

# 贴附型局域共振声子晶体双层板的带隙特性<sup>\*</sup>

钱登辉<sup>1</sup>, 史治宇<sup>2</sup>, 吴静红<sup>1</sup>

(1. 苏州科技大学土木工程学院 苏州, 215011)

(2. 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室 南京, 210016)

**摘要** 针对板面之间周期性贴附柱状散射体的局域共振声子晶体双层板结构, 采用有限元法计算了该结构能带结构、特征模态所对应的位移场以及相应有限周期双层板结构的传输曲线, 对其展现出的带隙特性进行了研究。数值结果和分析表明, 当激励点和响应点位于上下异侧板时, 一条起始频率低并且带隙宽的完全带隙可以被打开。该带隙的打开可以认为是共振单元的振动模态和上下板的板振动模态相互耦合作用的结果。同时, 由双板间空气声腔所带来的声振耦合效应对带隙的影响可以忽略不计。此外, 双层板结构展现出许多相应单板结构共同的带隙特性, 但其拥有单板所无法比拟的宽带隙特性。通过改变结构相关参数, 可以实现对带隙的有效调节。

**关键词** 带隙特性; 声子晶体双层板结构; 能带结构; 位移场; 传输曲线; 声振耦合

**中图分类号** TH113.1

## 引言

双层板以其质量轻、刚度大以及抗冲击性能好等优点而被广泛应用于潜艇、飞机、汽车以及大型发电机组等工业产品的外壳结构<sup>[1-2]</sup>。振动的传播大多以固体结构为主要介质, 其传播距离远、衰减小, 且在传播过程中不断向外辐射噪声。以飞机舱室为例, 发动机振动和空气动力等引起的结构振动传播至舱室周边的结构引起其振动, 继而向舱室内辐射噪声, 从而给乘客的舒适性带来一定的影响。声子晶体概念的提出为结构减振降噪的理论研究和结构设计开辟了新的研究方向。声子晶体是一种具有弹性波带隙特性的人工周期材料, 在带隙频率范围内的振动无法通过声子晶体传播, 所以在减振降噪领域具备广阔的应用前景。过去几十年来, 声子晶体的研究大多集中在带隙计算方法和特性研究。Bragg 散射<sup>[3-5]</sup>和局域共振<sup>[3,6-8]</sup>是带隙能够被打开的两种主要机理, 前者的带隙所对应频段比后者高两个数量级<sup>[6]</sup>, 这就意味着只有局域共振型声子晶体才可以通过较小的周期尺寸来抑制较低频率的振动传播。因此, 通过将传统局域共振型声子晶体的设计思路引入到双层板中构成局域共振型声子晶体双层板结构, 并对其展现出的带隙

特性进行详细研究, 为处理工程上低频域减振降噪设计具有理论意义和应用价值。

近年来, 通过在一些如杆、梁、单板等基本弹性结构中引入局域共振型声子晶体设计思路所构成的周期性结构获得了广泛的研究。对于杆梁结构, Wang 等<sup>[9]</sup>研究了纵向弹性波在由周期贴附谐振子的细长梁所构成的准一维结构中的传播特性。Yu 等<sup>[10]</sup>通过实验和理论相结合研究了在周期布置谐振子的铁摩辛柯梁中的弯曲振动特性, 理论和实验结果具备很好的一致性。对于局域共振型声子晶体单板结构, 在研究过程中形成了两种结构设计思路: a. 填充型系统, 主要是通过将单板周期挖孔并填充软材料而形成; b. 贴附型系统, 通过在单板表面周期贴附共振单元而形成。文献<sup>[11-12]</sup>分别以橡胶和包覆橡胶的硬材料作为共振单元研究了二元和三元填充型局域共振声子晶体单板结构的带隙特性, 结果表明, 通过一定的参数调节, 在低频域均可获得一条完整的带隙, 并且通过对半径、厚度等相关参数的调节可以实现带隙的调控。与填充型系统类似, Oudich 等<sup>[13]</sup>分别研究了在单板表面周期贴附柱状橡胶共振单元和橡胶-铅共振单元所构成的二元和三元贴附型系统的带隙特性, 并指出低频带隙是所贴附共振单元的局域共振与基板 Lamb 波模态相互

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(11847009); 江苏省自然科学基金资助项目(BK20180972); 苏州科技大学科研基金资助项目(XKQ2018007)

收稿日期: 2018-05-03; 修回日期: 2018-08-01

耦合的结果。此外,以弹簧振子作为贴附型系统共振单元的简化模型, Xiao 等<sup>[14]</sup>研究了弯曲波在周期布置弹簧-质量块的单板结构上的传播特性,并且发现弹簧-质量块的共振频率与带隙存在很大的对应关系。上述所有关于贴附型系统的研究均展示了能带结构可以在低频域打开一条带隙,但是由于对应于沿着板面方向振动模式和垂直于板面方向振动模式的能带错综交织在一起,因而带隙宽度很窄。基于此, Ma 等<sup>[15]</sup>提出了一个由3层球状共振单元构成的新的局域共振型声子晶体单板结构,发现由该种结构形成的能带结构图中出现了一个较宽的低频段带隙。在填充型系统和贴附型系统的研究基础上, Li 等<sup>[16]</sup>将这两种系统的共振单元结合起来,研究了 Lamb 波在由该种综合型共振单元构成的声子晶体单板结构中的传播特性,发现该种声子晶体板的带隙较原有两类声子晶体板的带隙均有了很大改善。Qian 等<sup>[17]</sup>通过在弹簧振子周围环绕附加弹簧,研究了由该类共振单元构成的局域共振型声子晶体双层板结构的弯曲振动传输特性。

笔者在现有对形式多样的局域共振型声子晶体单板结构带隙特性研究的基础上,通过在双层板间周期贴附由软-硬-软材料构成的共振单元,从而构造贴附型局域共振声子晶体双层板结构。采用有限元法研究其带隙的形成机制和调节规律,并通过与相应单板结构的带隙特性进行对比,研究了单/双板的通性以及双板的特性。此外,还研究了空腔与双层板间声振耦合效应以及软材料黏性对带隙的影响规律和机理。

## 1 模型和方法

如图 1(a)所示,贴附型局域共振声子晶体双层板结构是通过在双层板结构的上下板面之间周期贴附 2 组分圆柱状局域共振柱体而形成。对于该柱体,其由上中下 3 层粘贴而成,其中上层和下层完全一致,由软材料橡胶构成,而中间层由硬材料铅构成。此外,双层板的上下板完全一致,且由铝材料构成。在晶胞中,晶格常数、上下板的厚度、圆柱状柱体的半径、橡胶层柱体的高度以及铅层柱体的高度分别为  $a, e, r, h_1$  和  $h_2$ , 如图 1(b)所示。表 1 给出了计算所用到的所有材料参数。笔者在研究材料为线弹性和各向同性时该结构的带隙特性基础上,继而研究了软材料黏性对带隙的影响规律。

对于贴附型局域共振声子晶体双层板的能带结构,采用有限元法来计算,并且借助于商业软件 COMSOL Multiphysics 来实现。对于有限元网格

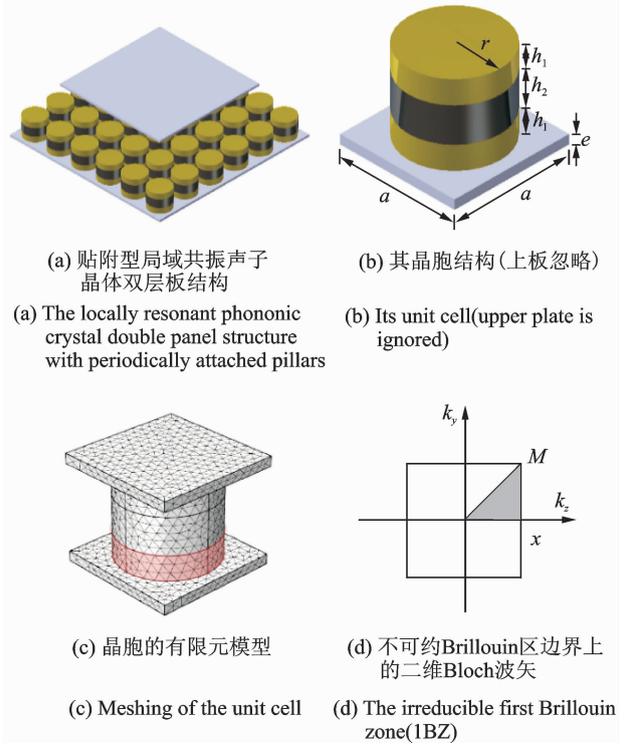


图 1 结构模型和有限元模型

Fig. 1 Models of structure and finite element

的划分,均采用四面体网格且晶胞的有限元模型如图 1(c)所示。从图中可以看出,在计算能带结构时只需考虑单个晶胞,这可以归因于结构的周期性。对于边界条件,非接触面均采用无压力自由边界条件,而相邻晶胞的交界面采用由 Bloch-Floquet 定理导出的周期边界条件<sup>[12-13]</sup>,即

$$u_i(x+a, y+a) = u_i(x, y) e^{-i(k_x a + k_y a)} \quad (i = x, y, z) \quad (1)$$

其中:当  $i$  取  $x, y$  和  $z$  时,  $u_i$  分别表示沿  $x$  方向、 $y$  方向和  $z$  方向的位移;  $k_x$  和  $k_y$  为不可约 Brillouin 区边界上的二维 Bloch 波矢  $\mathbf{k}$  沿  $x$  方向和  $y$  方向的分量(见图 1(d))。

对于有限元网格划分,网格尺寸越小,计算收敛性越好,但相应计算时间越长。所以,选择合适的网格划分很重要。模型中由于橡胶比环氧树脂和铅软,变形更大,所以橡胶层的网格划分必须要更细化。

将周期边界条件式(1)代入到自由振动的有限元特征方程中,可以得到

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2)$$

在式(2)中,刚度矩阵  $\mathbf{K}$  和质量矩阵  $\mathbf{M}$  均含有与 Bloch 波矢相耦合的项,与传统有限元特征方程中的刚度矩阵和质量矩阵有所区别。

式(2)即为关于  $\omega^2$  的典型广义特征值问题。对于每一给定的 Bloch 波矢  $\mathbf{k}$ , 通过求解特征值得

到相应的一系列特征频率。通过遍历所有的不可约 Brillouin 区边界上的波矢,最终可得到该贴附型局域共振声子晶体双层板结构的能带结构。

## 2 数值结果和分析

### 2.1 能带结构、位移场及传输曲线

图 2(b)给出了贴附型局域共振声子晶体双层板结构的能带结构,其中计算所用到的材料参数和几何参数分别如表 1 和表 2 所示。为了验证计算所得能带结构的准确性,相应有限双层板结构的弯曲振动和纵向振动的传输曲线分别如图 2(a)和(c)所示。该有限双层板结构由  $8 \times 8$  个晶胞周期排列而

成,并且激励点和响应点分别放置在下板的一端和上板的另一端,如图 3 所示。

表 1 计算所用到的材料参数

Tab. 1 Materials' parameters used in calculations

材料	密度/ ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	弹性模量/ ( $10^{10} \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ )	泊松比
环氧树脂	1 180	0.435	0.368
橡胶	1 300	$1.175 \times 10^{-5}$	0.469
铅	11 600	4.08	0.370

表 2 计算所用到的几何参数

Tab. 2 Geometric parameters used in calculations m

$a$	$e$	$r$	$h_1$	$h_2$
0.1	0.005	0.04	0.01	0.03

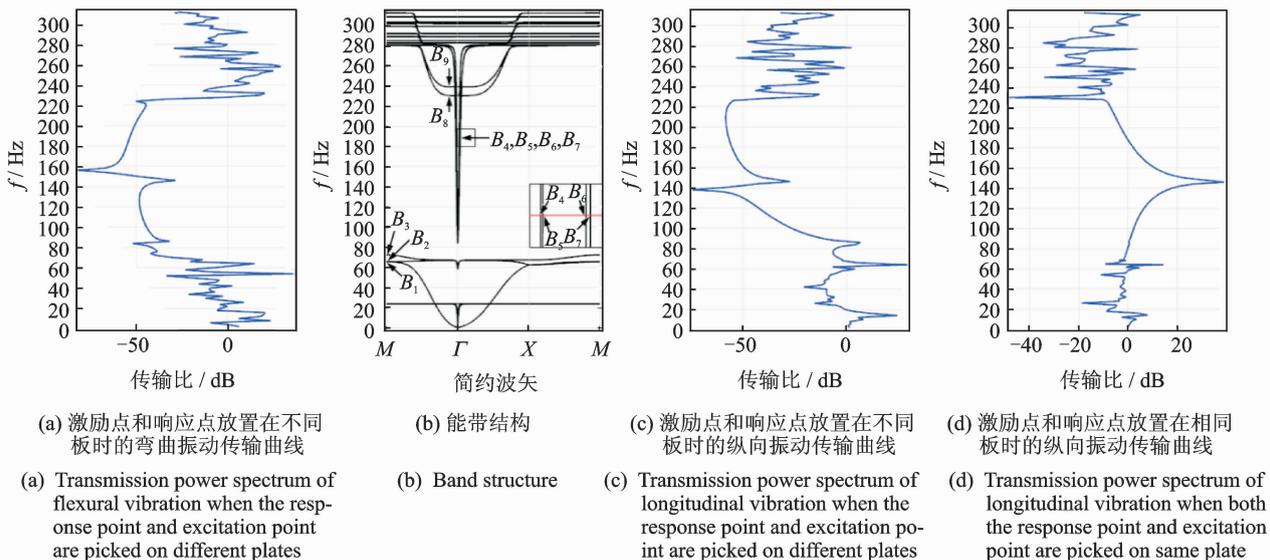


图 2 贴附型局域共振声子晶体双层板结构的能带结构和相应有限  $8 \times 8$  双层板结构的传输曲线

Fig. 2 Band structure of the proposed double panel structure and transmission power spectrums of the corresponding finite  $8 \times 8$  system

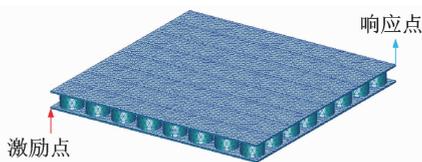


图 3 由  $8 \times 8$  个晶胞周期排列而成的有限局域共振双层板结构的有限元模型

Fig. 3 Meshing of the finite locally resonant double panel structure made of  $8 \times 8$  unit cells

由图 2(b)可以看到,能带结构在  $72 \sim 83$  Hz 之间打开了一条狭窄的带隙;但是由图 2(a)和(c)可以看到,不论是弯曲振动还是纵向振动在有限结构中传递,传输曲线的衰减频域均非常宽,这与已有研究中的无限结构的带隙频段和有限结构的衰减频段

相吻合这一结论<sup>[17-19]</sup>相违背。为了发现更多双层板结构传输曲线的衰减特性,当激励点和响应点均放置在下板时,纵向振动传输曲线如图 2(d)所示。由图可以看出,激励点和响应点放置在不同板时的纵向振动传输曲线所存在的很宽的衰减频域并未出现在这里,并且与之对应的频域内的振动还有所加强。为了揭示该有限局域共振双层板结构的传输曲线展示出来的典型现象的机理,作出了与图 2(b)中标注的特征模态相对应的位移场,如图 4 所示。

对于模态  $B_3$ 、 $B_8$  和  $B_9$ ,位移场为柱体共振单元沿  $z$  方向拉伸振动的模态与双层板垂直板面向外弯曲振动的模态共同作用的结果。其中:模态  $B_3$  中振动能量集中在柱体中而双层板保持静止;模态  $B_8$  和  $B_9$  则是柱体中的铅层充当静止层,但不同的是,模

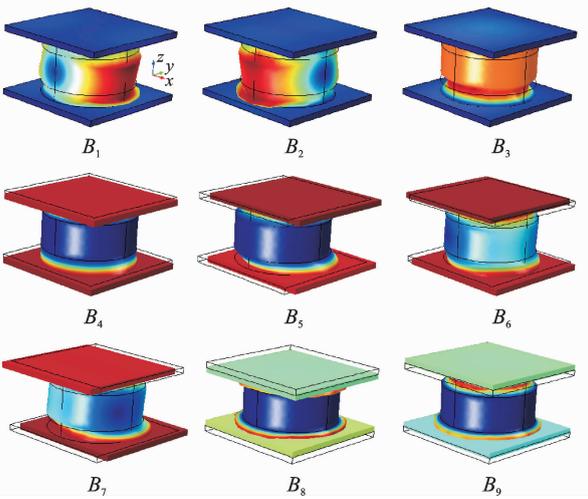


图 4 与图 2(b)中标注的特征模式相对应的位移场  
Fig. 4 The displacement fields of eigenmodes labeled in Fig. 2(b)

态  $B_8$  中上下板以相反的相位达到弯曲振动动态平衡,而模式  $B_9$  中上下板以相同的相位达到弯曲振动动态平衡。基于此,模式  $B_8$  和  $B_9$  被分别称之为对称弯曲振动模式和反对称弯曲振动模式。这些模式耦合作用的结果,一条在模式  $B_3$ ,  $B_8$  和  $B_9$  之间的频率区间为 72~230 Hz 的局部弯曲振动带隙被打开,该带隙频段与图 2(a)所示的弯曲振动传输曲线中的衰减频段基本吻合。

对于模式  $B_1$  和  $B_2$ ,位移场为柱体共振单元绕  $xy$  平面内轴线旋转振动的模式与双层板垂直板面向外剪切振动的模式相互耦合的结果。其中,模式  $B_1$  和  $B_2$  中振动能量集中在柱体中而双层板保持静止。对于模式  $B_4 \sim B_7$ ,位移场为柱体共振单元沿  $xy$  平面内轴线平移振动的模式与双层板在板面内剪切振动的模式共同作用的结果。在这 4 种振动模式中,柱体的中间铅层均保持静止。不同的是,模式  $B_4$  和  $B_5$  中上下板以相反的相位达到纵向振动动态平衡,而模式  $B_6$  和  $B_7$  中上下板以相同的相位达到纵向振动动态平衡。相似地,模式  $B_4 \sim B_5$  和模式  $B_6 \sim B_7$  被分别称之为反对称纵向振动模式和对称纵向振动模式。作为这些模式耦合作用的结果,一条频率区间为 66~83Hz 的局部纵向振动带隙被打开,但在图 2(c)和(d)所示的相应频段的纵向振动传输曲线中的衰减并不明显,这与文献[20]所描述的现象一致。

此外,由图 4 可以看出,反对称纵向振动模式  $B_4$  中上板的振动相位与对称纵向振动模式  $B_6$  中上板的振动相位相反。同样地,反对称纵向振动模式  $B_5$  中上板的振动相位与对称纵向振动模式  $B_7$  中上

板的振动相位相反。于是,当振动模式  $B_4 \sim B_7$  相叠加时,上层板的振动便被削弱,这就是图 2(c)所示的激励点和响应点分别放置在上下板时纵向振动传输曲线中存在很宽频段衰减域的原因。与此同时,在叠加过程中,下层板的振动会加强,这同样是因为图 2(d)所示的激励点和响应点均放置在下板时纵向振动传输曲线中存在很宽频段加强域。为了进一步说明该衰减特性,给出了频率落在衰减域的有限双层板结构的振型图,如图 5 所示。这里,计算所用到的模型如图 3 所示,激励点施加三个方向的位移激励并且频率点选为  $f=140$  Hz。由图 5 可以看出,当弯曲激励和纵向激励均施加于下板时,弯曲振动和纵向振动均无法通过上层板传播,而仅仅纵向振动可以通过下层板传播。总的来说,当振源和响应域分别在双层板结构的异侧时,以模式  $B_2$  和  $B_3$  对应的更高频率为起始频率以及模式  $B_8$  对应的频率为终止频率的带隙可以被认为是一条在相应有限结构中弯曲和纵向振动均有衰减的完全带隙。

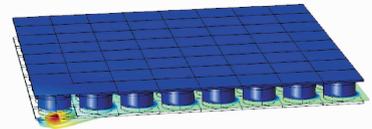


图 5 频率落在衰减域的有限双层板结构的振型图 ( $f=140$  Hz)  
Fig. 5 The vibration mode of the frequency located inside the frequency range of attenuation( $f=140$  Hz)

## 2.2 声振耦合对能带结构的影响

如果不忽略双板间的空气,则可进一步考虑声振耦合效应对贴附型局域共振声子晶体双层板结构的影响。这里分别对晶胞内结构部分和空腔部分进行有限元建模,如图 6 所示,并分别在结构和空腔部分的边界上布置周期边界条件。计算用到的结构部分材料参数和几何参数均与表 1 和表 2 所示相同。此外,空腔部分空气的参数为:密度  $\rho_0 = 1.29$  kg/m<sup>3</sup>;声速  $c_0 = 340$  m/s。

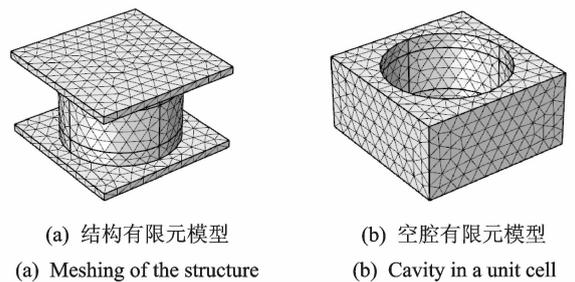


图 6 晶胞内结构有限元模型及空腔有限元模型  
Fig. 6 Meshing of the structure and cavity in a unit cell

与图 2 类似,图 7 给出了考虑声振耦合效应时的贴附型局域共振声子晶体双层板结构的能带结构、激励点和响应点放置在不同板时的弯曲振动传输曲线、激励点和响应点放置在不同板时的纵向振动传输曲线,以及激励点和响应点放置在相同板时的纵向振动传输曲线。通过对比 7(b)和 2(b)可以发现,声振耦合对带隙形成的主要能带  $B_1 \sim B_7$  和反对称弯曲振动能带  $B_9$  基本无影响,但却对对称弯曲振动能带  $B_8$  影响较大,使得原有带隙将不再被打

开。但是对比图 7(a),(c),(d)和图 2(a),(c),(d)可以发现,虽然声振耦合对传输曲线有影响,但是并不影响激励点和响应点放置在不同板时的弯曲振动和纵向振动的传输衰减频域,且同样激励点和响应点放置在相同板时的纵向振动传输曲线不存在衰减区域。由此可见,传输曲线展现出的现象与能带结构展现的现象不一致。为了进一步揭示该特性,笔者作出了频率落在衰减域的有限双层板结构的振型和空腔内的声压场。

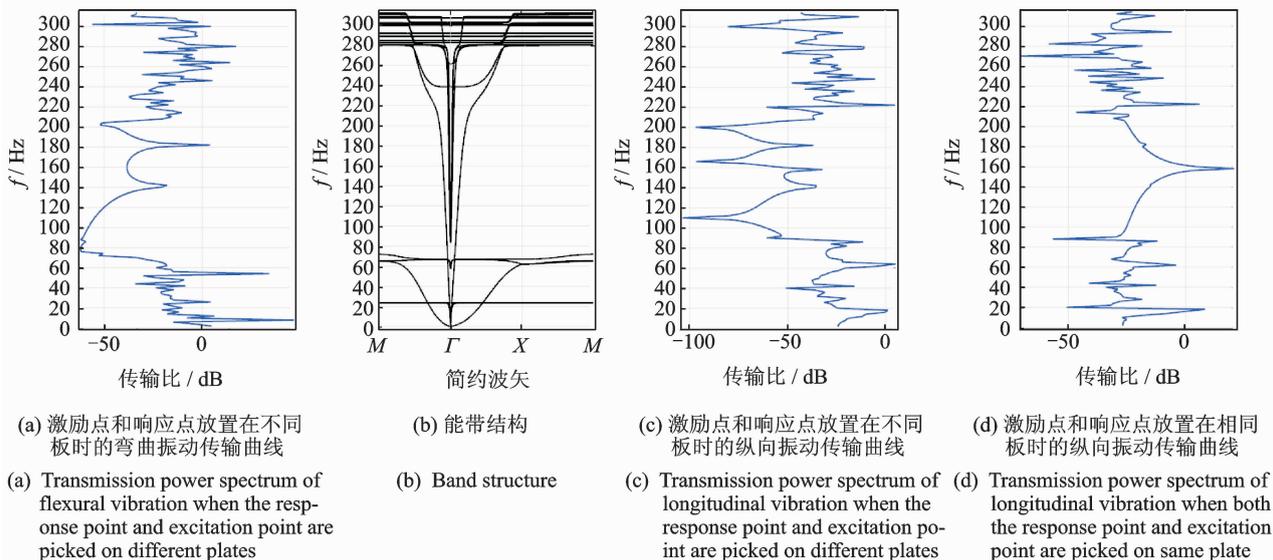


图 7 考虑声振耦合效应的贴附型局域共振声子晶体双层板结构的能带结构和相应有限  $8 \times 8$  双层板结构的传输曲线  
 Fig. 7 Band structure of the proposed double panel structure and transmission power spectrums of the corresponding finite  $8 \times 8$  system with the coupling between sound and vibration

图 8 和图 9 分别给出了频率落在衰减域的有限双层板结构的振型和空腔内的声压场。这里,激励点施加三个方向的位移激励并且频率点选为  $f = 160$  Hz。由图可以看出,在衰减频域内,当弯曲激励和纵向激励均施加于下板时,弯曲振动和纵向振动均无法通过上层板传播,而仅仅纵向振动可以通过下层板传播;但是声压则可以沿着空腔无限传播。这就是图 7(b)所示能带结构中带隙不能被打开的

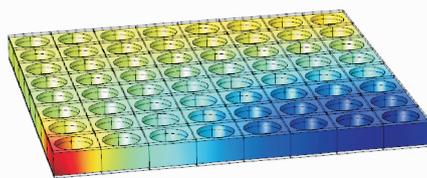


图 9 频率落在衰减域的有限双层板结构的声压场 ( $f = 160$  Hz)  
 Fig. 9 The sound pressure field of the frequency located inside the frequency range of attenuation ( $f = 160$  Hz)

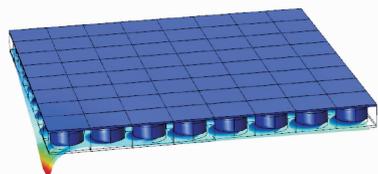


图 8 频率落在衰减域的有限双层板结构的振型图 ( $f = 160$  Hz)  
 Fig. 8 The vibration mode of the frequency located inside the frequency range of attenuation ( $f = 160$  Hz)

原因,即能带  $B_8$  表征了双板对称弯曲振动模式与空腔内声场相耦合,虽然结构部分振动被抑制,但声场部分却一直在传播。对于外场来讲,结构的振动和经由结构振动带来的辐射噪声可以认为被很好地抑制。因此,基于减振降噪的应用背景,在研究包含空气声腔的双层板能带结构的带隙特性时,声振耦合效应可以完全被忽略。

### 2.3 同参数下双板结构与单板结构的能带结构对比

若图 1(a) 所示的贴附型局域共振声子晶体双层板结构的上层板和上层柱体橡胶层被取走, 则可形成贴附型局域共振声子晶体单板结构。该单板结构的能带结构如图 10(a) 所示。其中, 计算用到的参数与图 2(b) 所示的参数一致, 具体如表 1 和 2 所示。为了便于对比, 再次给出了图 2(b) 所示同参数下的双层板结构的能带结构, 如图 10(b) 所示。此外, 给出了与图 10(a) 中标注的特征模式相对应的位移场, 如图 11 所示。

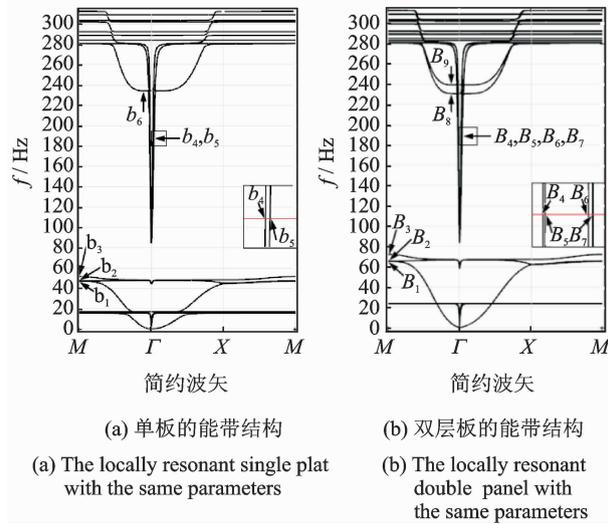


图 10 同参数下局域共振型声子晶体

Fig. 10 Band structures of the locally resonant single plate and the locally resonant double panel with the same parameters

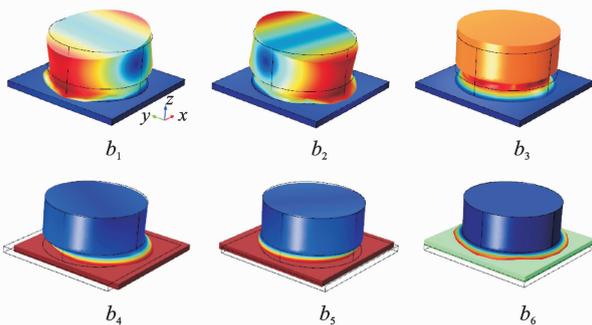


图 11 与图 10(a) 中标注的特征模式相对应的位移场

Fig. 11 The displacement fields of eigenmodes labeled in Fig. 10(a)

与双层板结构的能带结构相似, 位移场为柱体共振单元沿  $z$  方向拉伸振动的模式与单板垂直板面向外弯曲振动的模式耦合作用的振动模式  $b_3$  和  $b_6$  在 51~235 Hz 之间打开了一条局部弯曲振动带隙。此外, 位移场为柱体共振单元绕  $xy$  平面内轴线旋

转振动的模式与单板垂直板面向外剪切振动的模式耦合作用的振动模式  $b_1$  和  $b_2$  以及位移场为柱体共振单元沿  $xy$  平面内轴线平移振动的模式与双层板在板面内剪切振动的模式耦合作用的振动模式  $b_4$  和  $b_5$  的共同作用下, 在 47.2~83 Hz 之间打开了一条局部纵向振动带隙。因此, 在弯曲振动和纵向振动的共同作用下一条较为狭窄的带隙在 51~83 Hz 之间被打开。

在模式  $B_1 \sim B_3$  和模式  $b_1 \sim b_3$  中, 基板均保持静止, 并且在双层板结构振动模式  $B_1, B_2$  和  $B_3$  中柱体共振单元的振动模式分别与在单板结构振动模式  $b_1, b_2$  和  $b_3$  中柱体共振单元的振动模式一一对应, 如图 4 和图 11 所示。图 12 所示的“基底-弹簧-质量块”简化模型被用来帮助理解这些振动模式。对于模式  $b_1 \sim b_3$  和  $B_1 \sim B_3$ , 图 12(a) 和 (b) 表示用质量块  $m$  模拟柱体铅层、弹簧  $k$  模拟柱体橡胶层以及基底  $M$  模拟板且特征频率分别为  $\sqrt{k/m}$  和  $\sqrt{2k/m}$  的简化模型。基于此, 模式  $B_1 \sim B_3$  所对应的频率应当分别是模式  $b_1 \sim b_3$  所对应的频率的  $\sqrt{2}$  倍。由图 10 可以看出, 模式  $B_1 \sim B_3$  所对应的频率分别为 65.3, 65.6 和 72 Hz, 并且模式  $b_1 \sim b_3$  所对应的频率分别为 46.9, 47.2 和 51 Hz, 基本吻合了  $f_{B_1 \sim B_3} = \sqrt{2} f_{b_1 \sim b_3}$  的对应关系。

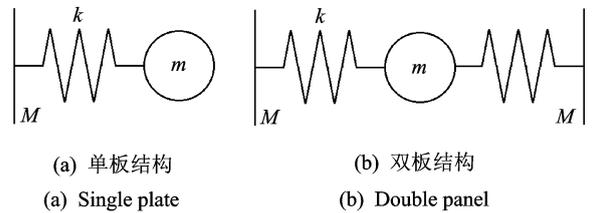


图 12 用于帮助理解振动模式的“基底-弹簧-质量块”简化模型

Fig. 12 The simplified base-spring-mass models applied to help understand the vibration modes

在模式  $B_4 \sim B_9$  和模式  $b_4 \sim b_6$  中, 柱体中间铅层均保持静止, 并且在双层板结构振动模式“ $B_4, B_6$ ”, “ $B_5, B_7$ ”和“ $B_8, B_9$ ”中基板的振动模式分别与在单板结构振动模式  $b_4, b_5$  和  $b_6$  中基板的振动模式一一对应, 如图 4 和图 11 所示。由此可见, 对于每一组相对应的振动模式, 双层板结构均有两个模式与单板结构的一个模式相对应, 这是因为双层板中上下板存在对称振动和反对称振动模式。相似地, 同样采用图 12 所示的“基底-弹簧-质量块”简化模型来帮助理解这些振动模式。此时, 模拟柱体铅层的质量块  $m$  充当基底, 从而图 12(b) 所示的双层

板的振动可以被简化为两块图 12(a) 所示的单个基板  $M$  的振动。因此,这两个简化模型的特征频率应当均为  $\sqrt{k/M}$ 。由图 10 可以看出,模态  $B_4 \sim B_9$  所在能带的最高点对应的频率分别为 280, 280, 281, 281, 282 和 284 Hz, 并且模态  $b_4 \sim b_6$  所在能带的最高点对应的频率分别为 281, 281 和 284 Hz, 完全吻合  $f_{B_4 \sim B_9} = f_{b_4 \sim b_6}$  的对应关系。但是在模态  $B_4 \sim B_9$  所在能带的低频段,柱体中间铅层不像在高频段那样保持绝对静止,且上下板的振幅会出现一些差别(如图 4 所示),这就导致与单板振动模态所对应的两个双层板振动模态不完全一致,继而无法如高频段那样相对应的单板结构和双层板结构振动模态所对应的特征频率吻合。因此,双层板结构的振动模态“ $B_4, B_6$ ”,“ $B_5, B_7$ ”和“ $B_8, B_9$ ”所在的能带可以被认为是单板结构振动模态  $b_4, b_5$  和  $b_6$  所在的能带分开而形成的,并且随着频率的增大,分开的幅度越来越小,最终趋于一致。

总的来说,同参数下局域共振型声子晶体双层板结构和单板结构的能带结构之间有很多相似之处,且相应能带的整体趋势大致相同。此外,一些双层板结构的能带可以被认为是单板结构的能带分开而形成的。但是从减振降噪的角度来说,当激励和响应域在结构的不同侧时,双层板结构所拥有的很宽的完整带隙这一性质是单板结构所远远不能比拟的。

## 2.4 各参数对双层板结构带隙的影响规律

振源和接收者常常处于双层板结构的不同板的一侧。因此,在下面的研究中由能带  $B_2, B_3$  和  $B_8$  所打开的带隙被用来作为研究对象。这里柱体橡胶层的高度  $h_1$ 、柱体铅层的高度  $h_2$ 、柱体半径  $r$ 、上下板的厚度  $e$  以及晶格常数  $a$  被选取为影响参数,用来研究几何参数对带隙的起始频率  $f_2$  (或  $f_3$ )、终止频率  $f_8$  和带隙宽度  $f_w$  的影响规律。在研究过程中,除了影响参数外别的参数均与图 2(a) 所示算例的参数一致,具体如表 1 和表 2 所示。

柱体橡胶层高度  $h_1$  对带隙临界频率  $f_2, f_3, f_8$  和带隙宽度  $f_w$  的影响关系如图 13 所示。由于  $f_3$  所在曲线一直高于  $f_2$  所在曲线,所以带隙宽度  $f_w$  由起始频率  $f_3$  和终止频率  $f_8$  决定。由图可以看出,随着  $h_1$  的增大,  $f_3$  和  $f_8$  均减小,这可由图 12 (b) 所示的“基底-弹簧-质量块”简化模型来帮助理解。在该模型中,  $f_3$  和  $f_8$  可以分别用  $\sqrt{2k/m}$  和  $\sqrt{k/M}$  来定性表征。因为等效弹簧刚度  $k$  随着  $h_1$

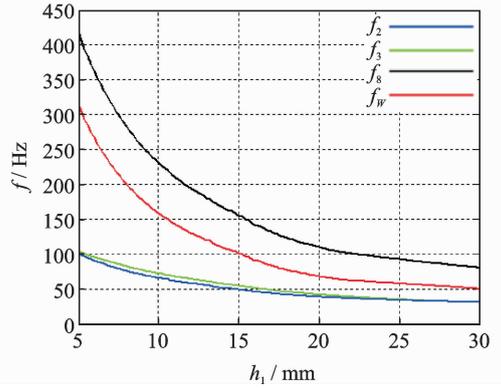


图 13 带隙临界频率  $f_2, f_3, f_8$  和带隙宽度  $f_w$  与柱体橡胶层高度  $h_1$  之间的关系

Fig. 13 The influences of rubber layer height in the pillar  $h_1$  on  $f_2, f_3, f_8$  and  $f_w$

的增大而减小,所以  $f_3$  和  $f_8$  也随之减小。此外,由于柱体铅层的等效质量  $m$  大于上下板的等效质量  $M$ , 所以从  $\sqrt{2k/m}$  和  $\sqrt{k/M}$  中可以看出,  $f_3$  的减小速率要小于  $f_8$  的减小速率,这就导致  $f_w$  随着  $h_1$  的增大而减小,如图 13 所示。

图 14 给出了柱体铅层高度  $h_2$  对带隙临界频率  $f_2, f_3, f_8$  和带隙宽度  $f_w$  的影响关系,  $f_w$  同样由起始频率  $f_3$  和终止频率  $f_8$  决定。由图可以看出,  $f_2$  和  $f_3$  均随着  $h_2$  的增大而减小,这是因为柱体铅层的等效质量  $m$  随着  $h_2$  的增大而增大。而  $f_8$  基本不受  $h_2$  的影响,这是因为在图 4 所对应的  $B_8$  振动模态中铅层是静止不动的。于是,  $h_2$  对  $f_3$  和  $f_8$  的影响关系使得  $f_w$  随  $h_2$  的增大而增大,如图 14 所示。

柱体半径  $r$  对带隙临界频率  $f_2, f_3, f_8$  和带隙宽度  $f_w$  的影响关系如图 15 所示。由图可以看出,随着  $r$  的增大,  $f_2$  和  $f_3$  缓慢地增大,这是因为等效

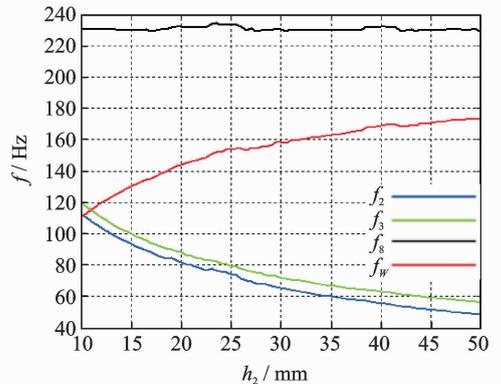


图 14 带隙临界频率  $f_2, f_3, f_8$  和带隙宽度  $f_w$  与柱体铅层高度  $h_2$  之间的关系

Fig. 14 The influences of Pb layer height in the pillar  $h_2$  on  $f_2, f_3, f_8$  and  $f_w$

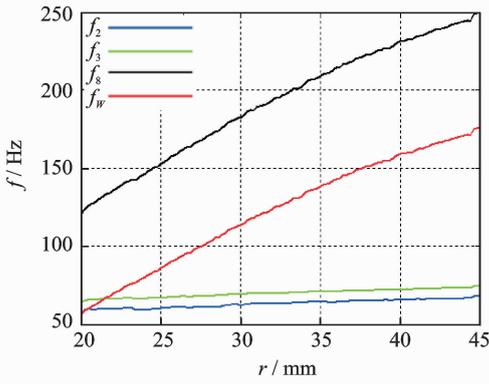


图 15 带隙临界频率  $f_2, f_3, f_8$  和带隙宽度  $f_w$  与柱体半径  $r$  之间的关系

Fig. 15 The influences of pillar radius  $r$  on  $f_2, f_3, f_8$  and  $f_w$

刚度  $k$  和等效质量块质量  $m$  均随着  $r$  的增大而增大, 并且  $k$  的增大幅度略大于  $m$  的增大幅度。此外, 随着  $r$  的增大,  $f_8$  急速地增大, 这是因为充当质量块的铅层在这里保持静止, 仅仅  $k$  的增大使得  $f_8$  的增长幅度比  $f_2$  和  $f_3$  大得多。于是, 终止频率  $f_8$  的急速增大和起始频率  $f_3$  的缓慢增大使得  $f_w$  随着  $r$  的增大而增大。

图 16 给出了上下板的厚度  $e$  对带隙临界频率  $f_2, f_3, f_8$  和带隙宽度  $f_w$  的影响关系。由图可以看出,  $e = 3.42 \text{ mm}$  是临界值。当板的厚度小于该值时,  $f_w$  由起始频率  $f_2$  和终止频率  $f_8$  决定; 而当板的厚度大于该值时,  $f_w$  由起始频率  $f_3$  和终止频率  $f_8$  决定。此外,  $f_2$  和  $f_3$  均随着  $e$  的增大而增大, 这可以借助于图 17 来帮助理解。该图分别展示了当  $e$  取 3 和 7 mm 时振动模式  $B_2$  和  $B_3$  所对应的位移场。由图可以看出, 振动模式  $B_2$  和  $B_3$  中上下板并非绝对静止, 并且当  $e$  取 3 mm 时上下板的振动更

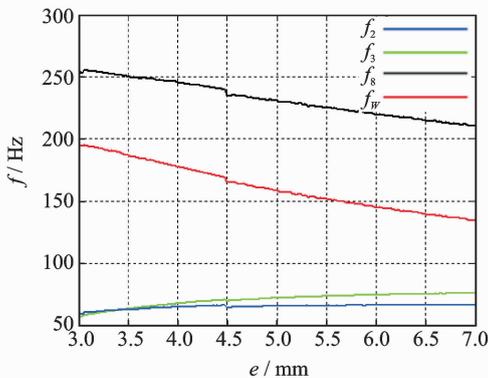


图 16 带隙临界频率  $f_2, f_3, f_8$  和带隙宽度  $f_w$  与上下板厚度  $e$  之间的关系

Fig. 16 The influences of base plate thickness  $e$  on  $f_2, f_3, f_8$  and  $f_w$

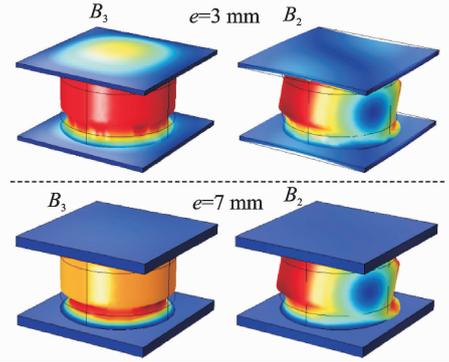


图 17 当  $e$  分别取 3 和 7 mm 时振动模式  $B_2$  和  $B_3$  所对应的位移场

Fig. 17 The displacement fields of modes  $B_2$  and  $B_3$  when  $e$  takes the value of 3 and 7 mm respectively

容易展现出来, 这是因为实际振动中板存在一定的刚度, 并且该刚度随着板的厚度的减小而减小。因此, 在这里等效弹簧刚度  $k$  可以进一步认为是板与柱体橡胶层共同作用的结果。由于随着  $e$  的增大, 板的弯曲刚度增大, 继而  $k$  也增大, 这就导致  $f_2$  和  $f_3$  也随之增大。此外, 由于随着  $e$  的增大, 板的等效质量  $M$  也增大, 因此  $f_8$  随之减小。于是, 终止频率  $f_8$  的减小和起始频率  $f_2$  (或  $f_3$ ) 的增大使得  $f_w$  随着  $e$  的增大而减小。

图 18 给出了晶格常量  $a$  对带隙临界频率  $f_2, f_3, f_8$  和带隙宽度  $f_w$  的影响关系。从图中可以看出,  $a = 0.132 \text{ m}$  是临界值。当晶格常量小于该值时,  $f_w$  由起始频率  $f_3$  和终止频率  $f_8$  决定; 而当晶格常量大于该值时,  $f_w$  由起始频率  $f_2$  和终止频率  $f_8$  决定。此外, 随着  $a$  的增大,  $f_2$  基本保持不变, 而  $f_3$  减小, 这同样可以借助于图 19 所示的当  $a$  分别取 0.085 和 0.2 m 时, 振动模式  $B_2$  和  $B_3$  所对应的

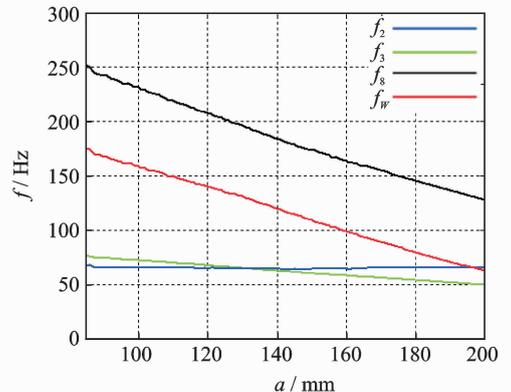


图 18 带隙临界频率  $f_2, f_3, f_8$  和带隙宽度  $f_w$  与晶格常量  $a$  之间的关系

Fig. 18 The influences of lattice constant  $a$  on  $f_2, f_3, f_8$  and  $f_w$

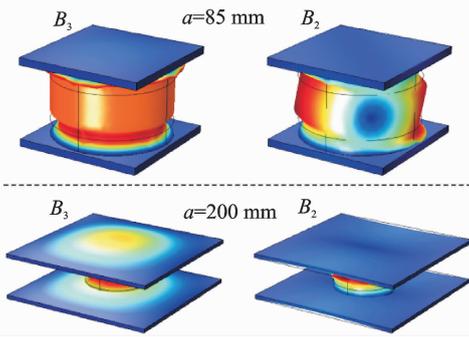


图 19 当  $a$  分别取 85 和 200 mm 时振动模式  $B_2$  和  $B_3$  所对应的位移场

Fig. 19 The displacement fields of modes  $B_2$  and  $B_3$  when  $a$  takes the value of 85 and 200 mm respectively

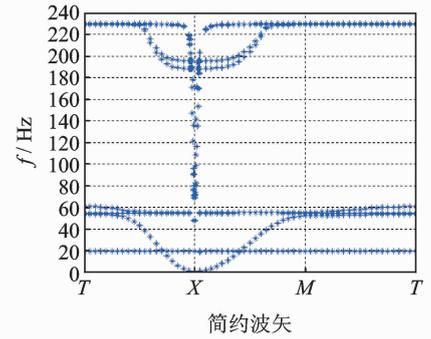
位移场来帮助理解。由图可以看出,板的等效刚度随着  $a$  的增大而减小,但是振动模式  $B_2$  中板的等效刚度的变化不是很明显,而振动模式  $B_3$  中板的等效刚度的变化则很大,这就是  $f_2$  和  $f_3$  随着  $a$  的增大分别保持不变和减小的原因。另外,由于随着  $a$  的增大,板的等效质量  $M$  也增大,所以  $f_8$  随之减小。于是,终止频率  $f_8$  的快速减小和起始频率  $f_2$  的基本不变(或  $f_3$  的缓慢减小)使得  $f_w$  随着  $e$  的增大而减小。

### 2.5 柱体橡胶层黏性对双层板结构带隙的影响规律

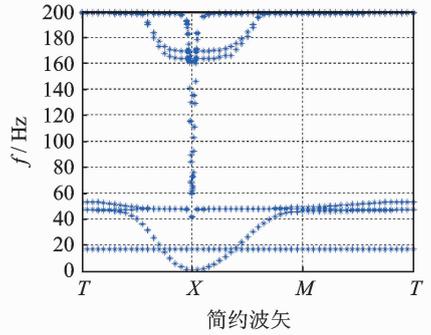
当考虑复合板软材料的黏性作用时,在频域内,软材料的各模量是与频率相关的,方程(2)的特征值问题需要通过迭代过程来求解,具体计算流程可参照文献[21-23]。

图 20(a), (b) 和 (c) 显示了橡胶层松弛时间为  $\tau = 3 \times 10^{-5}$  s, 初始-终止值比  $\alpha$  分别取 1.5, 2.0 和 3.0 时的能带结构图。其中,计算用到的参数如表 1 和表 2 所示。由图可以看出,  $\alpha$  对所有能带均有显著影响。为了进一步说明该影响规律,作出了带隙临界频率  $f_2, f_3, f_8$  和带隙宽度  $f_w$  随  $\alpha$  的变化曲线图,如图 20(d) 所示。由图可以看出,随着  $\alpha$  的增大,频率  $f_2, f_3$  和  $f_8$  均减小。此外,带隙终止频率  $f_8$  的减小速率大于起始频率  $f_2$  的减小速率,这是因为在研究的频域内(300 Hz 以下),软材料的材料参数的变化率随着频率的增大而增大<sup>[23]</sup>, 导致带隙宽度  $f_w$  也随着  $\alpha$  的增大而减小。由此可见,通过增大黏弹性软材料的初始-终止值比对降低贴附型局域共振声子晶体双层板结构的带隙起始频率起到积极作用,但同时也会缩减其带隙宽度。

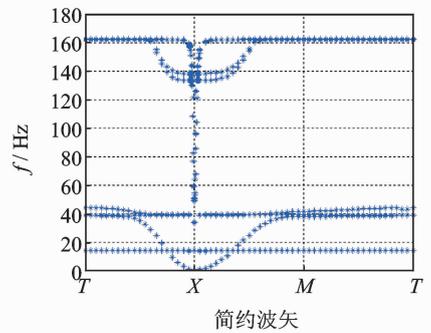
图 21(a), (b) 和 (c) 显示了软材料初始-终止值



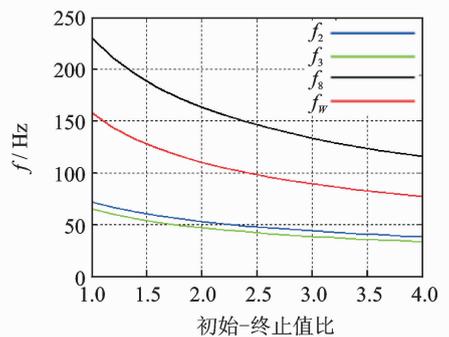
(a)  $\alpha=1.5$



(b)  $\alpha=2.0$



(c)  $\alpha=3.0$

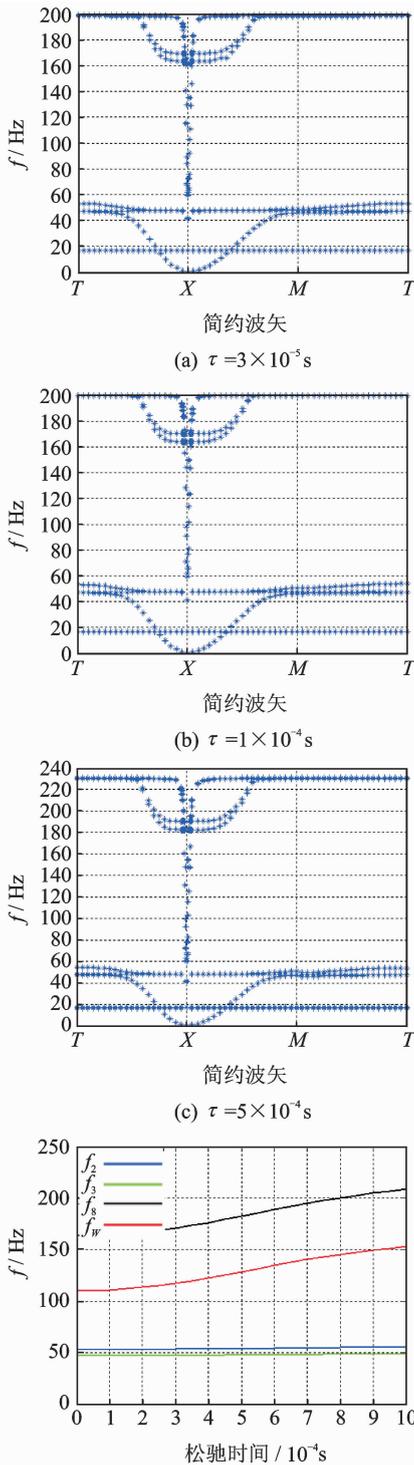


(d) 初始-终止值比对带隙临界频率  $f_2, f_3, f_8$  和带隙宽度  $f_w$  的影响关系

(d) The influences of initial-final value ratio  $\alpha$  on critical frequencies  $f_2, f_3, f_8$  and bandgap width  $f_w$

图 20 黏弹性材料松弛时间为  $\tau = 3 \times 10^{-5}$  s 时不同初始-终止值比下的能带结构对带隙临界频率  $f_2, f_3, f_8$  和带隙宽度  $f_w$  的影响关系

Fig. 20 Band structures with the viscosity of soft material considered when relax time  $\tau = 3 \times 10^{-5}$  s, the influences of initial-final value ratio  $\alpha$  on critical frequencies  $f_2, f_3, f_8$  and bandgap width  $f_w$



(d) 松弛时间对带隙临界频率  $f_2, f_3, f_8$  和带隙宽度  $f_w$  的影响关系

(d) The influences of relax time  $\tau$  on critical frequencies  $f_2, f_3, f_8$  and bandgap width  $f_w$

图 21 黏弹性材料初始-终止值比为  $\alpha = 2.0$  时不同松弛时间下的能带结构对带隙临界频率  $f_2, f_3, f_8$  和带隙宽度  $f_w$  的影响关系

Fig. 21 Band structures with the viscosity of soft material considered when initial-final value ratio  $\alpha = 2.0$ , the influences of relax time  $\tau$  on critical frequencies  $f_2, f_3, f_8$  and bandgap width  $f_w$

比为  $\alpha = 2.0$ , 松弛时间  $\tau$  分别取  $3 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-4} \text{ s}$  时的能带结构图。其中, 计算用到的参数同样如表 1 和表 2 所示。由图可以看出,  $\tau$  对高频段能带影响显著, 但对低频段能带几乎没影响。为了进一步说明该影响规律, 作出了带隙临界频率  $f_2, f_3, f_8$  和带隙宽度  $f_w$  随  $\tau$  的变化曲线图, 如图 21(d) 所示。由图可以看出, 随着  $\tau$  的增大, 频率  $f_8$  增大, 而  $f_2$  和  $f_3$  几乎不变, 这可以归因于在研究的频域内 (300 Hz 以下), 软材料的材料参数的变化率随着频率的增大而增大, 并且在低频段不同的松弛时间所对应的软材料参数均趋于同一定值, 为黏弹性软材料参数的终止值<sup>[23]</sup>。由于终止频率  $f_8$  的增大以及起始频率  $f_2$  几乎不变, 所以带隙宽度  $f_w$  也随着  $\tau$  的增大而增大。由此可见, 通过增大黏弹性软材料的松弛时间对增大贴附型局域共振声子晶体双层板结构带隙宽度起到积极作用, 且不会提高带隙起始频率。

### 3 结 论

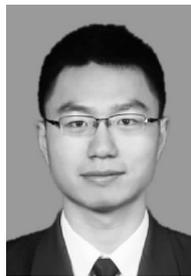
1) 当激励点和响应点位于上下异侧板时, 通过对能带结构和传输曲线进行分析, 一条起始频率低并且带隙宽的完全带隙可以被打开。通过对带隙边界能带的特征模态相对应的位移场进行分析, 不论是弯曲振动还是纵向振动, 都展现出对称与反对称振动模式。带隙的打开可以认为是共振单元的振动模态和上下板的板振动模态相互耦合作用的结果。通过对比分析, 双板结构的能带可以被考虑为在上下板作用下单板相对应能带分开而导致的。研究还表明, 由空气声腔所带来的声振耦合效应可以不考虑。

2) 分析相应几何参数对能带结构的影响, 可以归纳为: a. 通过增加铅层柱体的高度或者减小上下基板的厚度, 可以降低带隙起始频率且增大带隙宽度; b. 通过增加橡胶层柱体高度, 带隙起始频率和带隙宽度同时获得增长; c. 通过增加柱体半径或者减小晶格常数, 可以增大带隙宽度且对带隙起始频率影响不大。所有上述影响规律均可借助于“基底-弹簧-质量块”简化模型获得相应解释。此外, 当考虑软材料黏性时, 通过增大黏弹性软材料的初始-终止值比或者减小黏弹性软材料的松弛时间可以降低带隙起始频率, 但同时也会缩减其带隙宽度。

### 参 考 文 献

[1] 卢天健, 辛锋先. 轻质夹层板结构的声振耦合理论

- [M]. 北京:科学出版社, 2014:1-2.
- [2] Carneal J P, Fuller C R. An analytical and experimental investigation of active structural acoustic control of noise transmission through double panel systems[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2004, 272(3/5): 749-771.
- [3] 温熙森, 温激鸿, 郁殿龙, 等. 声子晶体[M]. 北京:国防工业出版社, 2009:8-10.
- [4] Sigalas M M, Economou E N. Elastic and acoustic wave band structure[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 158(2): 377-382.
- [5] Zhang Xin, Liu Zhengyou, Liu Youyan, et al. Elastic wave band gaps for three-dimensional phononic crystals with two structural units[J]. *Physics Letters A*, 2003, 313(5): 455-460.
- [6] Liu Zhengyou, Zhang Xixiang, Mao Yiwei, et al. Locally resonant sonic materials[J]. *Science*, 2000, 289(5485): 1734-1736.
- [7] Goffaux C, Sanchez-Dehesa J, Lambin P. Comparison of the sound attenuation efficiency of locally resonant materials and elastic band-gap structures[J]. *Physical Review B*, 2004, 70(18): 184302.
- [8] Hirsekorn M, Delsanto P P, Batra N K, et al. Modeling and simulation of acoustic wave propagation in locally resonant sonic materials[J]. *Ultrasonics*, 2004, 42(1): 231-235.
- [9] Wang Gang, Wen Xisen, Wen Jihong, et al. Quasi-one-dimensional periodic structure with locally resonant band gap[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2006, 43(1): 167-170.
- [10] Yu Dianlong, Liu Yaozong, Wang Gang, et al. Flexural vibration band gaps in Timoshenko beams with locally resonant structures[J]. *Journal of Applied Physics*, 2006, 100(12): 124901.
- [11] Hsu J C, Wu T T. Lamb waves in binary locally resonant phononic plates with two-dimensional lattices[J]. *Applied Physics Letters*, 2007, 90(20): 201904.
- [12] Xiao W, Zeng G W, Cheng Y S. Flexural vibration band gaps in a thin plate containing a periodic array of hemmed discs[J]. *Applied Acoustics*, 2008, 69(3): 255-261.
- [13] Oudich M, Li Y, Assouar B M, et al. A sonic band gap based on the locally resonant phononic plates with stubs[J]. *New Journal of Physics*, 2010, 12(2): 201-206.
- [14] Xiao Yong, Wen Jihong, Wen Xisen. Flexural wave band gaps in locally resonant thin plates with periodically attached spring-mass resonators[J]. *Journal of Physics D Applied Physics*, 2012, 45(19): 195401-195412.
- [15] Ma Jiahong, Hou Zhilin, Assouar B M. Opening a large full phononic band gap in thin elastic plate with resonant units[J]. *Journal of Applied Physics*, 2014, 115(9): 093508.
- [16] Li Yinggang, Chen Tianning, Wang Xiaopeng, et al. Enlargement of locally resonant sonic band gap by using composite plate-type acoustic metamaterial[J]. *Physics Letters A*, 2015, 379(5): 412-416.
- [17] Qian Denghui, Shi Zhiyu. Bandgap properties in locally resonant phononic crystal double panel structures with periodically attached spring-mass resonators[J]. *Physics Letters A*, 2016, 380(41): 3319-3325.
- [18] Romerogracia V, Garciaraffi L M, Sanchezperez J V. Evanescent waves and deaf bands in sonic crystals[J]. *Aip Advances*, 2011, 1(4): 041601.
- [19] Laude V, Moiseyenko R P, Benchabane S, et al. Bloch wave deafness and modal conversion at a phononic crystal boundary [J]. *Aip Advances*, 2011, 1(4): 041402.
- [20] Zhao Haojiang, Guo Hongwei, Gao Mingxing, et al. Vibration band gaps in double-vibrator pillared phononic crystal plate [J]. *Journal of Applied Physics*, 2016, 119(1): 377.
- [21] Zhao Y P, Wei Peijun. The band gap of 1D viscoelastic phononic crystal[J]. *Computational Materials Science*, 2009, 46(3): 603-606.
- [22] Wei Peijun, Zhao Y P. The influence of viscosity on band gaps of 2D phononic crystal[J]. *Mechanics of Advanced Materials & Structures*, 2010, 17(6): 383-392.
- [23] Qian Denghui, Shi Zhiyu. Bandgap properties in simplified model of composite locally resonant phononic crystal plate[J]. *Physics Letters A*, 2017, 381(40): 3505-3513.



**第一作者简介:**钱登辉,男,1991年1月生,博士、讲师。主要研究方向为声子晶体夹层结构、压电纳米声子晶体结构、振动与噪声控制。曾发表《Bandgap properties of a piezoelectric phononic crystal nanobeam based on nonlocal theory》(《Journal of Materials Science》2019, Vol. 54, No. 5)等论文。

E-mail: dhqian@usts.edu.cn

