

板中 Lamb 波激励响应计算方法^{*}

许西宁¹, 余祖俊^{1,2}, 邢博¹, 朱力强^{1,2}

(1. 北京交通大学机械与电子控制工程学院 北京, 100044)

(2. 北京交通大学载运工具先进制造与测控技术教育部重点实验室 北京, 100044)

摘要 采用基于半解析有限元的激励响应计算方法来求解薄板中 Lamb 波的激励响应结果, 替代常规的实验方法, 实现对薄板中 Lamb 波传播特性的仿真分析。与三维有限元仿真方法相比, 采用激励响应计算方法仿真导波在波导介质中的传播过程可以节省计算量, 提高效率。通过求解薄板中 Lamb 波的一般均质方程, 基于频谱叠加原理, 可以计算薄板中 Lamb 波激励响应结果。分别提取激励响应计算结果和实验测量数据, 通过小波分析计算两种数据的 Lamb 波群速度。经验证, 激励响应仿真计算结果与实验数据有很好的 consistency, 通过群速度频散曲线对比两种方法获取的数据, 模态分析结论一致。激励响应计算方法还可以仿真计算任意截面波导介质中导波的传播过程, 具有较好的通用性。

关键词 Lamb 波; 激励响应; 半解析有限元; 模态; 群速度

中图分类号 TB553; TH878

引言

传播超声导波^[1-3]的波导介质一般具有以下特点, 纵向长度很长、横截面形状一致, 如薄板、杆、管道和钢轨等^[4-6]。超声导波在波导介质中传播时可以覆盖整个介质的横截面, 且传播距离远, 因此超声导波是一种非常有前景的监测手段。基于超声导波, 可以有效定位结构损伤的位置、程度^[7-8]和类型。

在平板中传播的 Lamb 波^[9-11]是导波的一种, 近年来被广泛应用于复合材料结构^[12-13]的无损检测^[14-17]中。频散、多模态是导波的基本特性, 在同一频率下有多个可传播的导波模态, 在采用 Lamb 波检测薄板材料内部缺陷时, 需要研究各个模态的激励方法及传播规律。采用计算机仿真研究方法可以节省大量的时间和资源, 三维有限元仿真是最常用的方法, 且有比较成熟的商业软件, 如 ANSYS 等。激励响应计算方法是研究 Lamb 波传播特性的另一途径, 基于半解析有限元方法^[18-19], 对于薄板介质, 在横截面作一维有限元离散, 当仿真较远距离、三维离散单元非常密集时, 采用激励响应计算方法可以节省大量的计算量、时间和内存。

在激励响应计算时, 首先基于半解析有限元方法建立薄板中 Lamb 波的一般均质波动方程, 通过求解标准特征值问题提取薄板中导波的模态数据, 建立系统函数模型。通过傅里叶变换得到施加激励信号的频域值, 将频域值代入系统函数模型, 进行加权求和, 计算得到频率-波数域中的激励响应。应用傅里叶逆变换, 将系统频率响应从频域转换成时域, 得到远离波源位置处的瞬态响应结果。激励响应计算方法可以求解任意横截面波导介质的时间瞬态响应, 该方法可推广用于计算导波在钢轨或管道中的传播过程, 具有较好的通用性。

1 模型定义

在计算薄板中 Lamb 波的激励响应时, 首先要建立薄板的系统函数模型, 这里定义薄板的横截面为 $y-z$ 坐标平面, Lamb 波传播方向为 x 方向, 如图 1 所示。

用式(1)来表示薄板的系统函数模型^[4]

$$H(y, z, f) = \sum_{m=1}^{2M} -\frac{U_m^L \tilde{\mathbf{P}}}{\mathbf{B}_m} \mathbf{U}_m^{Ru\phi} e^{i[\xi_m(x-x_s)]} \quad (1)$$

其中: y 为薄板横截面的横坐标; z 为薄板横截面的

^{*} “十三五”国家重点研发计划资助项目(2016YFB1200401); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2019JBM045)

收稿日期: 2017-12-21; 修回日期: 2018-10-30

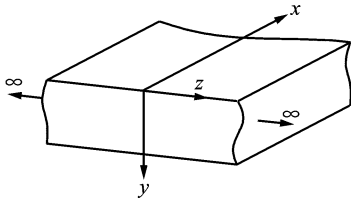


图 1 薄板中 Lamb 波传播的半解析有限元模型

Fig. 1 Semi-analytical finite element model of Lamb wave propagation in a plate

纵坐标; f 为薄板中 Lamb 波的振动频率; m 为模态序号; x_s 为激励点坐标; \tilde{p} 为激励信号幅值; \mathbf{U}_m^L 为 Lamb 波振型的左特征向量; $\mathbf{U}_m^{\text{Rup}}$ 为 Lamb 波振型的右特征向量的上半部。

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{U}_m^L \mathbf{B} \mathbf{U}_m^{\text{R}} \quad (2)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 - \omega^2 \mathbf{M} & 0 \\ 0 & -\mathbf{K}_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中: $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_3, \mathbf{M}$ 为 Lamb 波一般均质波动方程中的刚度矩阵。

对激励信号 $F(t)$ 作傅里叶变换

$$\hat{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (4)$$

经卷积计算,可以得到 $\mathbf{V}(y, z, f)$ 为

$$\mathbf{V}(y, z, f) = \hat{F}(f) \mathbf{H}(y, z, f) = \hat{F}(f) \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{U}_m^L \tilde{p} \mathbf{U}_m^{\text{Rup}} e^{i[\xi_m(x-x_s)]}}{\mathbf{B}_m} \quad (5)$$

对 $\mathbf{V}(y, z, f)$ 作傅里叶反变换,可以得到激励信号的响应结果。

2 建立系统函数模型

薄板中 Lamb 波激励响应的时域波形是通过频域计算结果的反傅里叶变换获得的,在计算频域的激励响应结果时,首先要建立薄板的系统函数模型。该模型是由所有在薄板中可传播的 Lamb 模态组合构建的,如式(1)所示,其中主要用到了波动方程的刚度矩阵和各模态的振型数据。通过半解析有限元方法可以建立薄板中 Lamb 波的一般均质波动方程,获得刚度矩阵,求解波动方程可以进一步得到 Lamb 波各传播模态的振型数据,由刚度矩阵和振型数据可以建立薄板的系统函数模型。

半解析有限元方法可用于建立任意横截面波导介质中导波的传播模型,对于薄板结构而言,只需在横截面作一维有限元离散,沿 Lamb 波传播方向质

点的位移则用简谐波指数方程的形式表示,通过标准的数学运算,可以获得板中 Lamb 波的一般均质方程。

图 1 为无限宽自由薄板的模型,导波沿 x 方向传播,每个质点的位移用 \mathbf{u} 表示,应力和应变分别用 $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ 表示。

$$\begin{cases} \mathbf{u} = [u_x & u_y & u_z]^T \\ \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \sigma_{yz} & \sigma_{xz} & \sigma_{xy}]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} & \gamma_{xy}]^T \end{cases} \quad (6)$$

应变与位移的关系可用式(7)表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\mathbf{L}_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{L}_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{L}_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right] \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{L}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{L}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

薄板中坐标为 (x, y, z) 的任意质点,其随时间变化的位移值,可以用简谐波时空域的函数表示^[6]为

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} u_x(x, y, z, t) \\ u_y(x, y, z, t) \\ u_z(x, y, z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_x(y, z) \\ U_y(y, z) \\ U_z(y, z) \end{bmatrix} e^{i(\xi x - \omega t)} \quad (8)$$

其中: $e^{i\xi x}$ 为空间域的值; ξ 为波数; $e^{i\omega t}$ 为时间域的值; ω 为频率。

在有限元离散时,将薄板的横截面等效为无限宽,仅在 z 方向作一维有限元离散,如图 2 所示。3 个节点组成一个单元,每个节点包含 x, y, z 三个自由度。

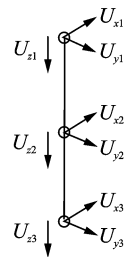


图 2 节点单元

Fig. 2 Node element

对于离散后的单元,其内部任意一点的位移可以表示^[6]为

$$u^{(e)}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \mathbf{N}_k(y, z) U_{xk} \\ \sum_{k=1}^n \mathbf{N}_k(y, z) U_{yk} \\ \sum_{k=1}^n \mathbf{N}_k(y, z) U_{zk} \end{bmatrix} e^{i(\xi x - \omega t)} = \mathbf{N}(y, z) \mathbf{q}^{(e)} e^{i(\xi x - \omega t)} \quad (9)$$

其中: $\mathbf{N}(y, z)$ 为形函数矩阵; $\mathbf{q}^{(e)}$ 为节点位移矢量。

设单元长度为 l , 其单元形函数为: $N_1 = \frac{2}{l^2}(z - z_2)(z - z_3)$, $N_2 = -\frac{4}{l^2}(z - z_1)(z - z_3)$, $N_3 = \frac{2}{l^2}(z - z_1)(z - z_2)$ 。其中: $z_1 = 0, z_2 = l/2, z_3 = l$ 。

经数学运算和推导, 最终可得到以下一般均质波动方程^[20]为

$$[\mathbf{K}_1 + i\xi \mathbf{K}_2 + \xi^2 \mathbf{K}_3 - \omega^2 \mathbf{M}]_M \mathbf{U} = 0 \quad (10)$$

其中: 下标 M 代表系统的自由度数; \mathbf{U} 为振型矢量; $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_3, \mathbf{M}$ 为刚度矩阵。

求解式(10)可以得到波数 ξ 、频率 ω 的值, 从而绘制 Lamb 波相速度频散曲线, 如图 3 所示。横轴为频厚积, 纵轴为相速度。频厚积即频率与平板厚度的乘积, Lamb 波在不同频厚积平板中的传播特性是不同的。

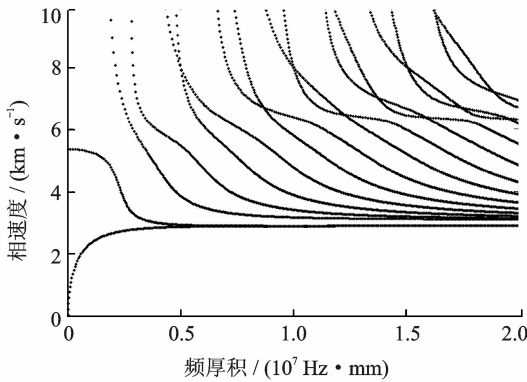


图3 相速度频散曲线

Fig. 3 Phase velocity dispersion curves

由式(11)可求出 Lamb 波群速度值, 并绘制频散曲线, 如图 4 所示。

$$C_g = \frac{d\omega}{d\xi} \quad (11)$$

求解式(10), 可得到振型矢量 \mathbf{U} , 以及刚度矩阵 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_3, \mathbf{M}$, 代入式(3)中, 可得到 \mathbf{B} 矩阵, 将 \mathbf{U}, \mathbf{B} 代入式(1)中, 可得到系统函数模型 \mathbf{H} 。

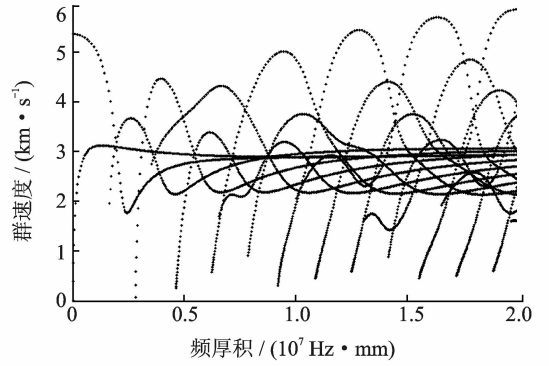


图4 群速度频散曲线

Fig. 4 Group velocity dispersion curves

3 激励响应求解

以 2.5 mm 厚铝板为例, 求解激励响应结果。在铝板左侧中心点沿 x 方向施加激励信号, 分别计算距离施加点 100 和 200 mm 位置的响应信号, 如图 5 所示。

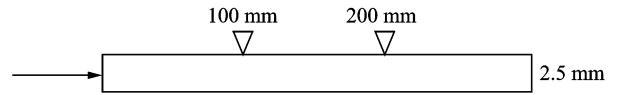


图5 激励响应计算布置图

Fig. 5 Layout of excitation response calculation

激励源为三角波信号, 如图 6 所示。三角波信号频谱较宽, 通过分析响应信号可以得到多个频率点的群速度, 进而和群速度频散曲线进行比对验证。

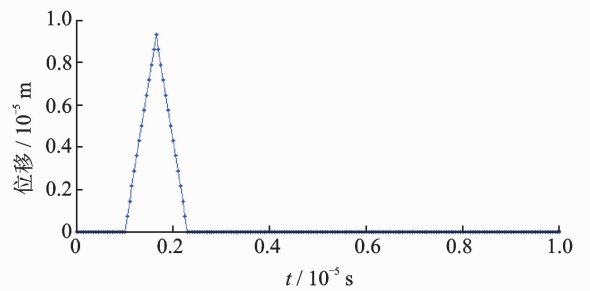


图6 激励信号

Fig. 6 Exciting signal

首先对该激励信号进行傅里叶变换, 得到三角波信号的频谱, 如图 7 所示。

根据频谱图, 选取 2 MHz 以内模值较大的频率点进行计算, 将每个频率值代入式(3)得到 \mathbf{B} 矩阵, 代入式(10)得到特征向量 $\mathbf{U}_m^L, \mathbf{U}_m^R$ 。

激励信号施加在铝薄板中间节点的 x 方向, 将

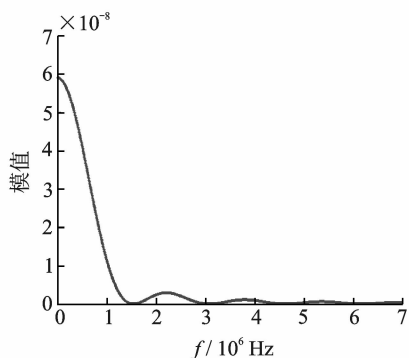
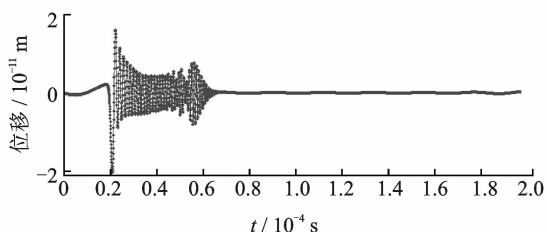


图7 三角波信号频谱

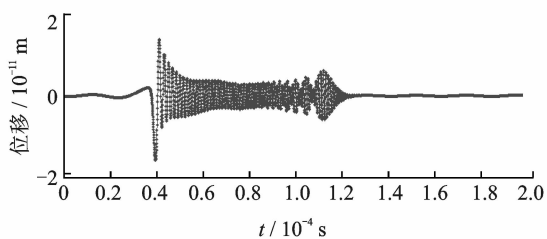
Fig. 7 Spectrum of triangular wave

该方向位移值设为1,其余置0,代入 $\tilde{\mathbf{p}}$ 矢量。令 $x_s=0$ m, $x=0.1/0.2$ m,求解式(1),获取所有频率点的 $\mathbf{H}(y,z,f)$,代入式(5)得到 $\mathbf{V}(y,z,f)$,经反傅里叶变换,得到最终激励响应计算结果,如图8所示。图8(a)为距离激励点0.1 m位置的激励响应结果,图8(b)为0.2 m位置的响应结果。



(a) 0.1 m处的激励响应结果

(a) Response of exciting signal at 0.1 m



(b) 0.2 m处的激励响应结果

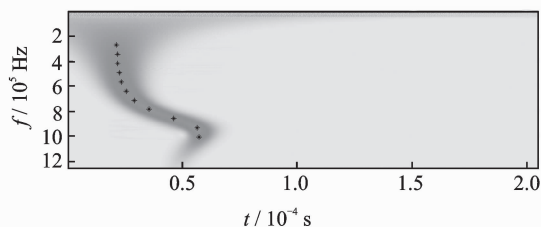
(b) Response of exciting signal at 0.2 m

图8 激励信号响应计算结果

Fig. 8 Response of exciting signal

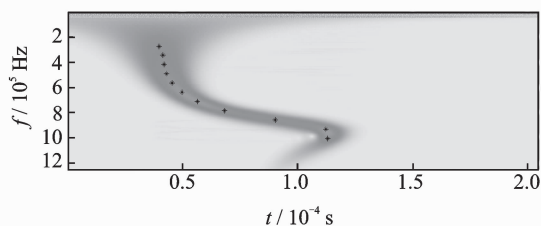
由图可见,Lamb波在传播过程中波包变宽,出现了频散现象。以上求解采用半解析有限元方法,共耗时约175 s。采用有限元分析软件同样可以进行激励响应分析,如用ANSYS软件,针对300 mm长,200 mm宽,厚度为2.5 mm的铝板,网格大小设为0.125 mm×0.125 mm×10 mm,求解过程需耗时28 h 17 min。由此可见,采用半解析有限元方法可以大大节约计算时间。

对图8中的激励响应结果进行小波分析,得到小波时频图,如图9所示。



(a) 0.1 m处响应信号的小波分析结果

(a) Wavelet analysis results of response signal at 0.1 m



(b) 0.2 m处响应信号的小波分析结果

(b) Wavelet analysis results of response signal at 0.2 m

图9 小波分析结果及峰值点

Fig. 9 Wavelet analysis results and peak points

图9(a),(b)分别是0.1,0.2 m处激励响应信号的小波分析结果,在图中用星号标注了不同频率的峰值点,根据图9(a),(b)中峰值点的时刻,可以计算出不同频率下的Lamb波群速度值,计算结果如表1所示。

表1 不同频率下的群速度值

Tab. 1 Group velocities at different frequencies

序号	f/MHz	群速度/ $(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
1	1.008	1 787
2	0.935	1 787
3	0.862	2 262
4	0.789	3 053
5	0.715	3 643
6	0.642	4 124
7	0.569	4 505
8	0.496	4 902
9	0.422	4 914
10	0.349	5 141
11	0.276	5 319

激励响应计算共求解得到11个群速度值,在Lamb波群速度频散曲线上叠加绘制了这11个群速度值,在图10中用圆圈绘出。从图中可以看出,11个群速度值均在 S_0 模态的群速度频散曲线附近,在2.5 mm厚铝板中心施加三角波激励信号,可以激励出对称模态的Lamb波。

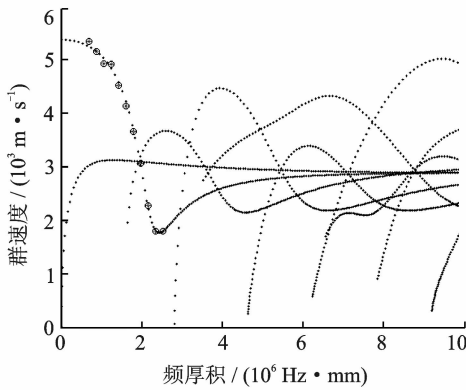


图 10 激励响应计算得到的群速度值

Fig. 10 Group velocities calculated by excitation response

4 实验分析

下面将通过实验进一步验证激励响应计算结果。实验时选用 2.5 mm 厚的 1060 工业纯铝板,铝含量为 99.6%,采用汕头超声公司的 1 MHz 超声波斜探头作为 Lamb 波的发射、接收探头,探头入射角为 45°,型号为 1P13*13 K1。探头采用耦合剂粘在铝板上,探头布置如图 11 所示。

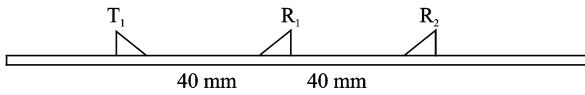
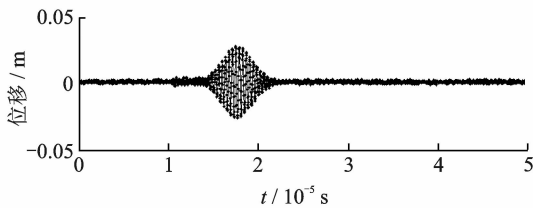


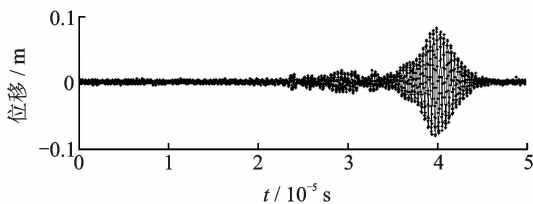
图 11 实验布置图

Fig. 11 Experimental layout

在发射探头 T_1 施加高压脉冲信号,激励 Lamb 波在铝板中传播,接收探头 R_1, R_2 采集的波形如图 12 所示。上图为距离 T_1 发射探头 40 mm 位置处,



(a) 40 mm 处接收信号波形
(a) Received signal at 40 mm



(b) 80 mm 处接收信号波形
(b) Received signal at 80 mm

图 12 接收信号波形

Fig. 12 Receive signal waveform

探头 R_1 接收到的波形,下图为探头 R_2 接收的波形图, R_2 距离 T_1 发射探头 80 mm。

对接收信号做小波变化,可以得到 R_1, R_2 探头接收信号的时频图,其信号峰值的时刻分别为 17.64, 40.04 μ s,接收探头间距 40 mm,群速度值为 1 785.7 m/s。

下面进行激励响应计算分析,在铝板表面,平行铝板方向施加激励信号,铝板厚度为 2.5 mm,激励信号中心频率为 1 MHz,如图 13 所示。

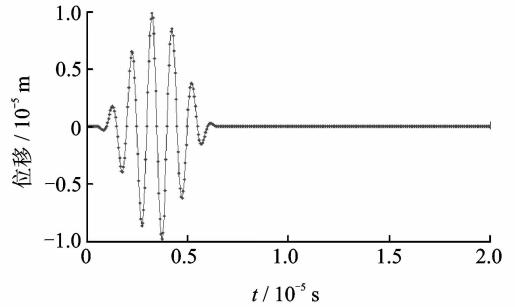


图 13 激励信号

Fig. 13 Exciting signal

激励响应结果的计算点分别距离激励点位置 80, 120 mm,如图 14 所示。

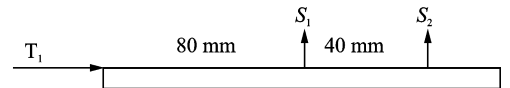


图 14 激励响应计算布置图

Fig. 14 Layout of excitation response calculation

激励信号频谱如图 15 所示。

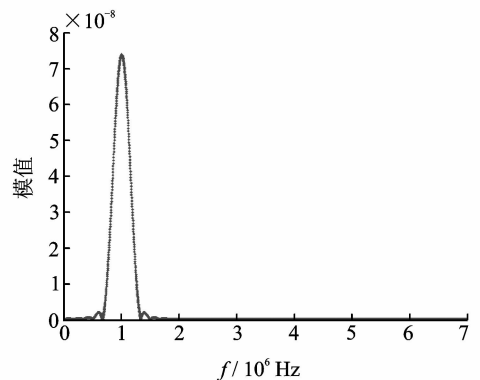


图 15 激励信号频谱

Fig. 15 Spectrum of exciting signal

选取模值较大的 $[0.5, 1.5]$ MHz 作为频率计算区间,分别求解 \mathbf{B} 矩阵和左右特征向量 $\mathbf{U}_m^L, \mathbf{U}_m^R$ 。设置 $\tilde{\mathbf{p}}$ 矢量,令 $x_s = 0$ m, $x = 0.08/0.12$ m,求解 $\mathbf{V}(y, z, f)$ 得到激励响应计算结果,如图 16 所示。

图 16(a)为距离激励点 0.08 m 位置的激励响应结果,图 16(b)为 0.12 m 位置的响应结果。

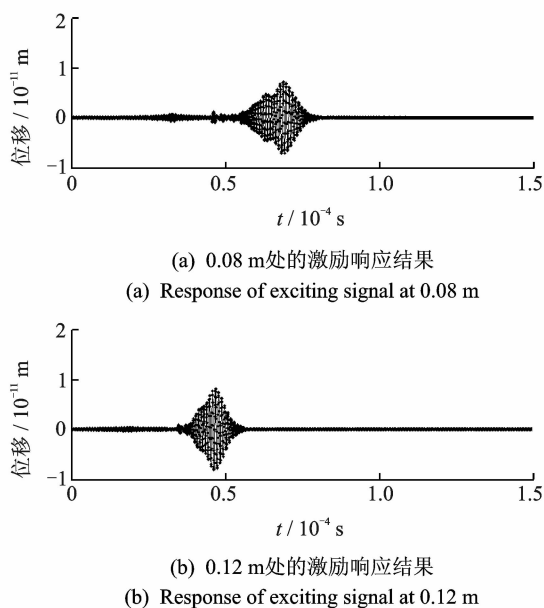


图 16 激励信号响应计算结果

Fig. 16 Response of excitation signal

将图 16 中激励响应计算获取的波形,进行小波分析,结果如图 17 所示,图 17(a),(b)分别为图 16 (a),(b)信号的小波分析结果。

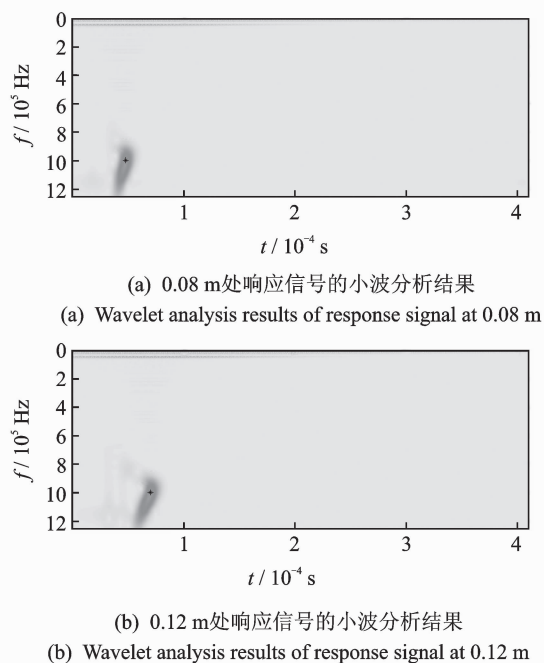


图 17 小波分析结果

Fig. 17 Wavelet analysis results

由图 17 所示,距离激励位置 0.08,0.12 mm 处的响应波形的峰值点时间分别为 47.85,70.1 μs ,信号采样点间距 0.04 m,时间差 22.25 μs ,可求得群速

度为 1 797 m/s。将此群速度值和群速度频散曲线对比,如图 18 所示。在图中频厚积为 2.5 $\text{MHz} \cdot \text{mm}$ 位置查找群速度频散曲线,与响应结果最相近的群速度值为 1 776 m/s,为对称模态的 Lamb 波。

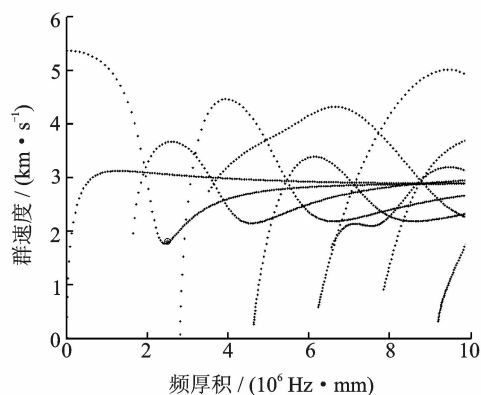


图 18 激励响应计算得到的群速度值

Fig. 18 Group velocities calculated by excitation response

实验测量群速度值为 1 785.7 m/s,激励响应计算群速度为 1 797 m/s。实验和激励响应计算结果一致性较好,采用 1 MHz 斜探头,在 2.5 mm 厚的铝板上可以激励出 S_0 对称模态的 Lamb 波信号。

5 结束语

通过半解析有限元方法求解薄板中 Lamb 波的一般均质方程,进而建立求解激励响应的系统函数模型,基于频谱叠加原理,可以计算薄板中 Lamb 波激励响应结果。经实验验证,激励响应计算与实验结果有很好的-致性,两种方法获取的数据,模态分析结论一致。激励响应计算方法是仿真分析波导介质中导波传播规律的一种数值计算方法,可以取代反复的实验环节,节省硬件成本,提高效率。该方法还可以仿真计算任意截面波导介质中导波的传播过程,具有较好的通用性。

参 考 文 献

- [1] Gunawan A, Hirose S. Boundary element analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2005,29(10):913-924.
- [2] Lin Chuni, Lu Yan, He Cunfu, et al. Measurement of circumferential Lamb waves using a line-focus poly(vinylidene fluoride) transducer and cross correlation waveform analysis[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2015,138(5):2738-2743.
- [3] Astaneh V A, Guddati M N. Improved inversion algorithms for near surface characterization[J]. Geophysi-

- cal Journal International, 2016, 206(2):1410-1423.
- [4] Marzani A. Time-transient response for ultrasonic guided waves propagating in damped cylinders[J]. International Journal of Solids and Structures, 2008, 45: 6347-6368.
- [5] Loveday P W, Wilcox P D. Guided wave Propagation as a measure of axial loads in rails[C]// Health Monitoring of Structural and Biological Systems. [S. l.]: SPIE, 2010: 7650.
- [6] 余祖俊,许西宁,史红梅,等. 钢轨中超声导波激励响应计算方法研究[J]. 仪器仪表学报, 2015, 36(9): 2068-2075.
Yu Zujun, Xu Xining, Shi Hongmei, et al. Study on the method for response computation of ultrasonic guided waves in the rail under sinusoidal excitation[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2015, 36(9): 2068-2075. (in Chinese)
- [7] Lee C M, Rose J L, Cho Y. A guided wave approach to defect detection under shelling in rail[J]. NDT&E International, 2009, 42: 174-180.
- [8] Rose J L, Avioli M J, Mudge P, et al. Guided wave inspection potential of defects in rail[J]. NDT&E International, 2004(37): 153-161.
- [9] Inoue D, Hayashi T. Transient analysis of leaky lamb waves with a semi-analytical finite element method[J]. Ultrasonics, 2015, 62: 80-88.
- [10] 王强. 方向性损伤的 Lamb 波压电线阵扫描成像与评估[J]. 振动、测试与诊断, 2017, 37(3): 507-511.
Wang Qiang. Research on lamb wave and linear PZT array scanning based on directional damage imaging and evaluation[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2017, 37(3): 507-511. (in Chinese)
- [11] 王瑜,袁慎芳,邱雷,等. 主动 Lamb 波中的空间滤波器结构健康监测[J]. 振动、测试与诊断, 2011, 31(6): 794-797.
Wang Yu, Yuan Shenfang, Qiu Lei, et al. Direction filter method in active lamb wave structural health monitoring[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2011, 31(6): 794-797. (in Chinese)
- [12] 刘国强,孙侠生,肖迎春,等. 基于 Lamb 波和 Hilbert 变换的复合材料 T 型加筋损伤监测[J]. 复合材料学报, 2014, 31(3): 818-823.
Liu Guoqiang, Sun Xiasheng, Xiao Yingchun, et al. Damage monitoring of composite T-joint using lamb wave and hilbert transform[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2014, 31(3): 818-823. (in Chinese)
- [13] 陈雪峰,杨志勃,田绍华,等. 复合材料结构损伤识别与健康监测展望[J]. 振动、测试与诊断, 2017, 38(1): 1-10.
Chen Xuefeng, Yang Zhibo, Tian Shaohua, et al. A review of the damage detection and health monitoring for composite structures [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2018, 38(1): 1-10. (in Chinese)
- [14] 杨伟博,袁慎芳,邱雷. 基于 Lamb 波的平尾大轴裂纹扩展监测[J]. 振动、测试与诊断, 2018, 38(1): 143-147.
Yang Weibo, Yuan Shenfang, Qiu Lei. Crack growth monitoring of horizontal stabilizer shaft based on Lamb wave[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2018, 38(1): 143-147. (in Chinese)
- [15] 王建强,余龙,张宇,等. 基于最大相似性的 Lamb 波损伤信号分解及试验研究[J]. 振动与冲击, 2014, 33(24): 200-204.
Wang Jianqiang, Yu Long, Zhang Yu, et al. Damage signal decomposition of Lamb wave and tests based on similarity[J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(24): 200-204. (in Chinese)
- [16] 陆希,孟光,李富才. 基于 Lamb 波的薄壁槽状结构损伤检测研究[J]. 振动与冲击, 2012, 31(12): 63-67.
Lu Xi, Meng Guang, Li Fucui. Lamb wave-based damage detection for a channel-like thin-wall structure [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(12): 63-67. (in Chinese)
- [17] 陈振华,卢超,陆铭慧,等. 基于声-超声检测的薄钢板多焊点结构完整性评价技术[J]. 机械工程学报, 2013, 49(16): 57-61.
Chen Zhenhua, Lu Chao, Lu Minghui, et al. Integrity evaluation on spot welded construction of thin steel sheet based on acousto-ultrasonic technique[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(16): 57-61. (in Chinese)
- [18] Mazzotti M, Marzani A, Bartoli I, et al. Guided waves dispersion analysis for prestressed viscoelastic waveguides by means of the SAFE method [J]. International Journal of Solids and Structures, 2012, 49: 2359-2372.
- [19] Otero J, Galarza N, Rubio B, et al. Semi-analytical finite elements methods for dispersion curves using higher order elements for long range ultrasonic testing [C]// IEEE International Ultrasonics Symposium Proceedings. [S. l.]: IEEE, 2009:1966-1999.
- [20] Bartoli I, Marzani A, Matt H, et al. Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 295: 685-707.



第一作者简介:许西宁,男,1979年12月生,博士、讲师。主要研究方向为铁路基础设施无损检测。曾发表《半解析有限元法求解钢轨中超声导波频散曲线》(《仪器仪表学报》2014年第35卷第10期)等论文。

E-mail: xuxining@bjtu.edu.cn

