

# 局域共振型周期双层板简化模型带隙特性研究\*

钱登辉<sup>1</sup>, 史治宇<sup>2</sup>

(1. 苏州科技大学土木工程学院 苏州, 215011)

(2. 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室 南京, 210016)

**摘要** 基于广泛研究的声子晶体单板结构, 通过在板面之间周期贴附“弹簧-质量块”共振单元, 提出局域共振型声子晶体双层板简化模型。通过对传统平面波展开法加以改进, 建立改进平面波展开法用于计算该模型能带结构。数值结果和分析表明, 在低频段, 能带结构可以打开一条完整的带隙。扭簧以及软材料的尺寸和黏性对带隙的影响比较明显, 但转动惯量对带隙几乎无影响。该研究方法及其结果可以为工程中减振降噪领域双层板甚至夹层板类声子晶体结构的研究提供理论参考。

**关键词** 简化模型; 声子晶体双层板结构; 改进平面波展开法; 带隙特性

**中图分类号** TH113.1

## 引言

在工程中许多领域, 不同类型的板壳被用于外壳结构<sup>[1-2]</sup>。双层板结构具有许多单板结构所不具备的性能。外壳结构在振动传播过程中经常作为传播介质且不断向外辐射噪声。近年来, 声子晶体概念主要研究大多集中在带隙计算方法和特性方面。带隙形成的机理常见的有 Bragg 散射机理<sup>[3-6]</sup>和局域共振机理<sup>[7-10]</sup>。两种机理最大区别在于局域共振带隙所在频段数量级要比 Bragg 散射带隙所在频段的数量级小得多, 这就意味着基于局域共振机理构成的声子晶体可以用来控制更加低频的振动和噪声。因此, 将传统局域共振性声子晶体的设计思路引入到板壳结构中, 将为低频段的振动和噪声控制起到积极的作用<sup>[11-14]</sup>。

目前, 局域共振性声子晶体单板结构已经获得了一定的研究。针对结构构造的不同, 大致分为填充性和贴附型<sup>[15]</sup>两类。对于填充型声子晶体单板, 文献<sup>[16-17]</sup>分别构造了二元和三元结构, 应用平面波展开法研究了相应特性。Oudich 等<sup>[18]</sup>应用有限元法研究了二元和三元贴附型声子晶体单板的带隙特性。Xiao 等<sup>[17]</sup>通过在薄板上周期贴附弹簧质量块, 构造贴附型结构的简化模型, 并研究了其弯曲带

隙特性。Qian 等<sup>[19]</sup>研究了复合型局域共振声子晶体单板结构弯曲振动的传播特性。

基于单板研究现状, 笔者构造了复合型局域共振声子晶体双层板结构, 研究了其带隙特性。针对“弹簧-质量块”和“弹簧-扭簧-质量块”两种简化模型, 通过将传统平面波展开法延伸到该结构, 从是否考虑黏性的角度, 分别对其带隙形成机理和调节规律进行了研究。

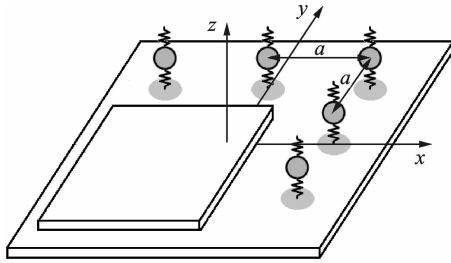
## 1 模型以及公式化

如图 1(a)所示, 复合型局域共振声子晶体双层板简化模型由共振单元简化模型周期贴附在复合双层板的上下板之间而构成。其中: 共振单元简化模型由弹簧、扭簧以及质量块组成; 复合双层板的上下板均由匀质板周期挖孔并在孔中添加另一种软材料而构成。板中软材料为圆柱状, 且不考虑软材料的黏性作用。每个周期单元内双层板的软材料圆心和质量块之间通过弹簧和扭簧连接, 如图 1(b)所示。共振单元的周期排布方式采用正方晶格排布, 且基本矢量为  $\mathbf{a}_1 = (a, 0)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (0, a)$ 。每个振子的位置可以表示为  $\mathbf{R} = \bar{m}\mathbf{a}_1 + \bar{n}\mathbf{a}_2$ , 其中:  $\bar{m}$  和  $\bar{n}$  均为常数。

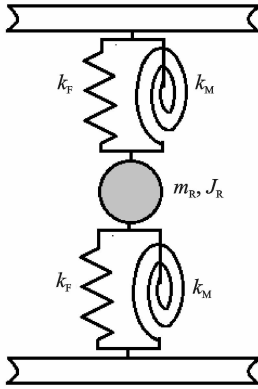
假设双层板简化模型的上下板厚度均满足薄板要求, 且只考虑质量块绕  $y$  轴的扭转而忽略绕  $x$  轴

\* 国家自然科学基金资助项目(11847009); 苏州科技大学科研基金资助项目(XKQ2018007)

收稿日期: 2018-09-12; 修回日期: 2018-12-27



(a) 复合型局域共振声子晶体双层板简化模型  
(a) Simplified model of locally resonant phononic crystal composite double panel structure



(b) 共振单元简化模型  
(b) Simplified model of resonant unit

图1 结构模型

Fig.1 Models of structures

的转动,故认为上下板完全一致。根据薄板弯曲理论并参照对应的单板简化模型<sup>[19]</sup>,图1(a)所示的简化模型的弯曲振动方程为

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ D(\mathbf{r}) \left( \frac{\partial^2 W_1(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \mu(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 W_1(\mathbf{r})}{\partial y^2} \right) \right] + \\
 & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ D(\mathbf{r}) (1 - \mu(\mathbf{r})) \frac{\partial^2 W_1(\mathbf{r})}{\partial x \partial y} \right] + \\
 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ D(\mathbf{r}) \left( \frac{\partial^2 W_1(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \mu(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 W_1(\mathbf{r})}{\partial x^2} \right) \right] - \\
 & \omega^2 \rho(\mathbf{r}) h(\mathbf{r}) W_1(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{R}} Q_1(\mathbf{R}) + \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\mathbf{R}} M_1(\mathbf{R}) - \omega^2 m_R W_R(\mathbf{R}) = Q_R(\mathbf{R}) - \\
 & \omega^2 J_R \theta_R(\mathbf{R}) = M_R(\mathbf{R}) \\
 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ D(\mathbf{r}) \left( \frac{\partial^2 W_2(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \mu(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 W_2(\mathbf{r})}{\partial y^2} \right) \right] + \\
 & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ D(\mathbf{r}) (1 - \mu(\mathbf{r})) \frac{\partial^2 W_2(\mathbf{r})}{\partial x \partial y} \right] + \\
 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ D(\mathbf{r}) \left( \frac{\partial^2 W_2(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \mu(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 W_2(\mathbf{r})}{\partial x^2} \right) \right] - \\
 & \omega^2 \rho(\mathbf{r}) h(\mathbf{r}) W_2(\mathbf{r}) = \\
 & \sum_{\mathbf{R}} Q_2(\mathbf{R}) + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\mathbf{R}} M_2(\mathbf{R})
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 Q_1(\mathbf{R}) &= -k_F [W_1(\mathbf{R}) - W_R(\mathbf{R})] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \\
 Q_R(\mathbf{R}) &= k_F [W_1(\mathbf{R}) - 2W_R(\mathbf{R}) + W_2(\mathbf{R})] \\
 Q_2(\mathbf{R}) &= -k_F [W_2(\mathbf{R}) - W_R(\mathbf{R})] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned}
 M_1(\mathbf{R}) &= \\
 & k_M \left[ \frac{\partial}{\partial x} W_1(\mathbf{R}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) - \theta_R(\mathbf{R}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] \\
 M_R(\mathbf{R}) &= \\
 & -k_M \left[ \frac{\partial}{\partial x} W_1(\mathbf{R}) - 2\theta_R(\mathbf{R}) + \frac{\partial}{\partial x} W_2(\mathbf{R}) \right] \\
 M_2(\mathbf{R}) &= \\
 & k_M \left[ \frac{\partial}{\partial x} W_2(\mathbf{R}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) - \theta_R(\mathbf{R}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中:  $W_1(\mathbf{r})$  和  $W_2(\mathbf{r})$  分别为下板和上板的挠度;  $W_R(\mathbf{R})$  为质量块沿  $z$  向的位移;  $\theta_R(\mathbf{R})$  为质量块绕  $y$  轴的扭转角度;  $\rho(\mathbf{r})$  为板的密度;  $h(\mathbf{r})$  为板的厚度;  $D(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}) h(\mathbf{r})^3 / 12(1 - \mu(\mathbf{r})^2)$  为板的弯曲刚度;  $E(\mathbf{r})$  为弹性模量;  $\mu(\mathbf{r})$  为泊松比。

由于板由两种材料构成,硬材料和软材料的密度、弯曲刚度、弹性模量、泊松比分别用  $\rho_1, D_1, E_1, \mu_1$  和  $\rho_2, D_2, E_2, \mu_2$  表示。对于共振单元简化模型,各参数分别为弹簧刚度  $k_F$ 、质量块质量  $m_R$ 、扭簧刚度  $k_M$  以及质量块转动惯量  $J_R$ 。此外,软材料的半径为  $R_s$ ,晶格常数为  $a$ 。

令  $\alpha(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})h(\mathbf{r}), \beta(\mathbf{r}) = D(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r}), \gamma(\mathbf{r}) = D(\mathbf{r})(1 - \mu(\mathbf{r}))$ , 则式(1)可简化为

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ D(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 W_1(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \beta(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 W_1(\mathbf{r})}{\partial y^2} \right] + \\
 & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \gamma(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 W_1(\mathbf{r})}{\partial x \partial y} \right] + \\
 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ D(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 W_1(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \beta(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 W_1(\mathbf{r})}{\partial x^2} \right] - \\
 & \omega^2 \alpha(\mathbf{r}) W_1(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{R}} Q_1(\mathbf{R}) + \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\mathbf{R}} M_1(\mathbf{R}) - \omega^2 m_R W_R(\mathbf{R}) = \\
 & Q_R(\mathbf{R}) - \omega^2 J_R \theta_R(\mathbf{R}) = M_R(\mathbf{R}) \\
 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ D(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 W_2(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \beta(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 W_2(\mathbf{r})}{\partial y^2} \right] + \\
 & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \gamma(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 W_2(\mathbf{r})}{\partial x \partial y} \right] + \\
 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ D(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 W_2(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \beta(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 W_2(\mathbf{r})}{\partial x^2} \right] - \\
 & \omega^2 \alpha(\mathbf{r}) W_2(\mathbf{r}) = \\
 & \sum_{\mathbf{R}} Q_2(\mathbf{R}) + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\mathbf{R}} M_2(\mathbf{R})
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由于结构在  $x$  和  $y$  方向的周期性,  $\alpha(\mathbf{r}), \beta(\mathbf{r}), \gamma(\mathbf{r})$  和  $D(\mathbf{r})$  均可在空间域进行傅里叶级数展开

$$\begin{cases} D(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} D(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G}\mathbf{r}} \\ \alpha(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \alpha(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G}\mathbf{r}} \\ \beta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \beta(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G}\mathbf{r}} \\ \gamma(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \gamma(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G}\mathbf{r}} \end{cases} \quad (5)$$

$$\xi(\mathbf{G}) = \begin{cases} \xi_2 f + \xi_1 (1-f) & (\mathbf{G} = \mathbf{0}) \\ (\xi_2 - \xi_1) \psi(\mathbf{G}) & (\mathbf{G} \neq \mathbf{0}) \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $\xi(\mathbf{G})$  被用来统一表示  $\alpha(\mathbf{G}), \beta(\mathbf{G}), \gamma(\mathbf{G})$  和  $D(\mathbf{G})$  这4个参量;  $\xi_1$  和  $\xi_2$  分别为硬材料和软材料的相应参量;  $f = \pi R_s^2 / a^2$  为软材料占整个单胞的填充比。

由于软材料是圆柱形的, 所以  $\psi(g) = 2f J_1(gR_s) / (gR_s)$ 。其中:  $J_1$  为一阶第1类 Bessel 函数;  $g$  为倒格矢  $\mathbf{G}$  的模。

根据 Bloch 定理和结构周期性, 位移场  $W_1(\mathbf{r})$  和  $W_2(\mathbf{r})$  可表示为

$$\begin{cases} W_1(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}'} W_1 \mathbf{G}' e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G}')\mathbf{r}} \\ W_2(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}'} W_2 \mathbf{G}' e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G}')\mathbf{r}} \end{cases} \quad (7)$$

其中:  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  为不可约布里渊区边界上的二维 Bloch 波矢;  $\mathbf{G}'$  为倒格矢。

由周期性和 Bloch 定理得到

$$\begin{cases} W_1(\mathbf{R}) = W_1(\mathbf{0}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \\ W_R(\mathbf{R}) = W_R(\mathbf{0}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \\ \theta_R(\mathbf{R}) = \theta_R(\mathbf{0}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \\ W_2(\mathbf{R}) = W_2(\mathbf{0}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \end{cases} \quad (8)$$

根据狄拉克函数的特性, 得到

$$\sum_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{R}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \quad (9)$$

其中:  $\sum_{\mathbf{R}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{G}'} e^{i\mathbf{G}'\mathbf{r}}$ ;  $S = a^2$  为单胞的面积。

由式(7)可以得到

$$\begin{cases} W_1(\mathbf{0}) = \sum_{\mathbf{G}'} W_1(\mathbf{G}') \\ W_2(\mathbf{0}) = \sum_{\mathbf{G}'} W_2(\mathbf{G}') \end{cases} \quad (10)$$

将式(5)~(10)代入式(4), 得到

$$\begin{cases} (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x^2 \sum_{\mathbf{G}'} D(\mathbf{G}'' - \mathbf{G}') (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x^2 W_1 \mathbf{G}' + \\ (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x^2 \sum_{\mathbf{G}'} \beta(\mathbf{G}'' - \mathbf{G}') (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_y^2 W_1 \mathbf{G}' + \\ 2(\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_y \times \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{\mathbf{G}'} \gamma(\mathbf{G}'' - \mathbf{G}') (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_y W_1 \mathbf{G}' + \\ (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_y^2 \sum_{\mathbf{G}'} D(\mathbf{G}'' - \mathbf{G}') (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_y^2 W_1 \mathbf{G}' + \\ (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_y^2 \sum_{\mathbf{G}'} \beta(\mathbf{G}'' - \mathbf{G}') (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x^2 W_1 \mathbf{G}' - \\ \omega^2 \sum_{\mathbf{G}'} \alpha(\mathbf{G}'' - \mathbf{G}') W_1 \mathbf{G}' = \left(-\frac{k_F}{S}\right) \times \\ \left[ \sum_{\mathbf{G}'} W_1 \mathbf{G}' - W_R(\mathbf{0}) \right] + \left(\frac{k_M}{S}\right) \times \\ \left[ \sum_{\mathbf{G}'} (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x^2 W_1 \mathbf{G}' - (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x \theta_R(\mathbf{0}) \right] - \\ \omega^2 m_R W_R(\mathbf{0}) = \\ k_F \left[ \sum_{\mathbf{G}'} W_1 \mathbf{G}' - 2W_R(\mathbf{0}) + \sum_{\mathbf{G}'} W_2 \mathbf{G}' \right] \\ \omega^2 J_R \theta_R(\mathbf{0}) = k_M \left[ \sum_{\mathbf{G}'} (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x W_1 \mathbf{G}' - \right. \\ \left. 2\theta_R(\mathbf{0}) + \sum_{\mathbf{G}'} (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x W_2 \mathbf{G}' \right] \times \\ (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x^2 \sum_{\mathbf{G}'} D(\mathbf{G}'' - \mathbf{G}') (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x^2 W_2 \mathbf{G}' + \\ (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x^2 \sum_{\mathbf{G}'} \beta(\mathbf{G}'' - \mathbf{G}') (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_y^2 W_2 \mathbf{G}' + \\ 2(\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_y \sum_{\mathbf{G}'} \gamma(\mathbf{G}'' - \mathbf{G}') \times \\ (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_y W_2 \mathbf{G}' + (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_y^2 \times \\ \sum_{\mathbf{G}'} D(\mathbf{G}'' - \mathbf{G}') (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_y^2 W_2 \mathbf{G}' + \\ (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_y^2 \sum_{\mathbf{G}'} \beta(\mathbf{G}'' - \mathbf{G}') (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x^2 W_2 \mathbf{G}' - \\ \omega^2 \sum_{\mathbf{G}'} \alpha(\mathbf{G}'' - \mathbf{G}') W_2 \mathbf{G}' = \left(-\frac{k_F}{S}\right) \times \\ \left[ \sum_{\mathbf{G}'} W_2 \mathbf{G}' - W_R(\mathbf{0}) \right] + \left(\frac{k_M}{S}\right) \times \\ \left[ \sum_{\mathbf{G}'} (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x^2 W_2 \mathbf{G}' - (\mathbf{k} + \mathbf{G}')_x \theta_R(\mathbf{0}) \right] \end{cases} \quad (11)$$

若取倒格矢的个数为  $N$ , 则式(11)矩阵化为

$$\begin{bmatrix} U_G + k_F Q_G - k_M S_G - k_F P_G k_M R_G & \mathbf{0} \\ -k_F P_G^T & 2k_F & 0 & -k_F P_G^T \\ k_M R_G^T & 0 & -2k_M & k_M R_G^T \\ \mathbf{0} & -k_F P_G k_M R_G U_G + k_F Q_G - k_M S_G & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S F_G & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_R & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & J_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & S F_G \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (12)$$

其中

$$U_{G_{ij}} = SA_{G_{ij}} + SB_{G_{ij}} + SC_{G_{ij}} + SD_{G_{ij}} + SE_{G_{ij}} \quad (13)$$

$$A_{G_{ij}} = (\mathbf{k} + \mathbf{G}_i)_x^2 D(\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_j) (\mathbf{k} + \mathbf{G}_j)_x^2 \quad (14)$$

$$B_{G_{ij}} = (\mathbf{k} + \mathbf{G}_i)_x^2 \beta(\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_j) (\mathbf{k} + \mathbf{G}_j)_y^2 \quad (15)$$

$$C_{G_{ij}} = 2 (\mathbf{k} + \mathbf{G}_i)_x (\mathbf{k} + \mathbf{G}_i)_y \times \gamma(\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_j) (\mathbf{k} + \mathbf{G}_j)_x (\mathbf{k} + \mathbf{G}_j)_y \quad (16)$$

$$D_{G_{ij}} = (\mathbf{k} + \mathbf{G}_i)_y^2 D(\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_j) (\mathbf{k} + \mathbf{G}_j)_y^2 \quad (17)$$

$$E_{G_{ij}} = (\mathbf{k} + \mathbf{G}_i)_y^2 \beta(\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_j) (\mathbf{k} + \mathbf{G}_j)_x^2 \quad (18)$$

$$F_{G_{ij}} = \alpha(\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_j) \quad (19)$$

$$\mathbf{P}_G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{N^2 \times 1} \quad (20)$$

$$\mathbf{Q}_G = \mathbf{P}_G \mathbf{P}_G^T \quad (21)$$

$$\mathbf{R}_G = \begin{bmatrix} (\mathbf{k} + \mathbf{G}_1)_x \\ (\mathbf{k} + \mathbf{G}_2)_x \\ \vdots \\ (\mathbf{k} + \mathbf{G}_{N \times N})_x \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{S}_G = \begin{bmatrix} (\mathbf{k} + \mathbf{G}_1)_x^2 & (\mathbf{k} + \mathbf{G}_1)_x^2 & \cdots & (\mathbf{k} + \mathbf{G}_1)_x^2 \\ (\mathbf{k} + \mathbf{G}_2)_x^2 & (\mathbf{k} + \mathbf{G}_2)_x^2 & \cdots & (\mathbf{k} + \mathbf{G}_2)_x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{k} + \mathbf{G}_{N \times N})_x^2 & \cdots & (\mathbf{k} + \mathbf{G}_{N \times N})_x^2 & (\mathbf{k} + \mathbf{G}_{N \times N})_x^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

式(12)即为关于  $\omega^2$  的典型广义特征值问题。对于每一给定的波矢  $\mathbf{k}$ , 通过求解特征值可得到相应的一系列特征频率。通过所有的不可约 Brillouin 区边界上的波矢, 得到该复合型局域共振声子晶体双层板简化模型的弯曲振动带结构。表 1 为笔者计算用到的材料参数和几何参数。

表 1 计算所用到的材料和几何参数

Tab. 1 Materials' and geometrical parameters used in calculations

参数	数值	参数	数值
$E_1$ /GPa	77.6	$m_R$ /kg	0.1
$\mu_1$	0.35	$k_M$ /( $\text{N} \cdot \text{m}^2$ )	100
$\rho_1$ /( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	2 730	$J_R$ /( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )	0.01
$E_2$ /GPa	$1.18 \times 10^{-4}$	$a$ /m	0.1
$\mu_2$	0.469	$h$ /m	0.002
$\rho_2$ /( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	1 300	$R_s$ /m	$4 \times 10^{-6}$
$k_F$ /( $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ )	$4 \times 10^5$		

## 2 数值结果和分析

### 2.1 “弹簧-质量块”贴附型局域共振声子晶体双层板简化模型

对于图 1 所示的复合型局域共振声子晶体双层板简化模型, 若双层板只由一种硬材料构成, 且共振单元为弹簧振子, 扭簧忽略不计, 则该模型可以简化为“弹簧-质量块”贴附型局域共振声子晶体双层板简化模型。

式(6)可以简化为

$$\xi(\mathbf{G}) = \begin{cases} \xi_1 & (\mathbf{G} = \mathbf{0}) \\ 0 & (\mathbf{G} \neq \mathbf{0}) \end{cases} \quad (24)$$

将式(24)代入式(14)~(19), 可以简化为

$$A_{G_{ij}} = \begin{cases} D_1 (\mathbf{k} + \mathbf{G}_i)_x^4 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (25)$$

$$B_{G_{ij}} = \begin{cases} \beta_1 (\mathbf{k} + \mathbf{G}_i)_x^2 (\mathbf{k} + \mathbf{G}_i)_y^2 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (26)$$

$$C_{G_{ij}} = \begin{cases} 2 \gamma_1 (\mathbf{k} + \mathbf{G}_i)_x^2 (\mathbf{k} + \mathbf{G}_i)_y^2 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (27)$$

$$D_{G_{ij}} = \begin{cases} D_1 (\mathbf{k} + \mathbf{G}_i)_y^4 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (28)$$

$$E_{G_{ij}} = \begin{cases} \beta_1 (\mathbf{k} + \mathbf{G}_i)_x^2 (\mathbf{k} + \mathbf{G}_i)_y^2 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (29)$$

$$F_{G_{ij}} = \begin{cases} \alpha_1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (30)$$

将式(25)~(30)代入式(13), 则

$$U_{G_{ij}} = \begin{cases} D_1 S [(\mathbf{k} + \mathbf{G}_i)_x^2 + (\mathbf{k} + \mathbf{G}_i)_y^2]^2 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (31)$$

由于共振单元只为弹簧振子, 则与扭簧相关的项应消除掉。于是, 式(12)可化为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_G + k_F \mathbf{Q}_G & -k_F \mathbf{P}_G & \mathbf{0} \\ -k_F \mathbf{P}_G^T & 2 k_F & -k_F \mathbf{P}_G^T \\ \mathbf{0} & -k_F \mathbf{P}_G & \mathbf{U}_G + k_F \mathbf{Q}_G \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{S} \mathbf{F}_G & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S} \mathbf{F}_G \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1(\mathbf{G}) \\ \mathbf{W}_R(\mathbf{0}) \\ \mathbf{W}_2(\mathbf{G}) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (32)$$

图 2 为“弹簧-质量块”贴附型局域共振声子晶

体双层板简化模型的能带结构图。这里,平面波数取  $N = (5 \times 2 + 1)^2$  个。可以看出,能带结构在低频段(330~382 Hz)打开了一条完整的带隙。对于该双层板模型的带隙特性研究,文献[20]已经进行了详细研究。不同的是,该文献应用的是有限元法,但两种方法在处理该结构时均具有很高的精度,误差极小。总的来讲,通过研究分析表明,双层板结构具备的低频带隙性能优于单板结构。

为了描述方便,能带用符号  $G_*$  表示,能带上的临界频率用符号  $F_*$  表示。

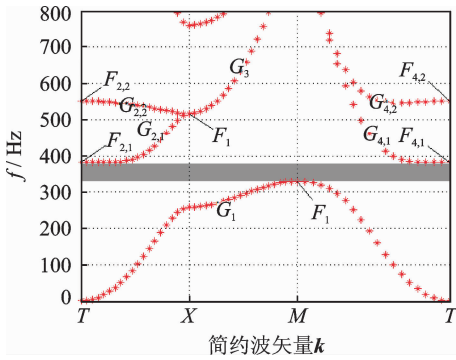


图2 “弹簧-质量块”双层板简化模型能带结构

Fig. 2 Band structure of “spring-mass” simplified model of double panel structure

## 2.2 “弹簧-扭簧-质量块”贴附型局域共振声子晶体双层板简化模型

当考虑扭簧的作用时,采用式(12)对该简化模型的弯曲振动能带结构进行计算。由于板只由一种材料构成,所以方程里矩阵  $U_G$  中的元素仍由式(31)求取。

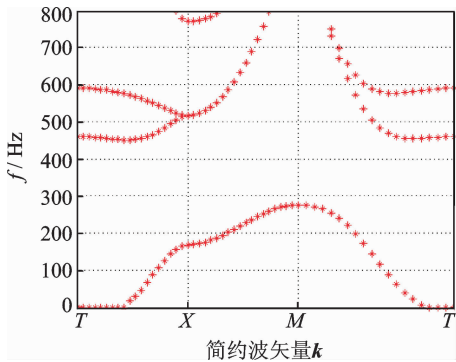


图3 “弹簧-扭簧-质量块”双层板简化模型能带结构图

Fig. 3 Band structure of “spring-torsional spring-mass” simplified model of double panel structure

图3为“弹簧-扭簧-质量块”贴附型局域共振声子晶体双层板简化模型的弯曲振动能带结构。其中,平面波数取为  $N = (10 \times 2 + 1)^2$  个。将该能带

结构与图2所示的同参数下不考虑扭簧作用的“弹簧-质量块”贴附型局域共振声子晶体双层板简化模型的弯曲振动能带结构进行对比发现,扭簧对图2中标示的能带  $G_1, G_{2.1}, G_{2.2}, G_{4.1}$  和  $G_{4.2}$  均有影响,但对 Bragg 散射能带  $G_3$  并无影响。另外,扭簧的添加使能带  $G_1$  向下偏移,同时使得  $G_{2.1}, G_{2.2}, G_{4.1}$  和  $G_{4.2}$  向上偏移。因此,扭簧的增加不仅使带隙宽度增大,并且使带隙起始频率降低。

图4为扭簧刚度  $k_M$  对带隙临界频率  $F_1, F_{2.2}, F_3$  和带隙宽度  $F_w$  的影响关系。除了  $k_M$  以外,计算用到的参数如表1所示,且  $k_M$  的变化范围为  $0 \sim 200 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ 。通过添加附加弹簧的方式可以使  $G_{2.1}$  轻易移动到  $G_{2.2}$  上方<sup>[20]</sup>,所以这里不考虑  $k_M$  对  $F_{2.1}$  的影响。可以看出,随着  $k_M$  的增大,  $F_1$  减小,  $F_{2.2}$  增大,  $F_3$  保持不变。由于  $F_{2.2}$  所在关系曲线一直在  $F_3$  上方,所以  $F_w$  由起始频率  $F_1$  和终止频率带隙  $F_3$  决定,且一直在增大。因此,对于“弹簧-扭簧-质量块”贴附型局域共振声子晶体双层板简化模型,增加扭簧刚度可以对加宽带隙宽度和降低带隙起始频率同时起到积极作用。

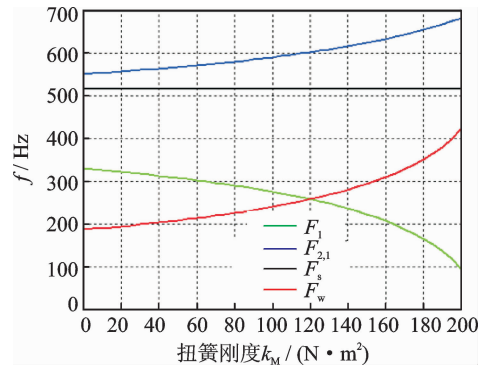


图4 带隙临界频率及带隙宽度与扭簧刚度之间的关系  
Fig. 4 The influences of torsional spring stiffness on critical frequencies and bandgap width

为了研究质量块转动惯量  $J_R$  对“弹簧-扭簧-质量块”贴附型局域共振声子晶体双层板简化模型带隙的影响关系,计算了转动惯量为  $J_R = 0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  时该简化模型的弯曲振动能带结构,如图5所示。

计算用到的参数与图2对应的算例一致。对比图5和图2可以发现,能带结构是完全一致的,这说明对于“弹簧-扭簧-质量块”贴附型局域共振声子晶体双层板简化模型,转动惯量  $J_R$  对其弯曲振动能带结构没有任何影响。

此外,通过与相应单板简化模型进行对比<sup>[19]</sup>,扭簧的添加对单板和双层板的影响规律完全一致。

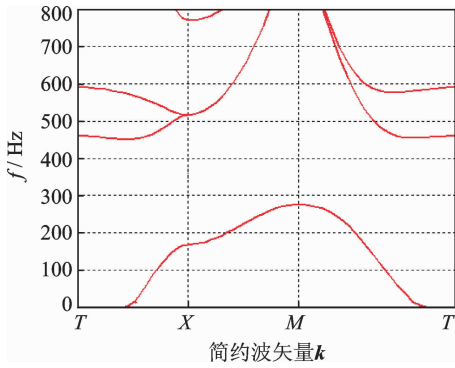


图 5 转动惯量改变时“弹簧-扭簧-质量块”双层板简化模型能带结构图

Fig. 5 Band structure of “spring-torsional spring-mass” simplified model of double panel structure with rotational inertia changes

### 2.3 复合型局域共振声子晶体双层板简化模型

当“弹簧-扭簧-质量块”贴附型局域共振声子晶体双层板简化模型的上下板由周期挖孔并填充软材料的复合板代替时,该简化模型则变为“弹簧-扭簧-质量块”复合型局域共振声子晶体双层板简化模型,如图 1 所示。此时,在计算其能带结构时,式(12)中的  $U_G$  由式(14)~(18)求取。笔者从是否考虑复合板中软材料黏性这两个角度研究其带隙特性。为了计算的进度,笔者在计算该简化模型能带结构时均采用改进的平面波展开法<sup>[21]</sup>。

当不考虑复合板中的软材料黏性时,计算所得的“弹簧-扭簧-质量块”复合局域共振声子晶体双层板简化模型的弯曲振动能带结构如图 6 所示。在这里,由于复合板中存在两种材料,因此平面波数取  $N = (10 \times 2 + 1)^2$  个来增加计算精度。对比图 2, 3 和图 6 可以发现,复合板中的软材料与扭簧的作用

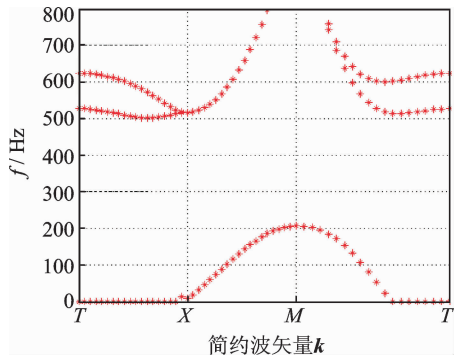


图 6 不考虑软材料黏性下复合型双层板简化模型能带结构图

Fig. 6 Band structure of simplified model of composite double panel structure with the viscosity of soft material not considered

类似,都使得能带  $G_1$  向下偏移,并同时使得  $G_{2,1}$ ,  $G_{2,2}$ ,  $G_{4,1}$  和  $G_{4,2}$  向上移动。因此,复合板中软材料的添加同样对带隙宽度增大并且带隙起始频率降低起到促进作用。

图 7 为复合板软材料半径  $R_s$  对带隙临界频率  $F_1, F_{2,2}, F_3$  和带隙宽度  $F_w$  的影响关系。除了  $R_s$ , 计算用到的参数如表 1 所示,  $R_s$  的变化范围为  $1 \times 10^{-6} \sim 5 \times 10^{-6}$  m。由于  $F_{2,1}$  可以通过添加附加弹簧的方式增大到  $F_{2,2}$  上方,因此无需考虑对  $F_{2,1}$  的影响。可以看出,随着  $R_s$  的增大,  $F_1$  减小而  $F_{2,2}$  增大,且  $F_3$  保持不变。 $F_{2,2}$  所在曲线一直在  $F_3$  上方,带隙宽度  $F_w$  由起始频率  $F_1$  和终止频率  $F_3$  决定,且一直保持增长。因此,对于该复合型局域共振声子晶体双层板简化模型,通过引入和调节复合板软材料的半径,不仅可以使所得能带结构的带隙宽度变宽,还能同时降低带隙的起始频率。

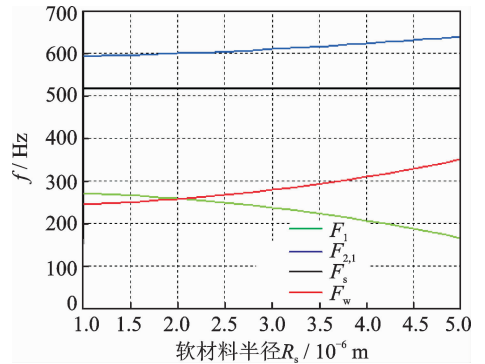
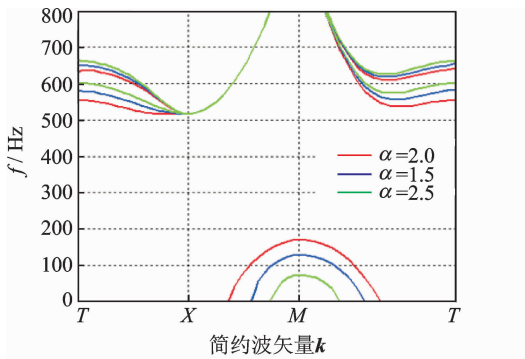


图 7 带隙临界频率及带隙宽度与复合板软材料半径之间的关系

Fig. 7 The influences of soft material radius in composite plates on critical frequencies and bandgap width

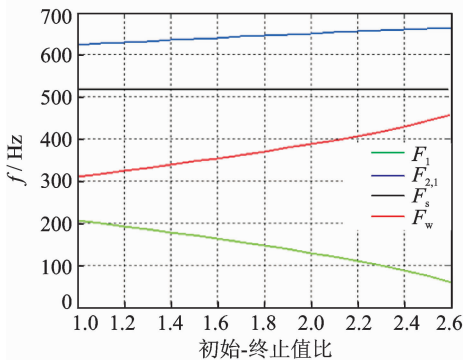
当考虑复合板软材料的黏性作用时,在频域内,软材料的各模量与频率相关。式(12)的特征值问题需要通过迭代过程求解<sup>[19]</sup>。

图 8(a)为软材料松弛时间为  $\tau = 3 \times 10^{-5}$  s, 初始-终止值比  $\alpha$  分别取 1.5, 2.0 和 2.5 时的“弹簧-扭簧-质量块”复合型局域共振声子晶体双层板简化模型的弯曲振动能带结构图。其中,平面波数取  $N = (10 \times 2 + 1)^2$  个。可以看出,  $\alpha$  对能带  $G_1, G_{2,1}, G_{2,2}, G_{4,1}$  和  $G_{4,2}$  均有影响。为了进一步说明该影响规律,作出了带隙临界频率  $F_1, F_{2,2}, F_3$  和带隙宽度  $F_w$  随  $\alpha$  的变化曲线,如图 8(b)所示。可见,随着  $\alpha$  的增大,起始频率  $F_1$  减小,  $F_{2,2}$  增大,而  $F_3$  保持不变。由于  $F_{2,2}$  所在曲线一直在  $F_3$  上方,因此带隙宽度由  $F_1$  和  $F_3$  决定,且一直增大。由此可见,通过增



(a)  $\tau=3 \times 10^{-5}$  s时, 不同初始-终止值比下复合型双层板简化模型能带结构图

(a) Band structures of simplified model of composite double panel structure with the viscosity of soft material considered when  $\tau=3 \times 10^{-5}$  s

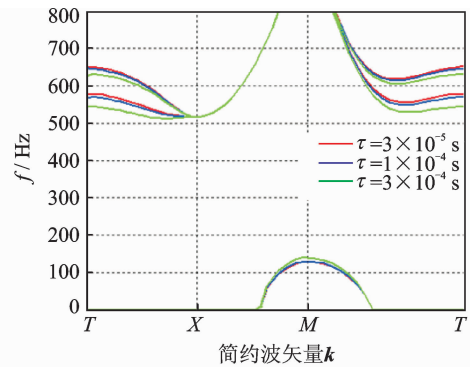


(b) 初始-终止值比对带隙临界频率及带隙宽度的影响关系

(b) Influences of initial-final value ratio on critical frequencies and bandgap width

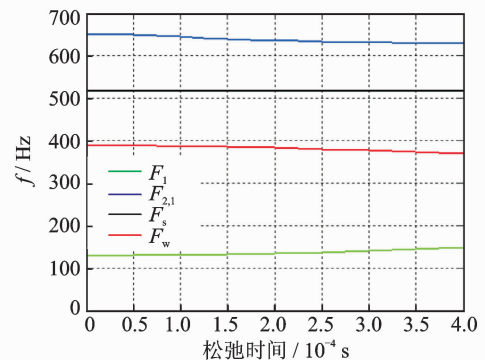
图8 初始-终止值比对带隙的影响

Fig. 8 Influences of initial-final value ratio on band gap



(a)  $\alpha=2.0$ 时, 不同松弛时间下复合型双层板简化模型能带结构图

(a) Band structures of simplified model of composite double panel structure with the viscosity of soft material considered when  $\alpha=2.0$



(b) 松弛时间对带隙临界频率和带隙宽度的影响关系

(b) Influences of relax time on critical frequencies and bandgap width

图9 松弛时间对带隙的影响

Fig. 9 Influences of relax time on band gap

大黏弹性软材料的初始-终止值比,对增大该声子晶体双层板简化模型的带隙宽度和降低其起始频率具有积极作用。

图9(a)为软材料初始-终止值比为 $\alpha=2.0$ ,松弛时间 $\tau$ 分别取 $3 \times 10^{-5}$  s,  $1 \times 10^{-4}$  s,  $3 \times 10^{-4}$  s时的弯曲振动能带结构图。其中,平面波数取 $N=(10 \times 2 + 1)^2$ 个。可以看出, $\tau$ 对能带结构有一定的影响,但影响不大。带隙临界频率 $F_1, F_{2,2}, F_3$ 和带隙宽度 $F_w$ 随 $\tau$ 的变化曲线图如图9(b)所示。可以看出,随着 $\tau$ 的增大,起始频率 $F_1$ 增大而 $F_{2,2}$ 减小,且 $F_3$ 保持不变。由于 $F_{2,2}$ 的变化曲线一直在 $F_3$ 的上方,所以带隙宽度 $F_w$ 由起始频率 $F_1$ 和终止频率 $F_3$ 决定,且随着 $\tau$ 的增大而减小。总的来说,对于该声子晶体结构, $\tau$ 对各临界频率的影响范围远不及 $\alpha$ 。但是,通过减小黏弹性软材料的松弛时间对增大该声子晶体简化模型的带隙宽度和降低其起始频率还是具有一定的促进作用。

### 3 结论

1) 在低频段,能带结构可以打开一条完整的带隙。扭簧对带隙有明显的影响,通过增加扭簧刚度不仅可以增大带隙宽度,更能降低带隙的起始频率,但改变转动惯量对能带结构没有任何影响。

2) 软材料的添加对能带结构的影响与扭簧的影响相似,通过增大软材料的半径,不仅使能带结构带隙变宽,还能降低带隙的起始频率。当考虑软材料黏性作用时,通过增大黏弹性软材料的初始-终止值比或者减小松弛时间,可以增大该双层板简化模型能带结构的带隙宽度及降低其起始频率。

### 参 考 文 献

- [1] Carneal J P, Fuller C R. An analytical and experimental investigation of active structural acoustic control of noise transmission through double panel systems[J]. Journal of Sound & Vibration, 2004, 272(3-5): 749-

- 771.
- [2] Pietrzko S J, Mao Q. New results in active and passive control of sound transmission through double wall structures [J]. *Aerospace Science & Technology*, 2008, 12(1):42-53.
- [3] Sigalas M M, Economou E N. Elastic and acoustic wave band structure[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 158(2): 377-382.
- [4] Dong Yake, Yao Hong, Du Jun, et al. Research on local resonance and Bragg scattering coexistence in phononic crystal[J]. *Modern Physics Letters B*, 2017, 31(11): 1734-1759.
- [5] Qi Xiaoqiao, Li Tuanjie, Zhang Jialong, et al. Band gap structures for 2D phononic crystals with composite scatterer[J]. *Applied Physics A*, 2018, 124(5): 364.
- [6] Kherraz N, Haumesser L, Levassort F, et al. Controlling Bragg gaps induced by electric boundary conditions in phononic piezoelectric plates [J]. *Applied Physics Letters*, 2016, 108(9): 154310.
- [7] Liu Zhengyou, Zhang Xixiang, Mao Yiwei, et al. Locally resonant sonic materials[J]. *Science*, 2000, 289 (5485): 1734-1736.
- [8] 麻乘榕, 邵晨, 万庆冕, 等. 用于汽车低频振动控制的局域共振声子晶体[J]. *应用声学*, 2018, 37(1): 152-158.
- Ma Chengrong, Shao Chen, Wan Qingmian, et al. A locally-resonant phononic crystal for low-frequency vibration control of vehicles[J]. *Journal of Applied Acoustics*, 2018, 37(1): 152-158. (in Chinese)
- [9] Qian Denghui, Wang Jianchun. The bandgap properties of the three-component semi-infinite plate-like LR-PC by using PWE/FE method[J]. *Modern Physics Letters B*, 2018, 32(16): 1850173-1-16.
- [10] Zuo Shuguang, Huang Haidong, Wu Xudong, et al. Low-frequency band gap of locally resonant phononic crystals with a dual-base plate[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2018, 143(3): 1326.
- [11] Jin Yabin, Pennec Y, Pan Yongdong, et al. Phononic crystal plate with hollow pillars connected by thin bars [J]. *Journal of Physics D Applied Physics*, 2017, 50 (3): 035301.
- [12] Guo Yuning, Hettich M, Dekorsy T. Guiding of elastic waves in a two-dimensional graded phononic crystal plate[J]. *New Journal of Physics*, 2017, 19: 013029.
- [13] Jiang Ping. Low-frequency band gap and defect state characteristics in a multi-stub phononic crystal plate with slit structure[J]. *Journal of Applied Physics*, 2017, 121(1): 015106.
- [14] Mazzotti M, Miniaci M, Bartoli I. Band structure analysis of leaky Bloch waves in 2D phononic crystal plates[J]. *Ultrasonics*, 2017, 74: 140-143.
- [15] Ma Jiahong, Hou Zhilin, Assouar B M. Opening a large full phononic band gap in thin elastic plate with resonant units[J]. *Journal of Applied Physics*, 2014, 115(9): 093508.
- [16] Hsu J C, Wu T T. Lamb waves in binary locally resonant phononic plates with two-dimensional lattices[J]. *Applied Physics Letters*, 2007, 90(20): 201904-1-3.
- [17] Xiao Wei, Zeng Guangwu, Cheng Yuansheng. Flexural vibration band gaps in a thin plate containing a periodic array of hemmed discs[J]. *Applied Acoustics*, 2008, 69(3): 255-261.
- [18] Oudich M, Li Y, Assouar B M, et al. A sonic band gap based on the locally resonant phononic plates with stubs[J]. *New Journal of Physics*, 2010, 12(2): 201-206.
- [19] Qian Denghui, Shi Zhiyu. Bandgap properties in simplified model of composite locally resonant phononic crystal plate[J]. *Physics Letters A*, 2017, 381(40): 3505-3513.
- [20] Qian Denghui, Shi Zhiyu. Bandgap properties in locally resonant phononic crystal double panel structures with periodically attached spring-mass resonators[J]. *Physics Letters A*, 2016, 380(41): 3319-3325.
- [21] Cao Yongjun, Hou Zhilin, Liu Youyan. Convergence problem of plane-wave expansion method for phononic crystals[J]. *Physics Letters A*, 2004, 327(2-3): 247-253.



**第一作者简介:**钱登辉,男,1991年1月生,博士、讲师。主要研究方向为声子晶体夹层结构、振动与噪声控制、压电纳米声子晶体结构。曾发表《Bandgap properties of a piezoelectric phononic crystal nanobeam with surface effect》(《Journal of Applied Physics》2018, Vol. 124, No. 5)等论文。

E-mail: dhqian@usts.edu.cn