

正弦信号非零奇异值的变化规律研究^{*}

赵学智, 叶邦彦, 陈统坚

(华南理工大学机械与汽车工程学院 广州, 510640)

摘要 在信号的奇异值分解中,非零奇异值是信号的重要特征参数,其变化对特征提取结果有重要影响。研究了非零奇异值的变化特性,发现随着矩阵维数的增大,正弦信号的非零奇异值并不是单调上升的,而是在上升过程中存在周期性波动。进一步研究发现,这种波动和原信号的频率密切相关,原信号的频率越大,非零奇异值的波动速度就越快。从理论上对非零奇异值的这种变化规律进行了分析,证明了非零奇异值波动的快慢是由正弦信号的频率决定的,而其波动基频是原始信号频率的两倍,并通过数值模拟实例进行了验证。

关键词 正弦信号; 奇异值分解; 非零奇异值; 变化规律; 频率

中图分类号 TH113; TN911.7

引言

奇异值分解(singular value decomposition,简称 SVD)在消噪、特征提取、图像处理、故障诊断和模式识别等领域有着重要的应用。在 SVD 的这些应用中,奇异值是一个非常关键的参量,起着重要作用。例如,在信号消噪中^[1-3],其关键是选择合适的奇异值进行 SVD 重构,奇异值选得过多则会混进噪声,选得过少又会丢失信号的重要成分,甚至造成信号的畸变。此外,SVD 还可用于将目标成分从其他成分中提取出来^[4],这实际上是需要选择出目标成分所对应的奇异值。奇异值还可用作特征向量来实现目标检测和故障诊断。例如,文献[5]通过计算奇异值序列的信息熵作为评价涡旋压缩机振动状态的特征参数,分析了动涡盘轴向振动对压缩机的影响。在高压输电线路的故障检测中^[6-7]及电机运行状态的监测中^[8-9],利用奇异值作为特征参数都取得了良好的故障分类和状态监测效果。奇异值还可被用于图像编码^[10],利用 SVD 检测织物图像的缺陷^[11]也涉及到奇异值的选取问题。

从以上应用可见,奇异值在 SVD 的各种应用中都扮演着重要角色,而其变化对 SVD 的特征提取结果有重要影响。弄清楚奇异值的变化规律,对 SVD 应用中的奇异值特征向量选取具有重要的意义。文献[5-9]注意到奇异值的变化对特征向量有影响,但

没有对其变化特性进行深入研究。文献[12]在研究噪声背景中的正弦信号估计时,也只涉及到奇异值的一些性质问题。文献[13]研究表明,一个频率成分不管其频率值是多少,总是只有两个非零奇异值,但该文献并没有涉及到对这两个奇异值变化情况的研究。实际上,每个频率对应的非零奇异值大小是随着矩阵维数的变化而变化的。笔者对这种变化规律进行了研究,发现非零奇异值除了随着矩阵维数的增大而增大外,在增大过程中还存在波动,这种波动性不仅与矩阵维数有关,更与信号频率有关。其变化特性是:随着矩阵维数的增加,这两个非零奇异值总的变化趋势是上升的,但是上升过程中存在周期性波动,这种波动的频率与原始信号的频率密切相关。文中从理论上分析了非零奇异值的波动特性,得到了奇异值周期性波动成分的表达式,证明了奇异值上升时的周期性波动成分的基频是原始信号频率的两倍。这些结果对 SVD 基础理论的发展及其工程应用具有重要意义。

1 正弦信号非零奇异值的波动现象

设有离散数字信号 $X=[x(0),x(1),\dots,x(L-1)]$,其中: L 为信号的长度。在利用 SVD 处理之前,总是要利用此信号构造一个矩阵,一般采用 Hankel 矩阵^[1-4,7-9,12-13],其形式为

^{*} 国家自然科学基金资助项目(51875216, 51375178);广东省自然科学基金资助项目(2019A1515011780, 2018A030310017)

收稿日期:2018-06-05;修回日期:2019-04-12

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(n-1) \\ x(1) & x(2) & \cdots & x(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(L-n) & x(L-n+1) & \cdots & x(L-1) \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中: $0 < n < L$ 。

令 $m = L - n + 1$, 则 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 。对此矩阵进行奇异值分解, 得到

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T \quad (2)$$

其中: \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 为单位正交矩阵, $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^{n \times n}$; \mathbf{D} 为对角矩阵, $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 可表示为 $\mathbf{D} = [\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q), \mathbf{0}]$ 或者其转置, 这取决于 $m < n$ 还是 $m > n$; $\mathbf{0}$ 为零矩阵; $q = \min(m, n)$, 且 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_q \geq 0$, 它们是矩阵 \mathbf{A} 的奇异值, 也是信号 X 的奇异值。

对任一个 Hankel 矩阵, 其奇异值个数 $q = \min(m, n)$, 其行 m 、列 n 为相互约束, 具有以下关系

$$n = L - m + 1 \quad (3)$$

如果信号长度 L 为偶数, 当矩阵行数 $m = L/2$ 时, 则列数 $n = L/2 + 1$, 此时的奇异值数量达到最大值: $q = \min(m, n) = L/2$, 再继续增大行数, 由于式(3)的约束, 奇异值数量 q 反而减少。同理, 如果 L 为奇数, 矩阵行数最大可取到 $m = (L + 1)/2$, 此时列数 $n = (L + 1)/2$, 这时的奇异值数量达到最大值: $q = \min(m, n) = (L + 1)/2$ 。

在一个信号所有的奇异值中, 非零奇异值是需要关注的。对于任一个正弦信号, 其总的奇异值数

量 q 是由该信号所构造的 Hankel 矩阵维数所决定, 随着矩阵维数的增加, 奇异值数量也将增加, 但是其中的非零奇异值数量是稳定的。文献[13]的研究结果表明, 对于正弦信号 $x(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$, 不管这个信号的振幅 a 、频率值 ω 以及相位 φ 如何取值, 只要这个信号构造的 Hankel 矩阵维数大于 2, 这个信号总是只产生两个非零奇异值[13]。

进一步发现, 随着矩阵维数的增加, 这两个非零奇异值的大小会发生周期性的波动, 可通过数值实验来观察这一现象。以 4 个不同频率的正弦信号为例, $x_1(t) = 1.25\sin(2\pi 6t + 1.09)$, $x_2(t) = 10.53 \times \sin(2\pi 18t + 2.67)$, $x_3(t) = 16.36\sin(2\pi 50t + 0.75)$, $x_4(t) = 29.71\sin(2\pi 80t + 1.63)$, 这 4 个正弦信号的频率、幅值及相位等参数各不相同, 以 1 kHz 的采样频率对其分别采集 1 024 点数据, 对每一个信号构造不同维数的 Hankel 矩阵。因信号长度 $L = 1 024$, 根据前面的分析, 矩阵行数 $m = L/2$ 时, 奇异值数量达到最大值 $L/2$, 因此这里将矩阵行数从 $m = 3$ 一直递增到 $m = 512$, 计算每一个矩阵的奇异值。其中, SVD 的计算采用文献[14]提出的多次分割双向收缩正交-右三角 (quadrature right-triangle, 简称 QR) 算法实现, 它克服了单项收缩 QR 算法在处理大型矩阵时收敛较慢、有时收敛长时停滞等缺陷[15], 对任何大型矩阵都可以实现快速的 SVD 计算。得到每个信号的各个奇异值随矩阵行数的变化如图 1 所示。

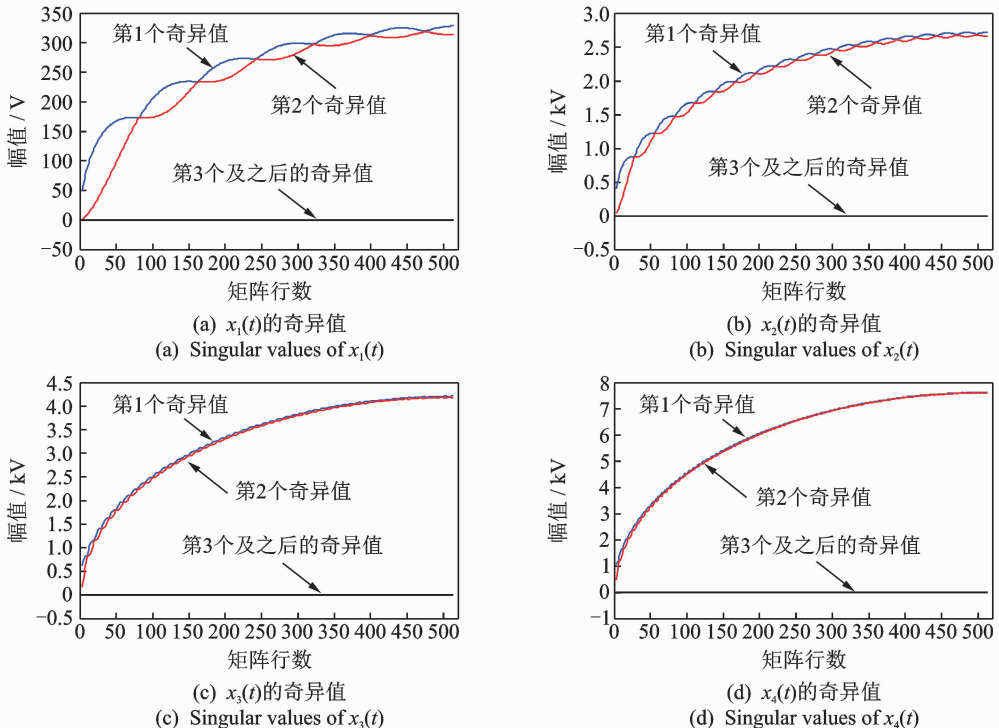


图 1 不同频率正弦信号的各个奇异值随矩阵维数的变化情况

Fig. 1 The variation of singular values of sinusoidal signals of different frequencies with respect to matrix dimension

从图1可以看到,虽然4个信号的频率和幅值都是逐步增大的,但是在不同维数的矩阵下,每个信号都只有两个非零奇异值,从第3个奇异值开始的后续奇异值在所有的矩阵下都是零。对于这两个非零奇异值的具体大小,可以看到随着矩阵行数的增加,两个非零奇异值总的趋势是增大的,但是在上升过程中存在周期性波动。图1(a),(b)的波动很明显,如果画出图1(c),(d)的局部,可以看出同样也存在着周期性波动,如图2所示。从图1(a),(b)及图2来看,原始信号的频率越高,其非零奇异值的波动也越快,并且这两个奇异值的波动是反相的。如果采用其他频率的信号,也可得到类似图1,2的结果,即只要矩阵维数大于2,不管信号的频率值和幅值如何,每个频率只有两个非零奇异值,而这两个非零奇异值在上升时存在周期性波动,原信号频率越高,奇异值的波动越快,且两个奇异值的波动是反相的。

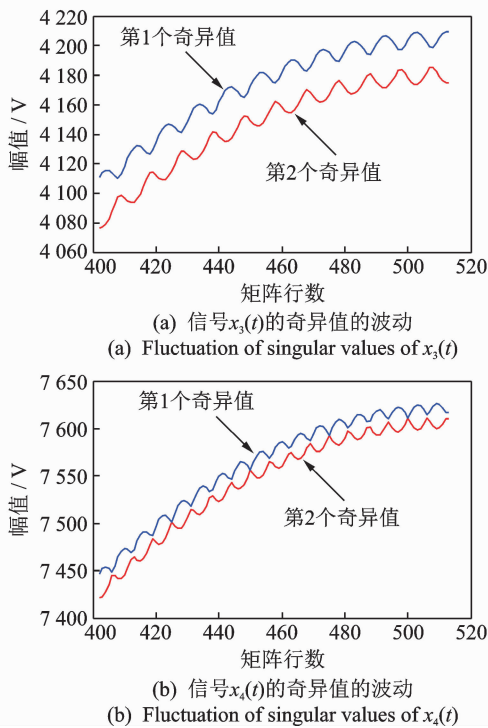


图2 信号 $x_3(t)$, $x_4(t)$ 非零奇异值上升时的波动现象
Fig. 2 Fluctuation phenomenon of non-zero singular values of the signals $x_3(t)$ and $x_4(t)$ in the rising process

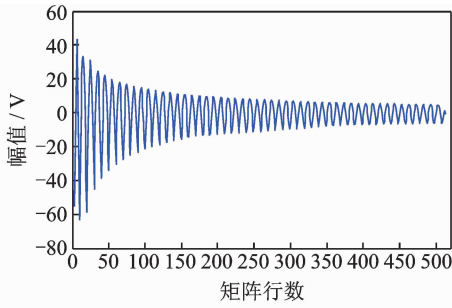
2 非零奇异值波动频率的分析与假设

图1,2的结果显示,非零奇异值的波动频率和原始信号的频率密切相关。以信号 $x_3(t) = 16.36\sin(2\pi 50t + 0.75)$ 和 $x_4(t) = 29.71\sin(2\pi 80t +$

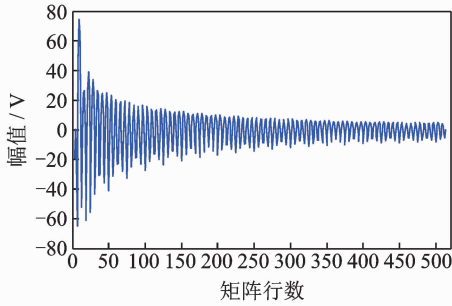
$1.63)$ 为例,利用小波变换提取这两个信号的第1个奇异值 σ_1 的波动成分,并对其做频谱分析,结果如图3所示。从图3(a)可见,对于信号 $x_3(t) = 16.36\sin(2\pi 50t + 0.75)$,奇异值 σ_1 的波动频率成分是100 Hz及其倍频,其中基频是100 Hz,正好是原信号频率50 Hz的两倍,此外还存在2倍频、3倍频及4倍频等高次倍频,但高次倍频的幅值衰减很快。从图3(b)可见,信号 $x_4(t) = 29.71\sin(2\pi 80t + 1.63)$ 的第1个奇异值 σ_1 的波动频率成分是160 Hz及其2倍和3倍频,其中基频160 Hz正好是原信号频率80 Hz的两倍,而2,3倍频衰减很快。对这两个信号的第2个奇异值 σ_2 的波动成分进行分析,也得到同样的结果。这种现象并不是偶然的,如果采用其他频率的信号进行实验,总是可以发现其奇异值波动成分的基频是原始信号频率的两倍,且存在高次倍频,但高次倍频的幅值衰减很快。

再来分析信号含噪声时的情况,对信号 $x_3(t) = 16.36\sin(2\pi 50t + 0.75)$ 叠加白噪声,信噪比为 -1.8541 dB,结果如图4(a)所示,计算这个信号在不同矩阵维数下的奇异值,结果如图4(b)所示。可见,尽管原始信号中含有较多的噪声,但是其奇异值曲线中的波动却很清晰,并没有因为原信号中存在噪声而显得杂乱。与 $x_3(t)$ 不含噪声的奇异值结果相比(即图1(c)),含噪声的 $x_3(t)$ 的第1,2个奇异值和图1(c)的结果差不多,它们并没有受到噪声的多少影响,但是第3个奇异值则不再为零,这个奇异值实际上是噪声产生的。进一步利用小波变换提取含噪声信号 $x_3(t)$ 第1个奇异值 σ_1 的波动成分,并对其进行频谱分析,得到的结果如图5所示。可见,波动成分无论是在时域还是在频域都非常干净,并没有受到噪声的影响。与不含噪声时的结果相比(图3(a)),两个波动成分的波形和频率结构是一致的,都是以原始信号频率的两倍即100 Hz为基频,而2倍频、3倍频及4倍频等高次倍频迅速衰减。对其他频率的信号添加噪声后进行分析,也得到类似结果。可见,确定性信号的奇异值波动受噪声影响不大。

实际上,奇异值的波动不受噪声影响是有其内在原因的,因为奇异值分解本身就具有消噪功能,根据文献[13]的研究结果,对含噪信号进行奇异值分解,在得到的奇异值序列中,原信号中的确定性信号的奇异值和噪声的奇异值将会被分开,确定性信号的奇异值会排列在奇异值序列的前部,而噪声产生的奇异值则会紧接着排在后面,选择前面的奇异值进行重构,可得到消除噪声的结果,这就是奇异值分解的消噪原理。正是因为奇异值分解对噪声的这种



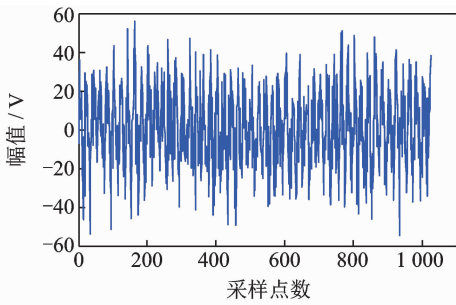
(a) 信号 $x_3(t)$ 的第1个奇异值的波动成分及其幅值谱
 (a) Fluctuation component of the first singular value of signal $x_3(t)$ and its spectrum



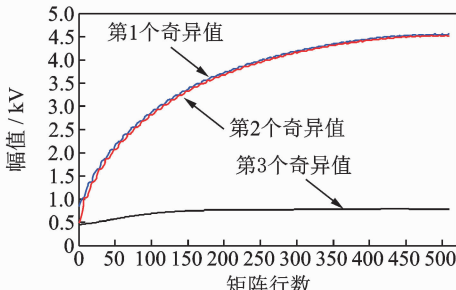
(b) 信号 $x_4(t)$ 的第1个奇异值的波动成分及其幅值谱
 (b) Fluctuation component of the first singular value of signal $x_4(t)$ and its spectrum

图 3 非零奇异值的波动成分及其幅值谱

Fig. 3 Fluctuation component of non-zero singular value and its spectrum



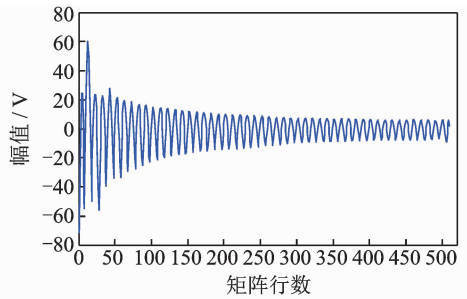
(a) 含噪正弦信号
 (a) Noisy sinusoidal signal



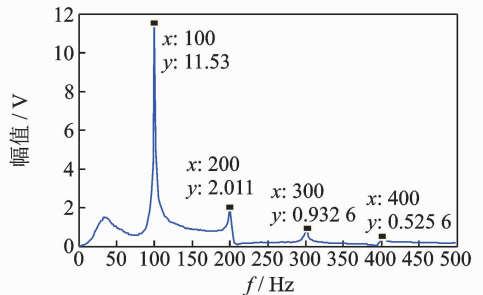
(b) 奇异值
 (b) Singular values

图 4 一个含噪正弦信号及其奇异值

Fig. 4 A noisy sinusoidal signal and its singular values



(a) 含噪正弦信号第1个奇异值的波动成分
 (a) Fluctuation component of the first singular value of the noisy sinusoidal signal



(b) 波动成分的幅值谱
 (b) Spectrum of the fluctuation component

图 5 含噪信号奇异值的波动成分及其幅值谱

Fig. 5 Fluctuation component of singular value of the noisy signal and its spectrum

分离特性,因此噪声对确定性信号的奇异值的波动没有什么影响,含噪信号的奇异值的波动依然存在,依然非常干净,其频率结构依然没有改变。

观察图 1(a),(b)及图 2 可以看出,奇异值波动

实际上是带绝对值的正弦波动,且两个奇异值的波动是反相的。根据图 3 所示奇异值波动的基频总是原信号频率的两倍,并存在整数倍频且倍频幅值迅

速衰减的现象,可对奇异值的波动成分做如下假设。

如果原始信号为 $x(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$, 则奇异值的波动成分可表示为

$$f(t) = B \left[\left| \sin(\omega t + \varphi) \right| - \frac{2}{\pi} \right] \exp(-ct) \quad (4)$$

其中: B 为幅值; φ 为相位; $2/\pi$ 为一个直流分量, 减去它是为了使 $|\sin(\omega t + \varphi)|$ 的均值为零。

式(4)中, 指数函数 $\exp(-ct)$ 用来描述波动成分的衰减, 衰减快慢程度由参数 c 决定。这种指数函数不含波动成分, 只是用来表示波动幅值的衰减程度, 而波动成分完全反映在 $|\sin(\omega t + \varphi)|$ 中。根据傅里叶变换, 可以计算得到 $|\sin(\omega t + \varphi)|$ 的傅里叶级数为

$$\begin{aligned} |\sin(\omega t + \varphi)| = \\ \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4k^2 - 1)} \cos(k2\omega t + 2k\varphi) \quad (5) \end{aligned}$$

将式(5)代入式(4), 得到奇异值波动成分的表达方式为

$$f(t) = B \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(4k^2 - 1)} \cos(k2\omega t + 2k\varphi) \right] \cdot \exp(-ct) \quad (6)$$

式(6)说明, 奇异值的波动就是由以 2ω 为基频

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a \sin(\omega T_s 0 + \varphi) & a \sin(\omega T_s 1 + \varphi) & \cdots & a \sin[\omega T_s (n-1) + \varphi] \\ a \sin(\omega T_s 1 + \varphi) & a \sin(\omega T_s 2 + \varphi) & \cdots & a \sin(\omega T_s n + \varphi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a \sin[\omega T_s (m-1) + \varphi] & a \sin(\omega T_s m + \varphi) & \cdots & a \sin[\omega T_s (L-1) + \varphi] \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中: $m = L - n + 1$ 。

对矩阵 \mathbf{A} 进行奇异值分解, 将 SVD 方程中的两个正交矩阵 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 用列向量的形式表示, 即 $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_m)$, $\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^{m \times 1}$; $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n)$, $\mathbf{v}_i \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 。因为不管矩阵维数如何, 一个频率总是只有两个非零奇异值^[13], 因此矩阵 \mathbf{A} 的奇异值分解结果可表示为

$$\mathbf{A} = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T \quad (9)$$

从式(9)直接解出两个奇异值是不可能的, 但可以设法消去方程中的奇异向量。设左奇异向量 $\mathbf{u}_i = [u_{i,1}, u_{i,2}, \cdots, u_{i,m}]^T$, 右奇异向量 $\mathbf{v}_i = [v_{i,1}, v_{i,2}, \cdots, v_{i,n}]^T$, ($i = 1, 2$), 则式(9)右边的矩阵 $\sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T$ 中所有元素的能量为

$$\begin{aligned} |\sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T|^2 = \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\sigma_1 u_{1,j} v_{1,k} + \sigma_2 u_{2,j} v_{2,k})^2 = \\ \sigma_1^2 \sum_{j=1}^m u_{1,j}^2 \sum_{k=1}^n v_{1,k}^2 + \sigma_2^2 \sum_{j=1}^m u_{2,j}^2 \sum_{k=1}^n v_{2,k}^2 + \\ 2\sigma_1 \sigma_2 \sum_{j=1}^m (u_{1,j} u_{2,j}) \sum_{k=1}^n (v_{1,k} v_{2,k}) \end{aligned}$$

的一系列谐波成分所构成, 各谐波成分的幅值按平方规律迅速衰减, 即第 k 次谐波的幅值与 k 的平方成反比。这种频率结构与图 3 所示的奇异值波动频率的实际情况相符。图 3 由于采样频率的限制, 采集到的最大频率只是 500 Hz, 因此无法显示大于 500 Hz 的高次谐波频率。

文献[12]在研究正弦信号的估计问题时认为, 对于信号 $x(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ 所构造的 m 行 n 列的 Hankel 矩阵, 其非零奇异值^[12]的大小为

$$\sigma^2 = m n a^2 \quad (7)$$

从式(7)看出, 信号 $x(t)$ 所对应的奇异值只与矩阵行列数和信号幅值有关, 而与信号的频率 ω 无关, 奇异值不存在波动; 但图 1~3 的结果证明, 奇异值是存在波动的, 因此文献[12]的结果有待商榷。

3 非零奇异值波动频率的理论分析

下面从理论上对奇异值波动成分的假设进行证明。不失一般性, 设原始信号为 $x(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$, 对此信号以采样周期 T_s 采集 L 点数据, 构造 $m \times n$ 的 Hankel 矩阵

根据奇异值分解的性质^[16]可知, \mathbf{u}_i 和 \mathbf{v}_i 都为单位正交向量, 因此有 $\sum_{j=1}^m u_{i,j}^2 = 1$, $\sum_{k=1}^n v_{i,k}^2 = 1$, ($i = 1, 2$), $\sum_{j=1}^m (u_{1,j} u_{2,j}) = 0$, $\sum_{k=1}^n (v_{1,k} v_{2,k}) = 0$ 。将这些关系代入能量表达式, 可得

$$|\sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T|^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad (10)$$

可见, 通过求能量后, 消除了式(9)右边的奇异向量的影响。为了得到奇异值与信号频率 ω 的关系, 必须再计算式(9)左边的矩阵 \mathbf{A} 的能量。先计算矩阵 \mathbf{A} 的第 i 行元素的能量 E_i , 根据式(8)可以得到第 i 行元素的能量 E_i 为

$$\begin{aligned} E_i = a^2 \sum_{j=i}^{n+i-1} \sin^2(\omega T_s j + \varphi) = \\ a^2 \sum_{j=i}^{n+i-1} \left[\frac{1 - \cos(2\omega T_s j + 2\varphi)}{2} \right] = \\ a^2 \left(\frac{n}{2} - \frac{\cos[(n+2i-1)\omega T_s + 2\varphi] \sin(n\omega T_s)}{2 \sin(\omega T_s)} \right) \\ (i = 0, 1, \cdots, m-1) \end{aligned}$$

则 \mathbf{A} 的能量等于全部 m 行元素的能量和, 即

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}|^2 &= \sum_{i=0}^{m-1} E_i = \sum_{i=0}^{m-1} a^2 \left(\frac{n}{2} - \frac{\cos[(n+2i-1)\omega T_s + 2\varphi] \sin(n\omega T_s)}{2\sin(\omega T_s)} \right) = \\ & a^2 \left(\frac{mn}{2} - \frac{\sin(n\omega T_s)}{2\sin(\omega T_s)} \sum_{i=0}^{m-1} \cos[(n+2i-1)\omega T_s + 2\varphi] \right) = \\ & a^2 \left(\frac{mn}{2} - \frac{\sin(n\omega T_s) \sin(m\omega T_s) \cos[(n+m-2)\omega T_s + 2\varphi]}{2\sin^2(\omega T_s)} \right) \end{aligned}$$

上式就是频率为 ω 、幅值为 a 的信号所构造的 $m \times n$ 的 Hankel 矩阵 \mathbf{A} 的能量表达式, 其与式(10)所表示的矩阵能量是相等的, 因此得到

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = a^2 \left(\frac{mn}{2} - \frac{\sin(n\omega T_s) \sin(m\omega T_s) \cos[(n+m-2)\omega T_s + 2\varphi]}{2\sin^2(\omega T_s)} \right) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\sin(n\omega T_s) \sin(m\omega T_s) \cos[(n+m-2)\omega T_s + 2\varphi]}{2\sin^2(\omega T_s)} a^2 = \\ & - \frac{\{\cos[(n-m)\omega T_s] - \cos[(n+m)\omega T_s]\} \cos[(n+m-2)\omega T_s + 2\varphi]}{4\sin^2(\omega T_s)} a^2 = \\ & - \frac{\{\cos[(L+1-2m)\omega T_s] - \cos[(L+1)\omega T_s]\} \cos[(L-1)\omega T_s + 2\varphi]}{4\sin^2(\omega T_s)} a^2 = \\ & \frac{\{1 - \cos[2\omega T_s m - (L+1)\omega T_s] - 1 + \cos[(L+1)\omega T_s]\} \cos[(L-1)\omega T_s + 2\varphi]}{4\sin^2(\omega T_s)} a^2 = \\ & \frac{\{1 - \cos[2\omega T_s m - (L+1)\omega T_s]\} \cos[(L-1)\omega T_s + 2\varphi]}{4\sin^2(\omega T_s)} a^2 + \\ & \frac{\{\cos[(L+1)\omega T_s] - 1\} \cos[(L-1)\omega T_s + 2\varphi]}{4\sin^2(\omega T_s)} a^2 \end{aligned}$$

上面的第3式用到了 Hankel 矩阵的行 m 、列 n 和原始信号长度 L 之间的约束关系(式(3))。

对于一个给定的正弦信号 $x(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$, 其频率 ω 、幅值 a 、相位 φ 、采样周期 T_s 以及数据长度 L 都是确定的, 因此上式中只有矩阵行数 m 为变量, 故上式中的波动项为第1项, 即

$$g(m) = \frac{\{1 - \cos[2\omega T_s m - (L+1)\omega T_s]\} \cos[(L-1)\omega T_s + 2\varphi]}{4\sin^2(\omega T_s)} a^2 \quad (12)$$

令 $C = \frac{\cos[(L-1)\omega T_s + 2\varphi]}{4\sin^2(\omega T_s)} a^2$, $2\beta = -(L+1)\omega T_s$, 则式(12)可写为

$$g(m) = [1 - \cos(2\omega T_s m + 2\beta)] C \quad (13)$$

根据前面的假设, 奇异值的波动成分可以用式(4)表示, 因每个奇异值都是趋势项和波动项的叠加, 而且两个奇异值的波动是反相的, 设它们的趋势项分别为 $q_1(t)$ 和 $q_2(t)$, 则两个奇异值可以表示为

$$\begin{cases} \sigma_1(t) = q_1(t) + B \left[|\sin(\omega t + \varphi)| - \frac{2}{\pi} \right] \exp(-ct) \\ \sigma_2(t) = q_2(t) - B \left[|\sin(\omega t + \varphi)| - \frac{2}{\pi} \right] \exp(-ct) \end{cases} \quad (14)$$

式(11)反映了两个非零奇异值和原信号的频率 ω 、幅值 a 、相位 φ 以及矩阵维数的定量关系。在式(11)中, 第1项 $a^2 mn/2$ 为趋势项, 不含任何频率成分, 只反映了奇异值随矩阵维数增加而上升的趋势, 而第2项则含有波动项。

利用三角函数的积化和差公式对式(11)中第2项进一步分析, 得到

因此两个奇异值的能量之和为

$$\begin{aligned} \sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(t) &= \\ & \left[q_1(t) - \frac{2B}{\pi} \right]^2 + \left[q_2(t) + \frac{2B}{\pi} \right]^2 + \\ & 2B^2 |\sin(\omega t + \varphi)|^2 \exp(-2ct) + \\ & 2 \left[q_1(t) - q_2(t) - \frac{4B}{\pi} \exp(-ct) \right] B |\sin(\omega t + \varphi)| \exp(-ct) \end{aligned} \quad (15)$$

从式(15)可见, 式中第1项为趋势项的能量, 而波动成分的能量包含两部分, 第1部分为

$$E_1(t) = 2B^2 |\sin(\omega t + \varphi)|^2 \exp(-2ct) = [1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)] B^2 \exp(-2ct) \quad (16)$$

第2部分为

$$\begin{aligned} E_2(t) &= 2B |\sin(\omega t + \varphi)| \left[q_1(t) - q_2(t) - \frac{4B}{\pi} \exp(-ct) \right] \exp(-ct) = \\ & \sqrt{1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)} \sqrt{2} B [q_1(t) - q_2(t) - \frac{4B}{\pi} \exp(-ct)] \exp(-ct) \end{aligned} \quad (17)$$

从式(16), (17)可知, 从波动成分的假设出发, 得到波动能量和, 其中的波动表现为 $\cos(2\omega t + 2\varphi)$

的形式,这与波动能量和的理论计算结果(式(13))中的波动表现形式是一致的。

再来分析一下波动能量幅值的问题,在理论计算结果中,波动能量之和的幅值是恒定的(式(13)),而从假设出发得到的能量和中,从式(16)可见,第1部分的能量 $E_1(t)$ 是衰减的,从式(17)可见,第2部分的能量 $E_2(t)$ 尽管也含有衰减项,但是又乘了一个上升的趋势项。从式(11)的理论分析结果可知,奇异值趋势项实际是一个上升的抛物线,两个抛物线之差 $q_1(t) - q_2(t)$ 仍然是一个上升的抛物线。从图1的奇异值曲线可以看到,与趋势项相比,奇异值的波动是非常小的,而波动项的衰减与趋势项的上升相比更是微不足道,因此二者相乘的结果就是 $E_2(t)$ 仍然是上升的。可见,在奇异值波动成分的能量构成中, $E_1(t)$ 是衰减的,而 $E_2(t)$ 是上升的。二者平衡的结果,就使得总的波动能量 $E_1(t) + E_2(t)$ 的幅值保持恒定。

可见,从假设出发得到的波动能量与通过理论分析得到的波动能量具有完全相同的波动形式,这就证明了对奇异值波动成分的假设(式(4))是正确的,从而从理论上合理地解释了奇异值波动成分的基频是原始信号频率的两倍并且存在高次倍频,但高次倍频迅速衰减这一现象。

奇异值的波动特性在实际应用中有重要意义。有一些研究经常利用信号的奇异值作为特征向量,用奇异值来描述设备的状态,将其作为神经网络或者支持向量机的输入,以实现了对设备状态的识别,但是本研究结果表明,奇异值存在波动现象,这会对状态识别结果造成影响。为了使识别结果更加准确,应该将奇异值的波动性考虑在内,对设备同一种状态信号采集多种矩阵维数下的奇异值,从而将设备同一种状态下的奇异值波动尽量包含在样本集中,以减少奇异值波动造成的影响,提高识别效果。

奇异值波动的物理意义在于反映了原始信号的频率,奇异值的波动现象对奇异值降噪时的矩阵维数确定有重要意义。在利用奇异值分解降噪时,矩阵维数对降噪结果有很大影响。目前,一般都是将矩阵行数取为原信号长度的一半,但是在发现奇异值的波动现象后可知,这种矩阵维数不是最佳维数。奇异值分解降噪的本质是利用确定性信号对应的奇异值来提取出这个确定性信号,因为每一个奇异值对应的分量信号的能量与该奇异值的能量成正比^[13],奇异值越大,则对应的分量信号能量也越大,则分量信号的提取效果也越好,因为此时分量信号的能量损失越小。对于一定长度的原始信号,目前

采用的矩阵维数的特点是该矩阵维数是这个信号长度下最大的维数,但是因为奇异值存在波动,此时奇异值不一定最大,则提取出来的分量信号的能量不会最大,因此分量信号存在能量损失,从而使消噪结果受到影响。更好的办法是应该取奇异值波动曲线中最大峰值点所对应的行数来构造矩阵,因为此时奇异值的能量最大,奇异值对应的分量信号能量也将最大,其能量损失最小,对分量信号提取效果也最佳,从而获得更好的消噪结果。

4 结 论

1) 正弦信号的非零奇异值具有波动性。随着矩阵维数的增大,两个非零奇异值总的变化趋势是上升的,但是上升过程中存在周期性波动。

2) 实验结果表明,正弦信号奇异值波动成分的基频是原始信号频率的两倍,并且存在高次倍频,但高次倍频的幅值衰减很快。噪声对正弦信号奇异值的波动频率没有影响。

3) 通过理论分析得到了两个非零奇异值和原始信号的频率、幅值、相位以及矩阵行、列数的定量关系,证明了正弦信号奇异值的波动是一个带绝对值的正弦波动,其波动基频是原始信号频率的两倍。

参 考 文 献

- [1] GOLAFSHAN R, SANLITURK K Y. SVD and Hankel matrix based de-noising approach for ball bearing fault detection and its assessment using artificial faults [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 70/71(3): 36-50.
- [2] ZHAO M, JIA X. A novel strategy for signal de-noising using reweighted SVD and its applications to weak fault feature enhancement of rotating machinery [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 94(9): 129-147.
- [3] 赵海峰, 张亚, 李世中, 等. 基于奇异值分解的侵彻过载信号降噪方法[J]. 振动、测试与诊断, 2015, 35(4): 770-776.
ZHAO Haifeng, ZHANG Ya, LI Shizhong, et al. Research of the penetration overload signals de-noising method based on singular value decomposition [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2015, 35(4): 770-776. (in Chinese)
- [4] CHEN S, YANG Y, WEI K, et al. Time-varying frequency-modulated component extraction based on parameterized demodulation and singular value decompo-

- sition [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2016, 65(2): 276-285.
- [5] 邬再新, 刘涛, 黄成东. 基于信息熵的涡旋压缩机振动信号分析[J]. 振动、测试与诊断, 2014, 34(1): 168-172.
- WU Zaixin, LIU Tao, HUANG Chengdong. Analysis of vibration signals of scroll compressor based on information entropy[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2014, 34(1): 168-172. (in Chinese)
- [6] GUILLEN D, ARRIETA P M R, ZAMORA A, et al. Detection and classification of faults in transmission lines using the maximum wavelet singular value and Euclidean norm [J]. IET Generation Transmission & Distribution, 2015, 9(15): 2294-2302.
- [7] ZHANG L L, LI M S, JI T Y, et al. Morphology singular entropy-based phase selector using short data window for transmission lines [J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2014, 29(5): 2162-2171.
- [8] HERNANDEZ V M, CABAL-YEPEZ E, GARCIA P A. Real-time SVD-based detection of multiple combined faults in induction motors [J]. Computers & Electrical Engineering, 2014, 40(7): 2193-2203.
- [9] KANG M, KIM J M. Singular value decomposition based feature extraction approaches for classifying faults of induction motors [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2013, 41 (1/2): 348-356.
- [10] KUMAR M, AGRAWAL S. Color image encoding in DOST domain using DWT and SVD [J]. Optics and Laser Technology, 2015, 75(12): 138-145.
- [11] CHANDRA J K, DATTA A K. Detection of defects in fabrics using subimage-based singular value decomposition [J]. Journal of the Textile Institute, 2013, 104(3): 295-304.
- [12] HU B, GOSINE R G. A new eigenstructure method for sinusoidal signal retrieval in white noise: estimation and pattern recognition [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(12): 3073-3083.
- [13] 赵学智, 聂振国, 叶邦彦, 等. 信号有效奇异值的数量规律及其在特征提取中的应用[J]. 振动工程学报, 2016, 29(3): 532-541.
- ZHAO Xuezh, NIE Zhenguo, YE Bangyan, et al. Number law of effective singular values of signal and its application to feature extraction [J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(3): 532-541. (in Chinese)
- [14] 赵学智, 叶邦彦, 陈统坚. 大型矩阵奇异值分解的多次分割双向收缩 QR 算法[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2010, 38(1): 1-8.
- ZHAO Xuezh, YE Bangyan, CHEN Tongjian. Multipartition and double-directions shrink QR algorithm for singular value decomposition of large-scale matrix [J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition), 2010, 38(1): 1-8. (in Chinese)
- [15] 赵学智, 叶邦彦. 单向收缩 QR 算法在奇异值分解中的收敛特性[J]. 电子科技大学学报, 2010, 39(5): 762-767.
- ZHAO Xuezh, YE Bangyan. Convergence characteristic of single direction shrink QR algorithm in the singular value decomposition [J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2010, 39(5): 762-767. (in Chinese)
- [16] 戈卢布 G H, 范洛恩 C F. 矩阵计算[M]. 袁亚湘, 译. 北京: 科学出版社, 2001: 276-289.



第一作者简介: 赵学智, 男, 1970年11月生, 教授、博士生导师。主要研究方向为振动测试与信号处理。曾发表《奇异值分解中考虑频率因素的矩阵维数》(《机械工程学报》2019年第55卷第16期)等论文。

E-mail: mezhaoxz@scut.edu.cn