

# 三维蜂窝状声子晶体的带隙优化研究\*

邵瀚波, 陈国平, 何欢

(南京航空航天大学航空宇航学院 南京, 211100)

**摘要** 蜂窝状的声子晶体具有优秀的减振降噪特性, 选择丁腈橡胶作为基底, 钢作为散射体, 通过构建不同蜂窝状的声子晶体模型以及改变几何材料参数, 可以得到更宽的低频带隙, 从而得到更好的减振效果。通过 COMSOL 软件, 利用周期性边界条件和布洛赫理论进行建模, 计算出其能带结构并和传输特性进行比较, 分析了不同结构参数下的位移模式, 寻找出最优越的蜂窝状声子晶体, 在对带隙范围调控上提出了新的方法和思路。

**关键词** 声子晶体; 可调节; 蜂窝状; 能带结构

**中图分类号** TB535<sup>+</sup>.1

## 引言

声子晶体是内部组元的弹性常数、密度以及声速周期性变化的一种具有带隙的声学功能材料, 当弹性波频率在声子晶体带隙范围内时, 弹性波将被抑制或禁止传播, 所以较宽的低频带隙对于减振降噪提供了新的方法和思路<sup>[1]</sup>。

声子晶体由于在控制弹性波方面具有很好的物理特性, 吸引了广泛的关注<sup>[2-3]</sup>。理论和实验结果都表明, 声子晶体中可以出现完整的带隙<sup>[4-7]</sup>, 这些带隙可以用来减振或者控制环境的噪音<sup>[8-10]</sup>, 其中主要分为布拉格散射型<sup>[11-12]</sup>和局域共振型带隙<sup>[13]</sup>。局域共振型声子晶体与布拉格散射型声子晶体不同, 其可以用较小尺寸获得低频带隙<sup>[14-15]</sup>, 这一特点使得声子晶体在低频减振降噪方面很有理论价值和前景。

由于声子晶体的带隙特征对减振降噪具有重要的价值, 国内外在声子晶体带隙的计算方面研究较多<sup>[16-18]</sup>。声子晶体的带隙范围由晶体结构特征决定, 根据带隙与晶体结构形式之间的关系可以对声子晶体的构成参数或结构特征进行优化设计, 使声子晶体具有最佳的带隙特征, 从而得到具有更好的减振降噪性能的声子晶体。温熙森<sup>[19]</sup>研究了二维平面蜂窝状晶体结构的声子晶体, 选用钢作为散射体, 丁腈橡胶作为基底, 分析

了局域共振型声子晶体的原胞并运用集中质量法计算出能带结构, 并与三角形晶格状声子晶体进行比较, 得出了其带隙分布主要在 200~270 Hz 之间。笔者在此基础上, 研究了三维蜂窝状声子晶体, 并通过对参数以及结构进行优化设计, 得到了最优的蜂窝状声子晶体, 可以对带隙范围进行调控, 从而满足不同的频率要求。

## 1 声子晶体的模型与计算方法

图 1 为 4 种蜂窝状结构的声子晶体, 基底是用丁腈橡胶制作的三角形晶格板, 在中间挖去孔并嵌入圆柱形的钢作为芯体。其晶格常数  $a=0.01\text{ m}$ , 孔半径为  $r$ , 板厚度为  $h$ , 芯体高度为  $t$ 。钢和丁腈橡胶的材料参数如表 1 所示。

表 1 各材料参数

Tab. 1 Material parameters

材料	弹性模量/GPa	泊松比	密度/(kg·m <sup>-3</sup> )
钢	210.600	0.3	1 180
丁腈橡胶	0.012	0.5	1 300

通过有限元方法来计算三维蜂窝状结构声子晶体的离散关系, 将其中一个晶胞划分有限元网格, 把问题转化为一般的特征值问题。

\* 江苏省研究生教育创新资助项目(KYLX16\_0314);江苏省研究生研究与实践创新资助项目(KYCX18\_0249)  
收稿日期:2017-07-13;修回日期:2017-09-12

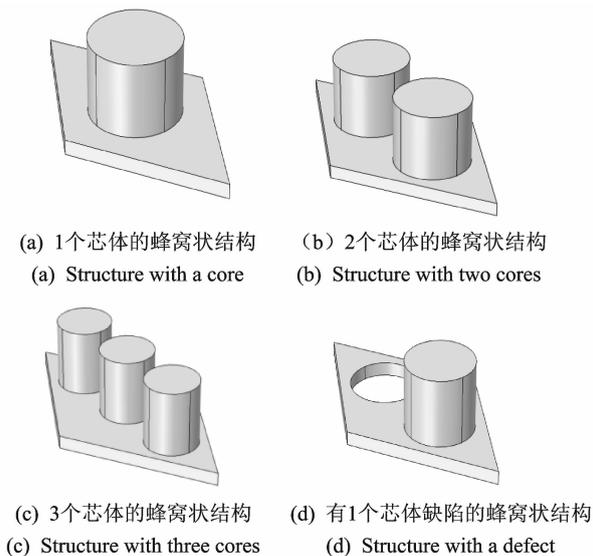


图1 不同蜂窝状结构声子晶体

Fig. 1 Phononic crystals with different structures

对于一个晶胞的特征方程可以表示为

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

其中: $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2 \ \dots \ \mathbf{U}_n]^T$  为节点的位移矩阵,且 $\mathbf{U}_i = [u_i \ v_i \ w_i]^T$ ;  $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{M}$  分别为单元刚度和质量矩阵。

根据布洛赫定理,弹性结构的位移场  $u(\mathbf{r})$  可以表示为

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_k(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2)$$

其中: $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  为不可约布里渊区波矢量; $\mathbf{r} = (x, y, z)$  为节点坐标矢。

$\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$  晶胞中有相同周期边界条件的矢量式,根据布洛赫理论,通过式(2)可以得到周期边界条件

$$\mathbf{U}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \mathbf{U}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}} \quad (3)$$

其中: $\mathbf{a}$  为晶格常数。

通过 COMSOL 软件来计算分析上述蜂窝状结构声子晶体的特征频率,从而分析相对应的能带结构和振动模式以及传输特性。传输特性方程定义为

$$H = 10 \log(u_1/u_2) \quad (4)$$

其中: $u_1$  和  $u_2$  分别为激振位移和传递到边界的位移。传递方式如图 2 所示,在蓝色阴影边界施加“1”

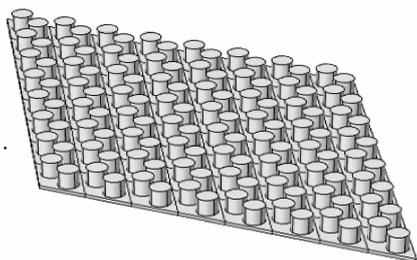


图2 声子晶体施加边界加速度

Fig. 2 Exerts a boundary acceleration to phononic crystal

的加速度,方向垂直于边界沿板面方向,其余边界均为自由边界条件。

## 2 结果和分析

### 2.1 不同蜂窝状结构声子晶体对带隙的影响

在二维蜂窝煤状声子晶体模型的基础下,笔者通过对 4 种三维不同蜂窝状结构的声子晶体建模并利用 COMSOL 进行计算,验证了各种声子晶体的能带结构,分析了位移模式以及传输特性。

图 1 中设置板厚度  $h = 3 \text{ mm}$ , 散射体高度  $t = 18 \text{ mm}$ , 半径分别为 10, 8, 6 和 8 mm。将波矢  $\mathbf{k}$  在不可约 Brillouin 区边界上取值,  $M, X$  和  $\Gamma$  为其中 3 个顶点, 计算出能带结构。由图 3 可以看出: 当散射体只有 1 个或者 2 个芯体时, 出现的带隙较宽, 分别为 605.89~985.42 Hz 和 1 041.45~1 492.8 Hz; 而当有 3 个芯体或者有 1 个缺陷芯体时, 出现的带隙很窄。这表明在此频率范围内的弹性波传播被抑制, 而其他频率范围(通带)的弹性波可以无损耗地进行传播。

图 4 所示为声子晶体的振动模式俯视图(分别含有 1 个、2 个、3 个芯体及 1 个芯体缺陷的蜂窝状结构), 其中前 4 幅为带隙下边缘, 后 4 幅为带隙上边缘。由图 4 的位移模式可以看出, 不管是带隙上边缘还是下边缘, 主要振动都出现在橡胶板上, 在 1 个芯体声子晶体的带隙下边缘激励以及接受边上出现弯曲振动, 而上边缘只有 1 个角上出现纵向位移。相同的, 对于 2 个芯体的声子晶体的带隙上边缘, 有 2 个角出现很大的纵向位移, 而下边缘 4 个角的纵向位移都很平均。对于有 1 个芯体缺陷的声子晶体, 带隙下边缘和 2 个芯体时情况类似, 而上边缘只有缺陷出现很大的纵向位移, 这些位移变化导致了两种声子晶体带隙的存在。相反的, 对于 3 个芯体的声子晶体, 位移变化不大, 导致带隙也不是很明显。

图 2 中, 选取  $8 \times 8$  周期结构声子晶体并采用四面体网格, 利用式(4)计算其传输特性(transmission loss, 简称 TL)。如图 5 所示, 可以看出箭头及阴影范围内输出端的响应明显减少, 说明该频率范围的幅频特性明显衰减, 通过与带结构图对比可以验证其减振效果。

本节内容验证了在蜂窝煤状声子晶体中, 对于 1 个及 2 个芯体的声子晶体具有更好的减振效果, 和二维平面的结果类似, 但是比二维平面情况得到更宽的带系范围, 减振效果更好。

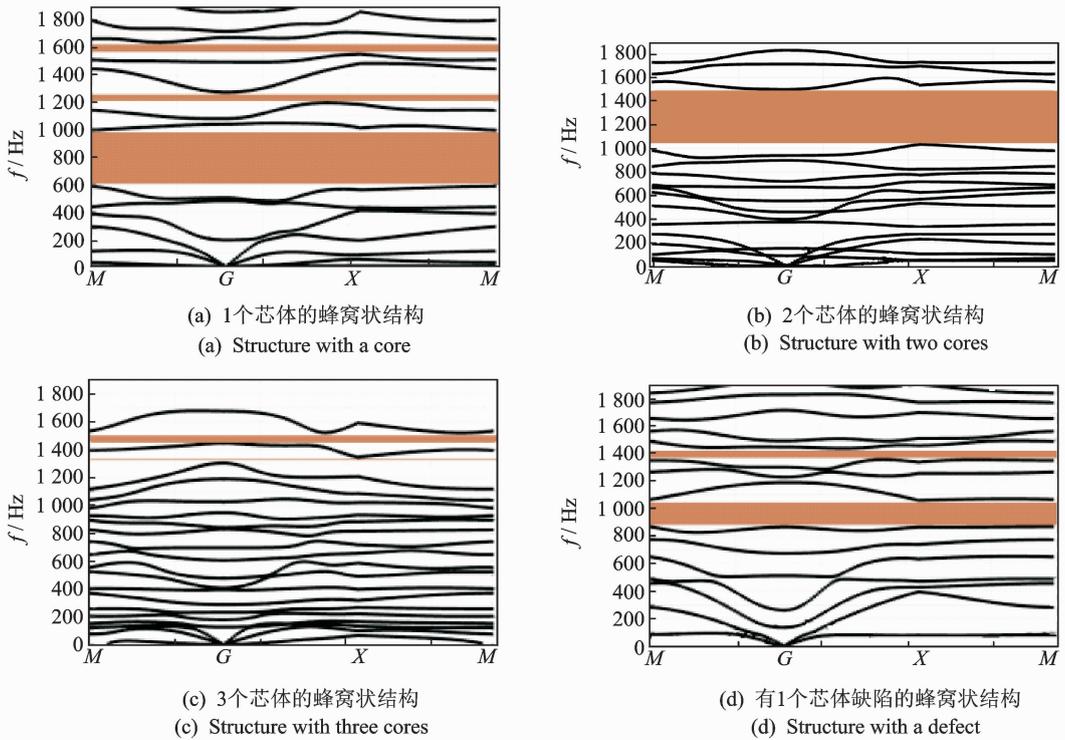


图 3 不同蜂窝状结构声子晶体能带结构

Fig. 3 Band gaps with different structures

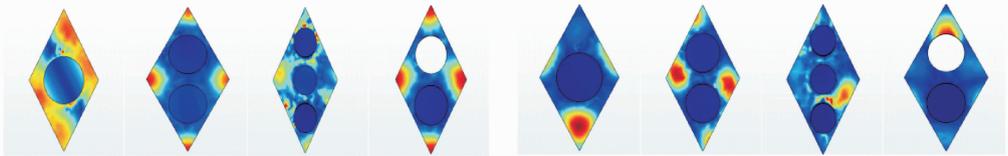


图 4 声子晶体的振动模式俯视图

Fig. 4 The vibration mode of the phononic crystals

## 2.2 芯体几何参数对带隙的影响

### 2.2.1 芯体高度对带隙的影响

选取 2 个芯体的声子晶体进行研究, 分别设置芯体的高度为 3, 9 和 18 mm, 其他条件不变, 用 COMSOL 模拟出的能带结构以及传输特性如图 6 所示。可以看出, 当  $t=3$  mm 时, 仅仅在 1 700 Hz 左右出现 1 条很窄的带隙; 而当  $t=9$  mm 时, 能带结构有所改善, 除了 1 600 Hz 左右有 1 条很窄的带隙之外, 1 148.46~1 398.25 Hz 之间还出现一条比较宽的带隙; 当  $t=18$  mm 时, 高频的窄带隙消失了, 出现了 1 条从 1 041.45~1 492.8 Hz 的带隙, 能带结构有明显改善, 说明当  $t=18$  mm 时具有更好的减振特性。图 6 中的传输特性图和能带结构基本吻合, 也验证了这一结果。

### 2.2.2 芯体半径对带隙的影响

在  $t=18$  mm 的基础上改变声子晶体芯体的半径, 由于  $r=2$  mm 时, 结构不存在带隙, 所以考虑 3~10 mm 半径对带隙的影响。通过计算发现, 其能带结构主要出现在第 13~14 阶固有频率中间, 如表 2 所示。由图 7 可以看出, 改变半径时, 带隙下边缘值基本保持不变, 维持在 1 000 Hz 左右。上边缘值波动很大, 当  $r=3, 5, 10$  mm 时, 较接近下边缘, 直接导致了带隙很窄; 而当  $r=4, 6, 8$  和 9 mm 时, 带隙上边缘较远离下边缘, 所以出现的带隙较宽, 尤其是当  $r=8$  mm 时, 带隙最宽, 得到最优的能带结构。

图 8 所示的振动模式中, (a)~(c) 为带隙下边缘, (d)~(f) 为带隙上边缘。由图 8 可以看出: 当  $r=3$  mm 时, 第 13 阶的振动幅度很小且集中在声子晶体内部, 而 14 阶主要集中在激励边和接受边上,

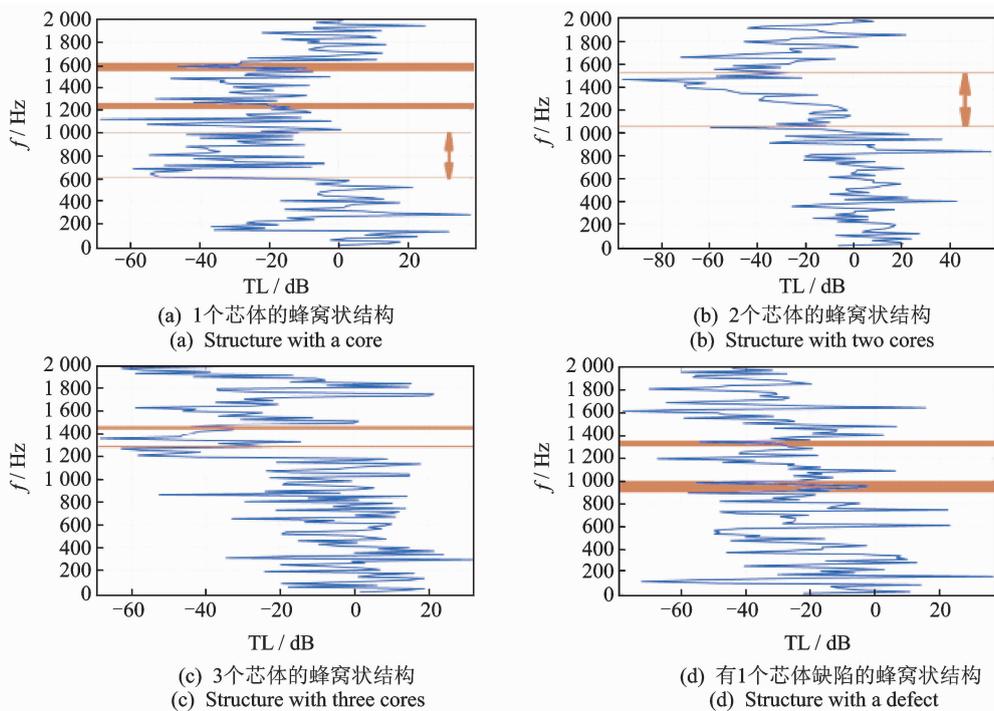


图 5 不同蜂窝状结构声子传输特性

Fig. 5 The transmission loss of structures

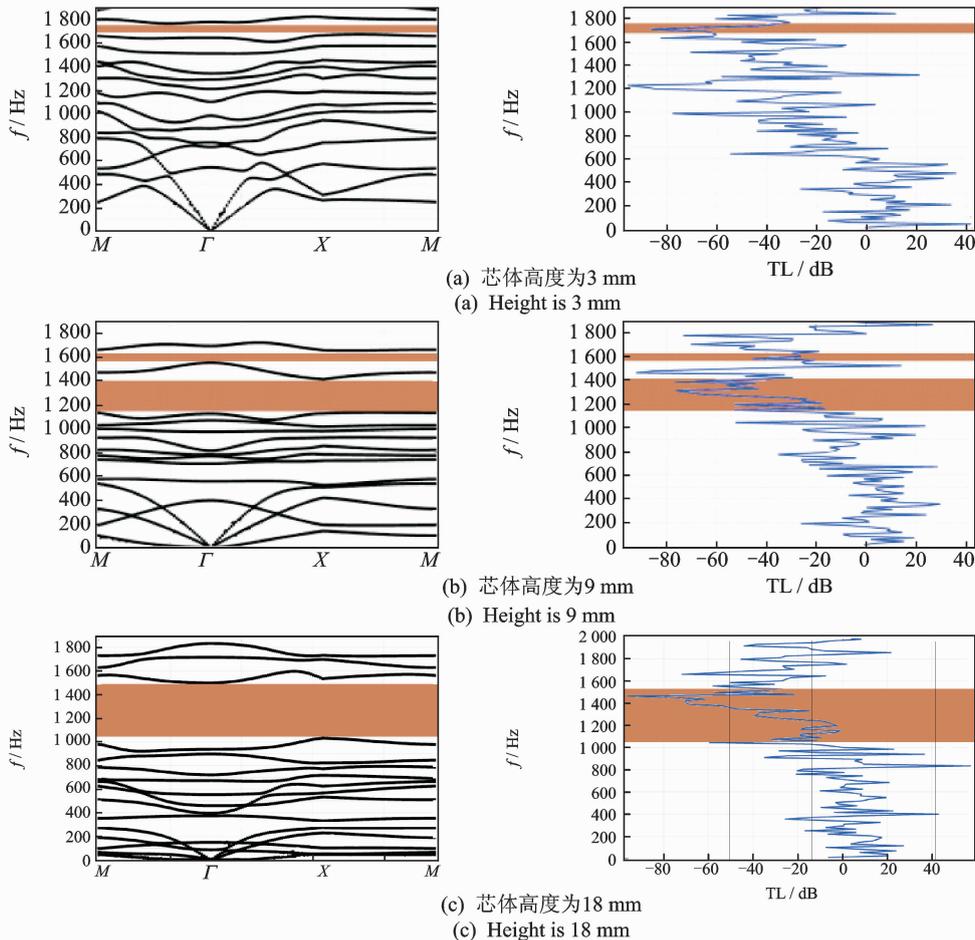


图 6 不同高度芯体的声子晶体能带结构和传输特性图

Fig. 6 The phononic crystal band structure and transmission loss of cores in different height

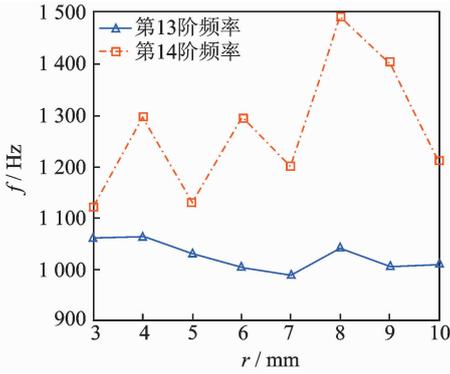


图 7 不同半径声子晶体的带隙上下边缘值折线图  
Fig. 7 The edge values of the band gap of different phononic crystals' radii

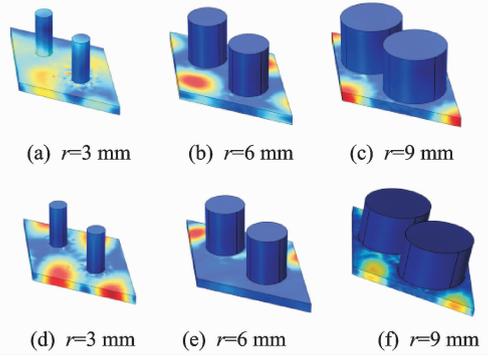


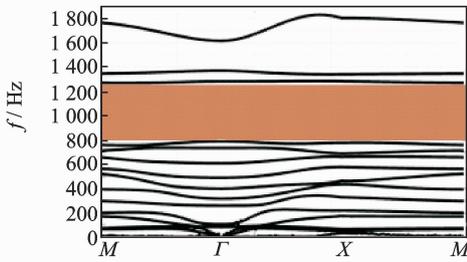
图 8 不同半径下声子晶体的振动模式  
Fig. 8 Vibration mode of phonon crystals in different radii

表现为很大的弯曲振动;当  $r=6\text{ mm}$  时,带隙的上下边缘振动位置正好相反,都变现为较强的纵向振动;当  $r=9\text{ mm}$  时,下带隙主要表现为 4 个角的弯曲振动,而上带隙则偏向激励边上的振动,且振动幅度变小很多。

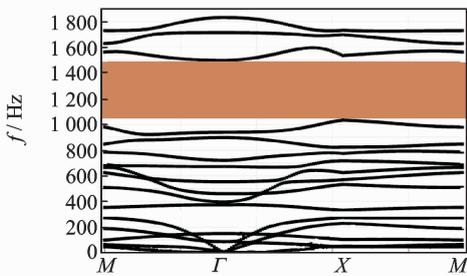
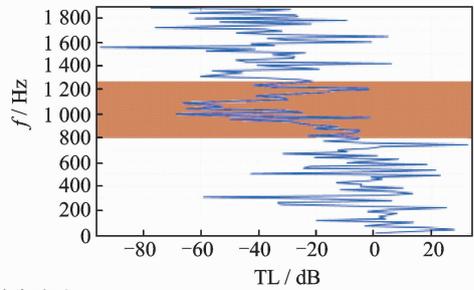
### 2.3 橡胶几何参数对带隙的影响

#### 2.3.1 橡胶高度对带隙的影响

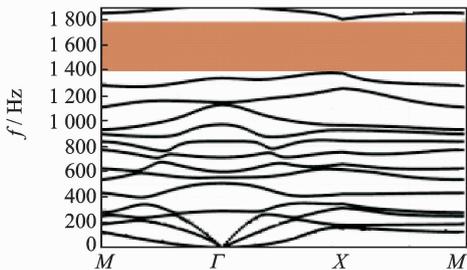
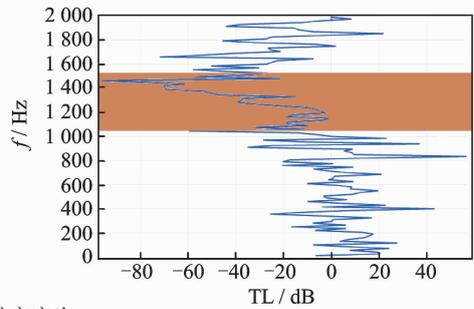
在保持芯体高度  $t=18\text{ mm}$  和  $r=8\text{ mm}$  的条件下,改变橡胶的高度分别为 2, 3 和 5 mm,分析对带隙的影响,如图 9 所示。



(a) 橡胶高度为 2 mm  
(a) Height of rubber is 2 mm



(b) 橡胶高度为 3 mm  
(b) Height of rubber is 3 mm



(c) 橡胶高度为 5 mm  
(c) Height of rubber is 5 mm

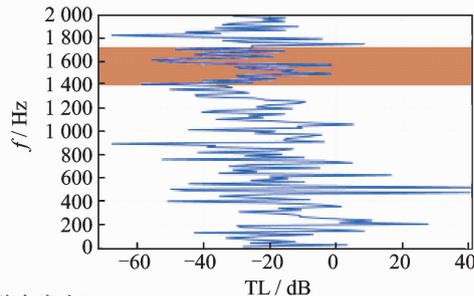


图 9 不同高度橡胶的声子晶体能带结构和传输特性图

Fig. 9 The phononic crystal band structure and transmission loss of rubber with different height

通过计算发现,随着高度的增加,带隙的宽度没有实质性的变化,但是带隙的上边界值和下边界值都有所增加(只考虑第 13 阶固有频率到 14 阶固有频率之间的带隙),具体数值见表 2。当  $r=2$  mm 时,带隙范围为 805.62~1 250.34 Hz,相比较其他的带隙而言,能得到较低的能带结构,且带隙宽度也不会减少,传输特性图也表明了在这区间,响应得到明显衰减;当  $r=3$  mm 时,带隙增加到 1 041.45~1 492.8 Hz;当  $r=5$  mm 时带隙增加至 1 397.56~1 785.54 Hz。通过计算分析得知,如果要得到比较低的带隙频率,必须降低橡胶高度,当  $r=2$  mm 时,对于低频的减振效果最明显。

表 2 不同半径时声子晶体的带隙上下边缘值

Tab. 2 The upper and lower edge values of phononic crystals in different radii

$r/m$	第 13 阶频率/Hz	第 14 阶频率/Hz
0.003	1 060.87	1 120.70
0.004	1 062.43	1 297.56
0.005	1 048.38	1 128.79
0.006	1 003.12	1 295.43
0.007	987.49	1 198.60
0.008	1 041.45	1 492.80
0.009	1 004.56	1 403.21
0.010	1 009.81	1 208.10

计算分析表明,可以通过调节橡胶的高度对声子晶体的带系在 2 000 Hz 之内达到可调节化,随着橡胶高度从 2~5 mm 之间变化,带隙下界限从 805.62 Hz 变化到 1 397.56 Hz。通过这一理论,对于不同的减振需求可以选择不同的声子晶体。

### 2.3.2 减少橡胶刚度对带隙的影响

在维持橡胶高度为 3 mm 的条件下,为减少橡胶刚度,在模型的 4 个角分别挖去半径为 8 mm 的部分圆形,构成如图 10 的模型。对其进行进一步分

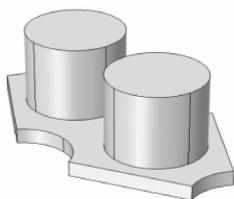


图 10 减少橡胶刚度后的声子晶体

Fig. 10 Phononic crystal that the stiffness of rubber is reduced

析表明,由图 11 的能带结构可以看出,减少了橡胶刚度后,原本 1 041.45~1 492.8 Hz 的带隙被分成了两个很窄的带隙,并且 1 446.78~1 702.36 Hz 之间出现了一条比较高的带隙,导致结构对低频减振性能的降低,通过传输特性图也可以验证这一点。

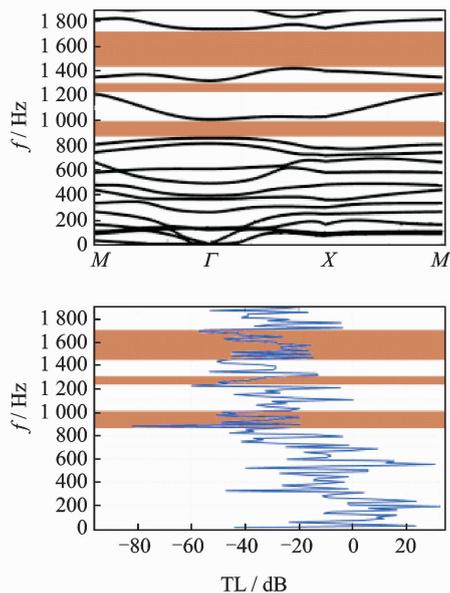


图 11 减少橡胶刚度后声子晶体能带结构和传输特性图

Fig. 11 The structure and transmission loss of the phononic crystal that the stiffness of rubber is reduced

## 3 结 论

1) 改变芯体的高度时,当  $t=18$  mm 得到的带隙范围更宽且频率相对较低,相对其他高度而言具有最好的减振性能。

2) 芯体的半径不同,带隙的范围波动不定,但是带隙下边界基本保持不变,上边界在  $r=8$  mm 时出现最大值,且位移模式以弯曲振动和纵向振动为主。

3) 随着橡胶高度的增加,带隙范围变化不大,但是带隙频率一直在增高,所以通过调节橡胶的高度,可以满足不同频率范围的减振效果,从而可以针对不同的减振需求达到带隙范围的可调节化。

4) 在四周挖去 4 个角来减少橡胶的刚度对于声子晶体的带隙影响效果不大,具体刚度对带隙的影响还需要做进一步研究认证。

## 参 考 文 献

- [1] Chen Jiujiu, Zhang Kaiwen, Gao Jian, et al. Stop-bands for lower-order Lamb waves in one-dimensional composite thin plates[J]. *Physical Review B*, 2006, 73(9):094307.
- [2] Zhu R, Huang G L, Huang H H, et al. Experimental and numerical study of guided wave propagation in a thin metamaterial plate[J]. *Physics Letters A*, 2011, 375(30/31):2863-2867.
- [3] Wang Yanfeng, Wang Yuesheng. Multiple wide complete bandgaps of two-dimensional phononic crystal slabs with cross-like holes[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2013, 332(8):2019-2037.
- [4] Charles C, Bonello B, Ganot F. Propagation of guided elastic waves in 2D phononic crystals. [J]. *Ultrasonics*, 2006, 44(4):e1209.
- [5] Liu Shaogang, Li Shidan, Shu Haisheng, et al. Research on the elastic wave band gaps of curved beam of phononic crystals[J]. *Physica B Physics of Condensed Matter*, 2015, 457(457):82-91.
- [6] Taniker S, Yilmaz C. Phononic gaps induced by inertial amplification in BCC and FCC lattices[J]. *Physics Letters Section A General Atomic & Solid State Physics*, 2013, 377(31/33):1930-1936.
- [7] Han Lin, Zhang Yan, Ni Zhiqiang, et al. A modified transfer matrix method for the study of the bending vibration band structure in phononic crystal Euler beams [J]. *Physica B Physics of Condensed Matter*, 2012, 407(23):4579-4583.
- [8] Liu Z, Zhang X, Mao Y, et al. Locally Resonant Sonic Materials [J]. *Science*, 2000, 289(5485):1734-1736.
- [9] Mei Jun, Ma Guancong, Yang Min, et al. Dark acoustic metamaterials as super absorbers for low-frequency sound[J]. *Nature Communications*, 2012, 3(2):756-762.
- [10] Lu Kuan, Wu Jihui, Guan Dong, et al. A lightweight low-frequency sound insulation membrane-type acoustic metamaterial[J]. *Aip Advances*, 2016, 6(2):025116.
- [11] Tanaka Y, Tamura S I. Surface acoustic waves in two-dimensional periodic elastic structures [J]. *Physical Review B*, 1998, 58(12):7958-7965.
- [12] Kushwaha M S, Halevi P. Stop bands for cubic arrays of spherical balloons[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1997, 101(1):619-622.
- [13] 刘志明. 声子晶体带隙特性研究[D]. 合肥:国防科学技术大学, 2005.
- [14] 王刚. 声子晶体局域共振带隙机理及减振特性研究[D]. 合肥:国防科学技术大学, 2005.
- [15] Wang Gang, Wen Jihong, Liu Yaozong, et al. Lumped-mass method for the study of band structure in two-dimensional phononic crystals[J]. *Physical Review B*, 2004, 69(18):184302.
- [16] 颜琳. 声子晶体带结构研究[D]. 湘潭:湘潭大学, 2005.
- [17] Kushwaha M S, Djafari-Rouhani B, Dobrzynski L, et al. Sonic stop-bands for cubic arrays of rigid inclusions in air[J]. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 1998, 3(2):155-161.
- [18] 王刚, 温激鸿, 韩小云, 等. 二维声子晶体带隙计算中的时域有限差分方法[J]. *物理学报*, 2003, 52(8):1943-1947.
- Wang Gang, Wen Jihong, Han Xiaoyun, et al. Finite difference time domain method for the study of band gap in two-dimensional phononic crystals [J]. *Acta Physica Sinica*, 2003, 52(8):1943-1947. (in Chinese)
- [19] 温熙森. 声子晶体[M]. 北京:国防工业出版社, 2009:23-25.



**第一作者简介:**邵瀚波,男,1993年4月生,博士生。主要研究方向为工程力学在减振降噪中的应用。

E-mail:648877622@qq.com

