶盘结构频率转向特征的量化分析研究[J]. 西北工业大学学报, 2010, 28(5): 764-768.
Li Yixuan, He Erming, Wang Hongjian, et al. Quan-

- titative analysis of the frequency veering properties of a bladed disk [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2010, 28(5):764-768. (in Chinese)
- [10] 王红建,贺尔铭,赵志彬. 频率转向特征对失谐叶盘模态局部化的作用[J]. 中国机械工程, 2009, 20(1):82-85.
Wang Hongjian He Erming Zhao Zhibin. Effects of frequency veering features on mode localization of mistuned bladed disks[J]. China Mechanical Engineering, 2009, 20(1):82-85. (in Chinese)
- [11] 王建军,卿立伟,李其汉. 旋转叶片频率转向与振型转换特性[J]. 航空动力学报, 2007, 22(1):8-11.
Wang Jianjun, Qing Liwei, Li Qihan. Frequency veering and mode shape interaction for rotating blades[J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(1):8-11. (in Chinese)
- [12] 崔韦,王建军. 裂纹叶片频率转向和振型转换特性研究[J]. 推进技术, 2015, 36(4):614-621.
Cui Wei, Wang Jianjun. Frequency veering and mode shape interaction for a cracked blade[J]. Journal of Propulsion Technology, 2015, 36(4):614-621. (in Chinese)
- [13] 任兴民,南国防,秦洁,等. 航空发动机叶片“频率转向”特性研究[J]. 西北工业大学学报, 2009, 27(2):269-273.
Ren Xingmin, Nan Guofang, Qin Jie, et al. Studying frequency veering characteristics of aircraft engine blade with beam function combination method [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2009, 27(2):269-273. (in Chinese)
- [14] 王南飞,南国防,蒋东翔. 有限元法在透平叶片振动研究中的应用[J]. 振动、测试与诊断, 2016, 36(6):1216-1221.
Wang Nanfei, Nan Guofang, Jiang Dongxiang. The study of turbine blade vibration based on the finite element method[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2016, 36(6):1216-1221. (in Chinese)
- [15] Craig R R, Bampton M C C. Coupling of substructures for dynamic analyses[J]. AIAA Journal, 1968, 6(7):1313-1319.
- [16] Bladh R, Pierre C, Castanier M P, et al. Dynamic response predictions for a mistuned industrial turbomachinery rotor using reduced-order modeling[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2002, 124(2):311-324.
- [17] Bai Bin, Bai Guangchen, Li Chao, et al. Vibratory characteristic analysis of integral mistuned bladed disk assemblies for aeroengine[J]. Proc IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2015, 229(16):2921-2938.
- [18] Craig R R. A review of time-domain and frequency-domain component-mode synthesis methods[J]. International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, 1987, 2(2):59-72.
- [19] 宋兆泓. 航空燃气涡轮发动机强度设计[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 1988:105-106.



第一作者简介:张宏远,男,1980年8月生,博士、副教授。主要研究方向为航空发动机振动与控制。曾发表《基于激励阶次的失谐叶盘振动响应局部化研究》(《东北大学学报:自然科学版》2016年第37卷第3期)等论文。

E-mail: zhy_sylu@163.com