

含 MFC 智能层的复合材料层合板自由振动研究^{*}

赵宽飞^{1,2}, 郝育新^{1,2}, 陈 静¹

(1. 北京信息科技大学机电学院 北京, 100192) (2. 北京信息科技大学机电系统测控北京市重点实验室 北京, 100192)

摘要 在一阶剪切变形板理论的基础上, 提出一种考虑之子函数影响的位移场。根据给定的位移场, 利用瑞利-里兹法和切比雪夫多项式, 考虑机电耦合特性, 分别求出含有智能压电宏观纤维复合材料层(macro fiber composite, 简称 MFC)的碳纤维增强复合材料层合悬臂板在开路与通路两种电学边界条件下自由振动的固有频率, 讨论不同铺层方式、宽厚比、长宽比以及不同的外电压状态下, MFC 智能层对碳纤维增强复合材料层合板固有频率的影响。研究表明, MFC 智能层对所研究系统的固有频率影响显著, 可以通过控制 MFC 智能材料的通电电压来实现对复合材料层合板振动特性的控制。

关键词 之子函数; 瑞利-里兹法; 固有频率; 宏观纤维复合材料
中图分类号 TH113; TB123

引 言

压电材料是一种特殊的智能材料, 由于其压电效应而被广泛作为传感器和驱动器, 用于复合材料层合结构的振动控制和结构的故障诊断中。目前, 压电材料主要有压电陶瓷(piezoelectric ceramics, 简称 PZT)、压电聚合物(poly vinylidene fluoride, 简称 PVDF)和压电宏观纤维 3 种形式。PZT 由于机电耦合特性高常被用做压电驱动器, 缺点是脆性大而不适用于结构的弯曲变形。PVDF 具有轻质、柔韧、可以粘贴在复杂结构表面的优点, 不足之处是其高控制电压和低控制力。MFC 是将压电陶瓷纤维嵌入树脂并与组合电极复合在一起的夹层结构复合材料, 相比 PZT 和 PVDF, MFC 具有性能高、灵敏性好和可靠性强等特点, 在对结构进行诊断检测、驱动变形和振动控制等方面应用前景广阔。

近年来, 国内外学者对含压电材料的复合材料层合结构进行了广泛研究。Reddy^[1]根据经典板理论和剪切变形理论推导出含有压电传感器和驱动器的复合材料层合板的动力学方程。文献[2-4]采用一阶剪切变形理论研究了含压电材料的复合材料层合板的自由振动。Torres 等^[5]用高阶剪切变形理论研究了上下两表面含有压电层的正交各向异性层合板在简支边界条件下的自由振动。Topdar 等^[6]用有限元法研究了多种边界条件下机电耦合层合板

的自由振动。Liang 等^[7]研究了在四边简支边界条件下, 压电层厚度、质量和刚度对嵌入压电层的层合板固有频率的影响。Davis 等^[8]和 Wu 等^[9]对压电层合板在短路和开路等电边界条件下进行了振动分析。Silva 等^[10]将 PZT 压电片粘贴到轻质结构上, 运用电气测量方法对结构进行健康监测。Huang 等^[11]回顾了压电-弹性动力耦合特性应用于结构健康监测系统的解析、数值和混合模拟方法的研究进展。黎志伟等^[12]研究了含压电层双稳态复合材料层合壳的力学特性, 通过数值模拟分析了含压电层双稳态结构的变形, 及其在两种稳态构型之间跳变过程中曲率变化对结构性能的影响。Taki 等^[13]采用高阶变形函数, 研究了含 PZT 压电层的交错铺层的复合材料层合板的动力学特性。Phung-Van 等^[14]用高阶剪切变形理论和有限元法分析了含有压电传感器和执行器的复合材料层合板的静态、自由振动和动态控制。Zhang 等^[15]用线性机电耦合有限元模型研究了具有任意压电纤维取向的 MFC 对复合材料层合薄壁结构的影响。

目前, 关于含有压电材料层的层合板壳结构的研究中所用的压电材料多为 PZT 或 PVDF, MFC 的选用较少。笔者在一阶剪切变形板理论的基础上, 通过在面内位移引入 Zigzag 函数项, 得到一种新的位移场。考虑机电耦合特性, 分别在电学边界条件为开路和通路两种状态下, 研究含新型智能材料 MFC 的复合材料层合板的不同铺层顺序、长宽比、宽厚比以及

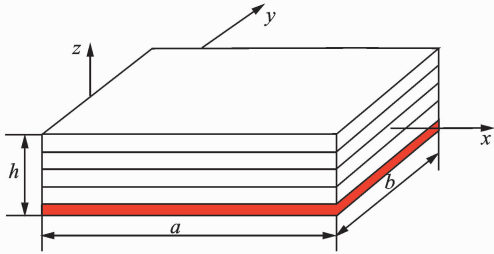
^{*} 国家自然科学基金资助项目(11472056, 11872127)
收稿日期: 2018-06-17; 修回日期: 2018-10-13

施加不同外电压对其振动特性的影响。

1 动力学模型

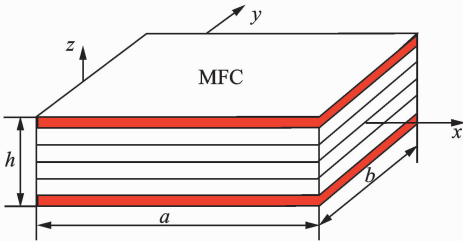
1.1 动力学模型

如图1所示,笔者以4层碳纤维增强复合材料层合板和MFC智能材料层为研究对象,研究其振动固有频率。碳纤维增强复合材料层合板的铺设方式分别为 $[90/0/0/90]$, $[0/0/90/90]$, $[0/90/0/90]$ 和 $[0/90/90/0]$ 。



(a) 下表面含有MFC层的复合材料层合板

(a) Composite laminates with MFC layer on the lower surface



(b) 上下表面均含有MFC层的复合材料层合板

(b) Composite laminates with MFC layer on both upper and lower surfaces

图1 含有MFC智能材料的复合材料层合板

Fig.1 Composite laminates with MFC smart material

1.2 运动方程

复合材料层合板在变形过程中,由于相邻层的刚度特性不一样,会导致面内位移在相邻界面处一阶导数不连续而发生锯齿形滑移,经典板理论和一阶剪切变形理论没有考虑层合板在界面处的特有变形模式。笔者在一阶剪切变形理论的基础上引入Zigzag函数项,改进了一阶剪切变形理论,从而能够更好地解决这个问题。

Zigzag函数项的表达式^[16]为 $s^{(k)}(z) = (-1)^k \zeta_k$,其中: $\zeta_k = 2(z - z_{0k})/h_k$; z_{0k} 为层合板第 k 层的中面坐标; h_k 为层合板第 k 层的厚度。图2为复合材料层合板的坐标表示。Zigzag函数项的几何意义及其与线性位移叠加的关系见文献[17]。

在一阶剪切变形理论基础上考虑Zigzag函数影响的位移场为

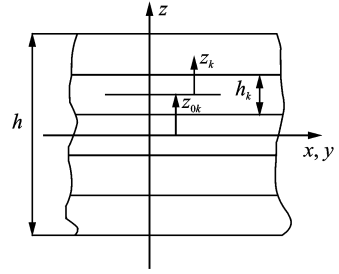


图2 复合材料层合板的坐标表示

Fig.2 Laminated plate with global and local coordinate systems

$$\begin{cases} u^{(k)}(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\phi_1(x, y, t) + s^{(k)}(z)\phi_1(x, y, t) \\ v^{(k)}(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\phi_2(x, y, t) + s^{(k)}(z)\phi_2(x, y, t) \\ w^{(k)}(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (1)$$

根据复合材料层合板的几何关系,得到应变-位移的分量表达式为

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(0)} \\ \epsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(1)} \\ \epsilon_y^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + s \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(2)} \\ \epsilon_y^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (2a)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + \frac{\partial s}{\partial z} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2b)$$

$$\text{其中: } \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(0)} \\ \epsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(1)} \\ \epsilon_y^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(2)} \\ \epsilon_y^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_2 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_1 \end{Bmatrix}.$$

正交各向异性复合材料层合板第 k 层的本构方程为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_6 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3)$$

其中:材料参数 $Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$; $Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$;

$Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$; $Q_{66} = G_{12}$; $Q_{55} = G_{13}$; $Q_{44} = G_{23}$; E_1 ,

E_2 分别为沿复合材料主方向 x 和 y 方向的弹性模量; G_{12}, G_{13}, G_{23} 分别为 $x-y, y-z$, 和 $z-x$ 平面内的剪切模量; ν_{ij} 为泊松比。

正交各向异性复合材料层合板转换坐标后第 k 层的本构方程见文献[18]。

压电材料在弹性限度范围内,应力由应变和电场两部分产生。根据弹性本构关系式,可以得到压电材料考虑机电耦合影响的本构方程^[19]为

$$\begin{cases} \{\sigma^e\} = \mathbf{Q}\{\epsilon^e\} - \mathbf{e}^T\{E\} \\ \{D^e\} = \mathbf{e}\{\epsilon^e\} + \epsilon\{E\} \end{cases} \quad (4)$$

其中: $\{\sigma^e\}$ 和 $\{\epsilon^e\}$ 分别为压电材料的应力和应变张量; \mathbf{Q} 为压电材料的弹性常数矩阵; \mathbf{e} 为压电材料的压电常数矩阵; ϵ 为自由介电常数矩阵; $\{E\}$ 和 $\{D^e\}$ 分别为电场和电位移。

本研究采用的 MFC 智能压电材料为 d_{31} 类型,其极化方向沿厚度方向并垂直于压电纤维方向。选取 MFC 智能压电层开路和通路两种通电状态,当处于开路状态时, $\{D\} = 0$ 和 $\{E\} = 0$, 故不考虑 MFC 智能压电层的电学影响,只考虑智能层的弹性性能。MFC 纤维铺层角度为 0° , 本构方程坐标变换见文献[18]。通电后,压电层 MFC 的电位移表达式^[20]为

$$D_3 = \bar{e}_{31}\epsilon_{xx}^e + \bar{e}_{32}\epsilon_{yy}^e + \bar{e}_{36}\gamma_{xy}^e - \epsilon E_3 \quad (5)$$

其中: $\bar{e}_{31}, \bar{e}_{32}$ 和 \bar{e}_{36} 为压电材料变换坐标后的压电常数, $\bar{e}_{31} = e_{31}\cos^2\theta + e_{32}\sin^2\theta$, $\bar{e}_{32} = e_{31}\sin^2\theta + e_{32}\cos^2\theta$, $\bar{e}_{36} = (e_{31} - e_{32})\sin\theta\cos\theta$; E_3 为压电材料在 z 方向的电场强度, $E_3 = V_0/h_{\text{MFC}}$; V_0 为外加电压; h_{MFC} 为压电材料 MFC 的厚度。

复合材料层合板的应变能和动能分别为

$$U_P = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \iint_A \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}) dz dx dy \quad (6a)$$

$$T_P = \frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^N \iint_A \int_{z_k}^{z_{k+1}} [(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2] dz dx dy \quad (6b)$$

MFC 智能材料层的应变能、动能和电势能表达式分别为

$$U_{\text{MFC}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \iint_A \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_{xx}^e\epsilon_{xx}^e + \sigma_{yy}^e\epsilon_{yy}^e + \sigma_{xy}^e\gamma_{xy}^e + \tau_{yz}^e\gamma_{yz}^e + \tau_{xz}^e\gamma_{xz}^e) dz dx dy \quad (7a)$$

$$T_{\text{MFC}} = \frac{\rho_{\text{MFC}}}{2} \sum_{k=1}^N \iint_A \int_{z_k}^{z_{k+1}} [(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2] dz dx dy \quad (7b)$$

$$U_e = \iint_A \int_{z_k}^{z_{k+1}} D_3 E_3 dz dx dy \quad (7c)$$

通电后含 MFC 智能材料层的复合材料层合板的总势能和总动能分别为

$$U = U_P + U_{\text{MFC}} - U_e \quad (8a)$$

$$T = T_P + T_{\text{MFC}} \quad (8b)$$

其中: U_e 为单层 MFC 智能材料层由于通电所产生的电势能,多层 MFC 计算同理。

1.3 自由振动分析

采用 Chebyshev 多项式和 Rayleigh-Ritz 求解含有压电层的复合材料层合板的自由振动。根据文献[21],系统的位移和转角可假设为

$$\begin{cases} u(x, y, t) = U(x, y) e^{(i\omega t)} \\ v(x, y, t) = V(x, y) e^{(i\omega t)} \\ w(x, y, t) = W(x, y) e^{(i\omega t)} \\ \phi_1(x, y, t) = \Psi_1(x, y) e^{(i\omega t)} \\ \phi_2(x, y, t) = \Psi_2(x, y) e^{(i\omega t)} \\ \phi_1(x, y, t) = \Phi_1(x, y) e^{(i\omega t)} \\ \phi_2(x, y, t) = \Phi_2(x, y) e^{(i\omega t)} \end{cases} \quad (9)$$

其中: $U(x, y), V(x, y), W(x, y), \Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y), \Psi_1(x, y)$ 和 $\Psi_2(x, y)$ 为各位移分量的振型函数。

振型函数使用 Chebyshev 多项式,展开形式为

$$\begin{cases} U(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn} T_{um}(\xi) T_{un}(\eta) \\ V(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{mn} T_{vm}(\xi) T_{vn}(\eta) \\ W(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} T_{wm}(\xi) T_{wn}(\eta) \\ \phi_1(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \phi_{1mn} T_{\phi_1 m}(\xi) T_{\phi_1 n}(\eta) \\ \phi_2(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \phi_{2mn} T_{\phi_2 m}(\xi) T_{\phi_2 n}(\eta) \\ \Phi_1(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Phi_{1mn} T_{\Phi_1 m}(\xi) T_{\Phi_1 n}(\eta) \\ \Phi_2(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Phi_{2mn} T_{\Phi_2 m}(\xi) T_{\Phi_2 n}(\eta) \end{cases} \quad (10)$$

其中: $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \Phi_{1mn}, \Phi_{2mn}, \phi_{1mn}$ 和 ϕ_{2mn} 为待定系数。

$$\begin{cases} T_{\delta m}(\xi) = f_{\delta}(\xi) p_m(\xi) \\ T_{\delta n}(\eta) = g_{\delta}(\eta) p_n(\eta) \\ (\delta = u, v, w, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2) \end{cases} \quad (11)$$

其中: $T_{\delta m}(\xi)$ 和 $T_{\delta n}(\eta)$ 分别为在 x 和 y 方向上 m 阶和 n 阶的展开位移量; $f_{\delta}(\xi)$ 和 $g_{\delta}(\eta)$ 为根据沿着 x 和 y 方向的边界条件选取的边界函数; $p_m(\xi)$ 和 $p_n(\eta)$ 分别为在 x 和 y 方向上 m 阶和 n 阶的 Chebyshev 多项式。

根据文献[22], m 阶和 n 阶的 Chebyshev 多项式的展开式有以下的递推关系

$$\begin{cases} p_1(\xi) = 1 \\ p_2(\xi) = \xi \\ p_m(\xi) = 2\xi p_{m-1}(\xi) - p_{m-2}(\xi) \quad (m \geq 3) \end{cases} \quad (12a)$$

$$\begin{cases} p_1(\eta) = 1 \\ p_1(\eta) = \eta \\ p_n(\eta) = 2\eta p_{n-1}(\eta) - p_{n-2}(\eta) \quad (n \geq 3) \end{cases} \quad (12b)$$

由于 Chebyshev 多项式在区间 $[-1, 1]$ 上为正交函数序列, 为保证该多项式在层合板的整个区域内都具有正交性, 需要进行坐标变换, 变换后的坐标表达式为 $\xi = 2x/L - 1$ 和 $\eta = 2y/b$ 。将式(7~11)代入含 MFC 智能材料层复合材料层合板势能方程和式(8)中, 得到最大势能 U_{\max} 和最大动能 T_{\max} 的表达式。

根据 Rayleigh-Ritz 法, 得到

$$\begin{cases} \frac{\partial(U_{\max} - T_{\max})}{\partial U_{mn}} = 0 \\ \frac{\partial(U_{\max} - T_{\max})}{\partial V_{mn}} = 0 \\ \frac{\partial(U_{\max} - T_{\max})}{\partial W_{mn}} = 0 \\ \frac{\partial(U_{\max} - T_{\max})}{\partial \Phi_{1mn}} = 0 \\ \frac{\partial(U_{\max} - T_{\max})}{\partial \Phi_{2mn}} = 0 \\ \frac{\partial(U_{\max} - T_{\max})}{\partial \psi_{1mn}} = 0 \\ \frac{\partial(U_{\max} - T_{\max})}{\partial \psi_{2mn}} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

其中: $m = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N$ 。

将式(13)整理得到矩阵形式为

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{P} = 0 \quad (14)$$

其中: \mathbf{K} 为刚度矩阵; \mathbf{M} 为质量矩阵; ω 为含 MFC 智能压电层复合材料层合板的固有频率; \mathbf{P} 为系数向量。

系数向量的表达式为

$$\mathbf{P} = \{U_{11}, \dots, U_{MN}, \dots, V_{11}, \dots, V_{MN}, W_{11}, \dots, W_{MN}, \Phi_{111}, \dots, \Phi_{1MN}, \Phi_{211}, \dots, \Phi_{2MN}, \psi_{111}, \dots, \psi_{1MN}, \psi_{211}, \dots, \psi_{2MN}\}^T \quad (15)$$

其中: M 和 N 为 Chebyshev 多项式所取的阶数。

通过求解式(14), 得到含 MFC 智能材料层的复合材料层合板的固有频率。

2 数值结果和分析

2.1 对比结果

为验证笔者所提出的理论和数值计算结果的准

确性, 将计算结果与已有文献的结果进行对比。选取四边固支、长宽比 $a/b = 1$ 、宽厚比 $b/h = 10$ 、纤维铺层顺序为 $[90/0/90/0/90]$ 的复合材料层合板作为研究对象。层合板的每一层厚度相同, 无量纲化后的材料特性为 $E_1/E_2 = 40, E_3 = E_2, G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25, \rho = 1$ 。

表 1 为四边固支矩形板的无量纲固有频率与其他理论结果对比。无量纲频率定义为 $\Omega = (\omega b^2 / \pi^2 h) \sqrt{\rho/E_2}$ 。从表 1 可以看出, 本研究得到的结果和文献数值结果吻合较好, 而采用一阶剪切变形理论获得的结果与文献结果相差较大。

表 1 四边固支矩形板的无量纲固有频率与其他理论结果对比

Tab. 1 Comparison of the dimensionless natural frequencies of clamped rectangular plates with other theories

理论方法	前 6 阶固有频率					
	1	2	3	4	5	6
文献[23]	2.341 3	3.479 5	4.174 6	4.924 8	5.093 9	6.189 8
本研究结果	2.341 9	3.671 9	4.029 5	4.942 1	5.511 9	6.104 8
一阶剪切	2.382 0	3.742 9	4.114 3	5.041 5	5.666 5	6.367 4

2.2 结果分析

本研究的碳纤维增强复合材料层合板和 MFC 压电智能材料几何尺寸为 $a = 0.3 \text{ m}, b = 0.2 \text{ m}$, 4 层层合板的总厚度 $h_p = 1 \text{ mm}$, MFC 压电层的厚度 $h_{\text{MFC}} = 0.25 \text{ mm}$, 表 2 为碳纤维增强复合材料层合板和 MFC 压电材料特性。表 3 为复合材料层合板不同铺层方式下前 6 阶固有频率的结果。可以看出, 复合材料层合板的铺层方式不同, 会导致系统的固有频率有差别, 其中: $[90/0/0/90]$ 铺层方式各阶频率结果最小; $[0/90/90/0]$ 铺层方式各阶频率结果最大。这是由于不同铺层方式下层合板的刚度特性不同引起的。如表 4 所示, 4 种不同铺层方式复合材料层合板的刚度系数表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz \\ \mathbf{B}_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z dz \\ \mathbf{D}_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} s^{(k)}(z) dz \\ \mathbf{E}_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z^2 dz \\ \mathbf{T}_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (s^{(k)}(z)) z dz \\ \mathbf{R}_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (s^{(k)}(z))^2 z dz \end{cases} \quad (16)$$

其中:4 种铺层方式层合板中的 **A** 和 **D** 刚度矩阵的系数都相等;**B**、**E**、**T** 和 **R** 刚度矩阵的值会随着铺层方式的不同而变化,这就导致不同铺层方式层合板的刚度特性不同,从而使不同铺层方式下所对应的固有频率不同。

表 5 为图 1 所示的粘贴一层 MFC 智能材料的复合材料层合板在未通电情况下的前 6 阶固有频率。将表 5 与表 3 对比发现,MFC 智能材料层对不同铺层方式的层合板固有频率都有明显影响,其中

两种对称铺设的层合板[90/0/0/90],[0/90/90/0]以及[0/90/0/90]在粘贴一层 MFC 之后频率均减小,且随着频率阶数的增加,频率减小越多,但是在[0/0/90/90]情况下,粘贴一层 MFC 之后,除第 2 阶频率略有减小之外,其余频率值均增大。

表 6 为通电后粘贴一层 MFC 智能材料的复合材料层合板的前 6 阶固有频率。由于笔者所选 MFC 类型的正常工作电压范围在(-60 V~360 V)^[15]之间,故通路电压分别为 100,200 和 300 V。

表 2 碳纤维增强复合材料层合板和 MFC 压电材料特性

Tab. 2 Properties of composite laminates and MFC piezoelectric material

材料	$E_1/$ GPa	$E_2/E_3/$ GPa	$G_{12}/G_{13}/$ GPa	$G_{23}/$ GPa	ν_{12}/ν_{13}	ν_{23}	$d_{31}/$ (pm · V ⁻¹)	$d_{32}/$ (pm · V ⁻¹)	ϵ (10 ⁻⁸ F · V ⁻¹)	$\rho/$ (kg · m ⁻³)
T800/M21 ^[24]	172	8.9	4.2	0.02	0.35	0.01	—	—	—	1 072
MFC ^[15]	30.336	15.857	5.515	5.515	0.31	0.438	-170	-100	1.416	5 440

表 3 复合材料层合板不同铺层方式的前 6 阶固有频率

Tab. 3 The first six natural frequencies of composite laminated plate under different stacking modes

铺层方式	前 6 阶固有频率					
	1	2	3	4	5	6
90/0/0/90	9.403 8	49.188 5	59.246 5	156.605 2	169.183	302.952 6
0/0/90/90	10.320 4	49.712 1	65.015 6	159.768 6	185.776 6	312.708 4
0/90/0/90	15.160 6	52.117 9	93.548 5	174.549 9	261.259 1	358.358 2
0/90/90/0	21.395 2	56.880 1	134.644 3	204.836 8	384.113 4	459.971 1

表 4 4 种不同铺层方式复合材料层合板的刚度系数

Tab. 4 Stiffness coefficients of composite laminated plate with 4 different stacking modes

铺层方式	刚度系数		
90/0/0/90	$B_{11}=0$	$E_{11}=2.456 1$	$R_{11}=7.585 3 \times 10^8$
	$B_{22}=0$	$E_{12}=0.261 2$	$T_{11}=-2.5 \times 10^{-7}$
	$B_{44}=0$	$E_{22}=12.714 5$	$T_{22}=0$
	$B_{55}=0$	$E_{66}=0.350$	$R_{66}=3.500 0 \times 10^7$
0/0/90/90	$B_{11}=20 516.755 6$	$E_{11}=7.585 3$	$R_{11}=1.415 1 \times 10^9$
	$B_{22}=-20 516.755 6$	$E_{12}=0.261 2$	$T_{11}=0$
	$B_{44}=0$	$E_{22}=7.585 3$	$T_{22}=0$
	$B_{55}=0$	$E_{66}=0.350 0$	$R_{66}=3.500 0 \times 10^7$
0/90/0/90	$B_{11}=10 258.377 8$	$E_{11}=7.585 3$	$R_{11}=7.585 3 \times 10^8$
	$B_{22}=-10 258.377 8$	$E_{12}=0.261 2$	$T_{11}=3 419.459 2$
	$B_{44}=-1.672 \times 10^{10}$	$E_{22}=7.585 3$	$T_{22}=-3 419.459 3$
	$B_{55}=1.672 \times 10^{10}$	$E_{66}=0.350 0$	$R_{66}=3.500 0 \times 10^7$
0/90/90/0	$B_{11}=0$	$E_{11}=12.714 5$	$R_{11}=7.585 3 \times 10^8$
	$B_{22}=0$	$E_{12}=0.261 2$	$T_{11}=0$
	$B_{44}=0$	$E_{22}=2.456 1$	$T_{22}=-2.5 \times 10^{-7}$
	$B_{55}=0$	$E_{66}=0.350 0$	$R_{66}=3.500 0 \times 10^7$

表5 含有单层 MFC 的层合板在未通电情况下的前 6 阶固有频率

Tab. 5 The first six natural frequencies of laminate with single-layer MFC under non-electricity condition Hz

铺层方式	前 6 阶固有频率					
	1	2	3	4	5	6
90/0/0/90/MFC	9.211 0	48.185 1	58.017 9	153.413 9	165.852 4	297.062 4
0/0/90/90/MFC	11.446 3	49.518 2	72.066 4	161.485 6	205.895 0	321.917 6
0/90/0/90/MFC	12.833 5	49.943 8	79.282 5	164.169 6	209.587 2	324.303 2
0/90/90/0/MFC	15.717 2	52.246 6	98.903 2	178.277 8	282.320 4	376.033 5

表6 含有单层 MFC 的层合板在通电情况下的前 6 阶固有频率

Tab. 6 The first six natural frequencies of laminate with single-layer MFC under electric condition Hz

铺层方式	U/V	前 6 阶固有频率					
		1	2	3	4	5	6
90/0/0/90/MFC	100	11.549 3	59.802 2	60.998 2	158.185 6	168.687 8	300.579 7
	200	13.369 4	63.806 9	69.504 7	162.862 3	171.410 6	304.121 7
	300	14.888 2	66.466	78.007 1	167.360 6	173.873 3	307.365 7
0/0/90/90/MFC	100	13.422 7	60.746 6	74.046 6	165.548	207.530 3	317.289 4
	200	15.069 1	70.299 9	76.394 9	170.009 3	210.083 4	319.682 6
	300	16.495 6	78.622 3	78.702 6	174.313 4	211.794 7	323.198 7
0/90/0/90/MFC	100	15.355 7	64.346 5	80.453 5	171.294 2	214.366 7	326.454 2
	200	17.441 7	77.602 1	83.415 8	178.107 9	215.447 8	331.169 8
	300	19.219 6	86.361 9	88.897 8	184.645 4	218.543 9	336.182 6
0/90/90/0/MFC	100	17.228 1	63.131 4	100.682 6	182.484 7	283.868 2	378.918 3
	200	18.581 2	72.392 8	102.420 6	186.583 3	285.441 1	381.626 3
	300	19.812 2	80.593 1	104.131 4	190.599 3	287.181 8	384.418 7

从表 6 可以看出,随着工作电压的不断增大,不同纤维铺层方式下系统的前 6 阶固有频率会逐渐增大。结合表 5 中的数据可以发现,通电后的任意电压下的系统相比于未通电情况下系统的前 6 阶固有频率的结果都大,而且电压越大,频率越大。根据式 (8)以及对比表 5 和表 6 可以发现,通电后导致系统的总势能增加,会导致系统的刚度增加,从而引起通路状态下系统的固有频率比开路状态下的结果大。因此,在选用 MFC 智能材料进行复合材料层合板的振动研究时,可以通过控制通电电压的大小来改变系统本身的振动特性。

表 7 为图 1 所示的粘贴两层 MFC 智能材料的复合材料层合板在未通电情况下的前 6 阶固有频率。将其计算结果与表 3 中的频率对比可以发现,在正交铺设复合材料层合板表面粘贴两层 MFC 智能材料层时,对不同铺层方式的层合板固有频率都有非常明显影响,其中两种对称铺设的层合板[90/0/0/90],[0/90/90/0]在粘贴两层 MFC 之后,频率变化分别为减小和增加,另外两种铺设状态下,粘贴两层 MFC 之后频率变化情况比较复杂,不同阶的频率并非预期中的单调增加或减小。从纵向看,不论是粘贴一层或是两层 MFC,从上到下频率均是成增加的趋势。总的来看,无论是加单层 MFC 压电层还是加双层 MFC 压电

层,都没有改变层合板不同铺层方式下固有频率的大小变化趋势,仍然是[90/0/0/90]铺层方式对应的各阶频率最小,[0/90/90/0]铺层方式对应的各阶频率结果最大,这说明层合板本身铺层方式对固有频率变化趋势的影响占主要因素。

MFC 智能材料作驱动器时,为加大其产生的驱动力,需要增加压电片的个数,表 8 为在通电情况下双层 MFC 的前 6 阶固有频率。从表中可以看出,随着通电电压的增大,不同铺层方式下的含有双层 MFC 的复合材料层合板前 6 阶固有频率在逐渐增大。综合表 7 和表 8 中的数据可以发现,通路状态下的固有频率均比开路状态下的频率大。这是由于通电后系统总势能的增加会导致系统的刚度增加,从而引起系统固有频率的增加。

图 3 和图 4 分别为开路情况下悬臂边界条件下含一层 MFC 的[0/90/0/90/MFC]层合板和含两层 MFC 的[MFC/0/90/0/90/MFC]层合板的前 6 阶固有频率。从图中可以看出,随着长宽比和宽厚比的增加,混合层合板的每阶固有频率均逐渐减小。这是因为随着长宽比和宽厚比的增加,混合层合板的质量增大、刚度减小,从而导致其自由振动的固有频率的减小。

图 5 和图 6 分别为不同边界条件,不同宽厚比

表 7 含有双层 MFC 的层合板在未通电情况下的前 6 阶固有频率

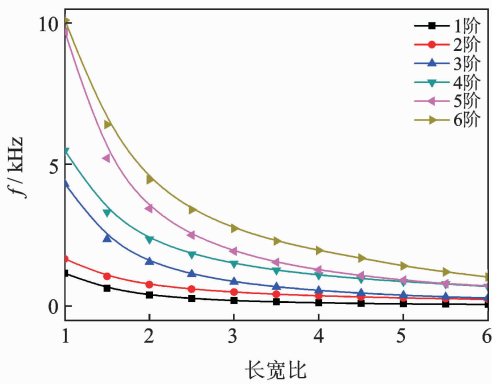
Tab. 7 The first six natural frequencies of laminate with double-layer MFC under non-electricity condition Hz

铺层方式	前 6 阶固有频率					
	1	2	3	4	5	6
MFC/90/0/0/90/MFC	9.422 6	52.632 2	59.334 6	166.369 8	169.504 9	319.232 4
MFC/0/0/90/90/MFC	10.025 5	52.974 6	63.115 7	168.401 9	180.451 1	325.365 5
MFC/0/90/0/90/MFC	11.433 2	53.776 9	71.976 9	173.386 6	205.672 6	340.895 1
MFC/0/90/90/0/MFC	13.867 7	55.298 3	87.260 7	182.584 4	249.228 1	369.652 3

表 8 含有双层 MFC 的层合板在通电情况下的前 6 阶固有频率

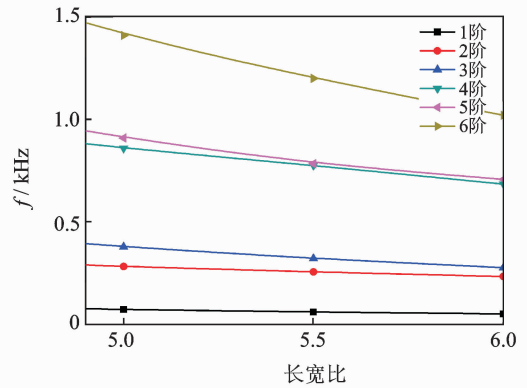
Tab. 8 The first six natural frequencies of laminate with double-layer MFC under electric condition Hz

铺层方式	U/V	前 6 阶固有频率					
		1	2	3	4	5	6
MFC/90/0/0/90/MFC	100	12.271 6	63.034 4	66.170 7	171.999 3	172.742 5	323.224 7
	200	14.410 3	66.501 5	77.373 6	176.309 6	177.470 1	327.393 2
	300	16.164 8	69.744 7	87.145 3	179.439 8	182.768 5	331.335 3
MFC/0/0/90/90/MFC	100	12.754 7	66.438 5	66.616 3	173.957 3	183.582 7	329.245 6
	200	14.849 2	69.909 1	77.595 7	179.373 3	186.816 4	333.339 9
	300	16.584 9	73.022 9	87.332 6	184.618 7	190.024 5	337.385 9
MFC/0/90/0/90/MFC	100	14.828 2	71.275 2	81.674 1	194.935 5	227.632 2	376.972 8
	200	16.727 0	81.784 1	84.394 0	199.790 9	230.444 5	380.555 2
	300	18.362 1	87.006 6	91.085 4	204.535 3	232.789 6	384.131 8
MFC/0/90/90/0/MFC	100	15.989 7	68.314 3	89.825 2	187.784 8	251.449 6	373.237 5
	200	17.787 7	79.212 3	92.315 7	192.839 1	253.719 2	376.788 5
	300	19.362 4	88.776 4	94.723 2	197.771 7	256.172 9	380.323 4



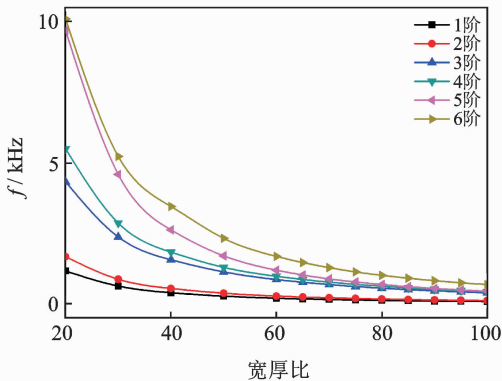
(a) 长宽比为1~6的固有频率

(a) Natural frequency at length/width of 1 to 6



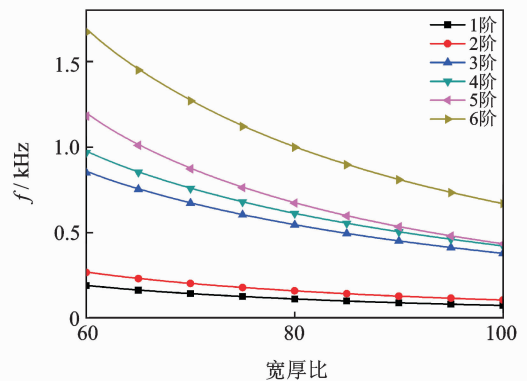
(b) 长宽比为5.0~6.0的固有频率

(b) Natural frequency at length/width of 5.0 to 6.0



(c) 宽厚比为20~100的固有频率

(c) Natural frequency at width/thickness of 20 to 100

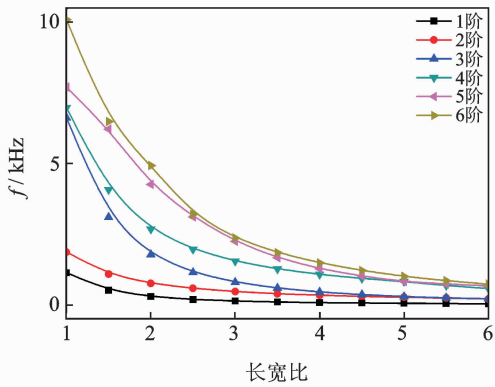


(d) 宽厚比为60~100的固有频率

(d) Natural frequency at width/thickness of 60 to 100

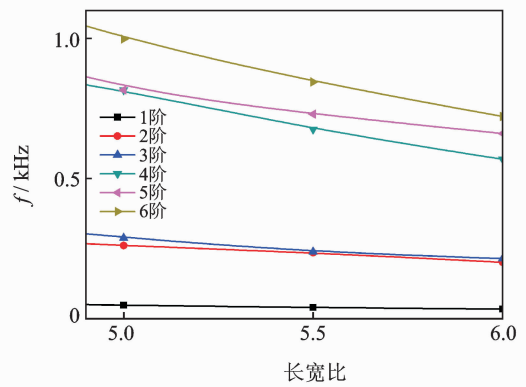
图 3 不同长宽比和宽厚比下含单层 MFC 的层合板的前 6 阶固有频率

Fig. 3 The first six natural frequencies of laminate with single-layer MFC under different ratio of length to width and width to thickness



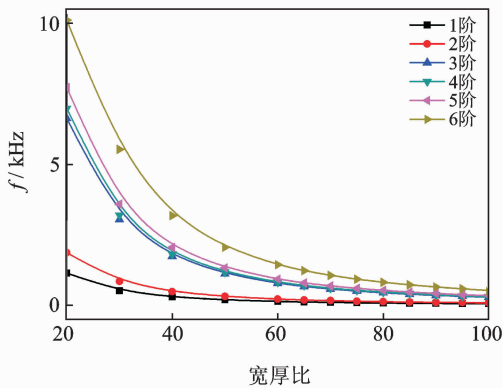
(a) 长宽比为1~6的固有频率

(a) Natural frequency at length/width of 1 to 6



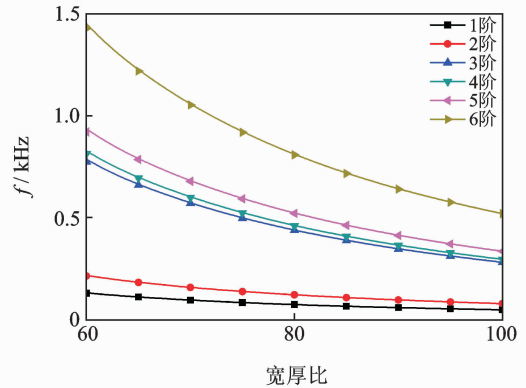
(b) 长宽比为5.0~6.0的固有频率

(b) Natural frequency at length/width of 5.0 to 6.0



(c) 宽厚比为20~100的固有频率

(c) Natural frequency at width/thickness of 20 to 100

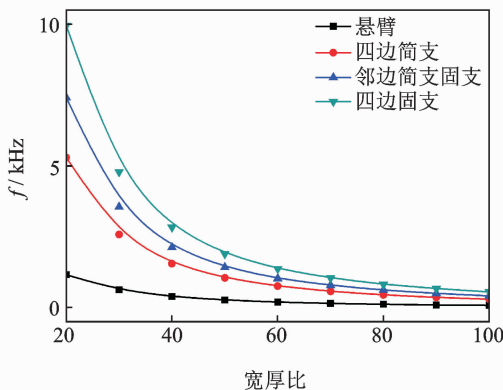


(d) 宽厚比为60~100的固有频率

(d) Natural frequency at width/thickness of 60 to 100

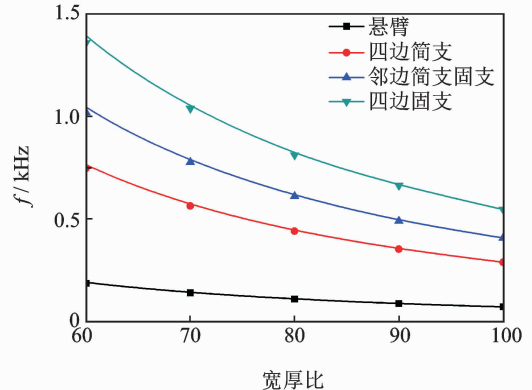
图 4 不同长宽比和宽厚比下含两层 MFC 的层合板的前 6 阶固有频率

Fig. 4 The first six natural frequencies of laminate with double-layer MFC under different ratio of length to width and width to thickness



(a) 不同边界条件下宽厚比为20~100的基频

(a) Fundamental frequency at width /thickness of 20 to 100 under different boundary conditions



(b) 不同边界条件下宽厚比为60~100的基频

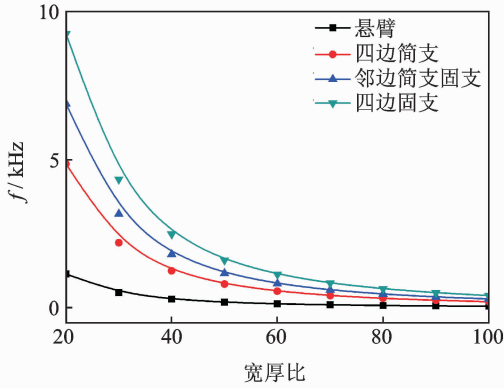
(b) Fundamental frequency at width /thickness of 60 to 100 under different boundary conditions

图 5 不同边界条件和宽厚比下含单层 MFC 的层合板的基频

Fig. 5 Fundamental frequency of laminate with single-layer MFC under different boundary conditions and ratio of width to thickness

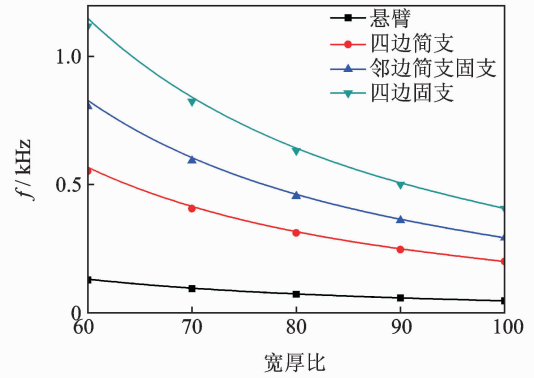
开路情况下含有单层MFC的 $[0/90/0/90/MFC]$ 层合板和含有两层MFC的 $[MFC/0/90/0/90/MFC]$ 层合板的基频结果。其中:4种边界条件分别为悬臂、四边简支、邻边简支固支和四边固支。可以看

出,同一种边界条件下,随着宽厚比的增大,系统的基频逐渐减小;宽厚比相同、边界条件不同情况下,系统基频的值也不相同,四边固支边界条件下的结果最大。



(a) 不同边界条件下宽厚比为20~100的基频

(a) Fundamental frequency at width/thickness of 20 to 100 under different boundary conditions



(b) 不同边界条件下宽厚比为60~100的基频

(b) Fundamental frequency at width/thickness of 60 to 100 under different boundary conditions

图6 不同边界条件和宽厚比下含两层MFC的层合板的基频

Fig. 6 Fundamental frequency of laminate with double-layer MFC under different boundary conditions and ratio of width to thickness

3 结束语

笔者在一阶剪切变形理论的基础上,提出考虑 Zigzag 函数影响的位移场,适合于对含压电智能层MFC的纤维增强复合材料层合板的研究。对于带压电智能材料层MFC的复合材料层合板,其铺层方式对系统自由振动的固有频率的影响占主要因素。MFC智能材料在不同边界条件下对复合材料层合板自由振动都有影响。系统的固有频率会随着长宽比和宽厚比的增加而减小。MFC智能材料通电后会对系统的固有频率产生一定的影响,可以通过控制MFC智能材料的通电电压来实现对复合材料层合板振动特性的控制。

参 考 文 献

- [1] REDDY J N. On laminated composite plates with integrated sensors and actuators[J]. *Engineering Structures*, 1999, 21: 568-593.
- [2] PIETRZAKOWSKI M. Piezoelectric control of composite plate vibration: effect of electric potential distribution[J]. *Computers and Structures*, 2008, 86: 948-954.
- [3] FARSANGI M A A, SAIDI A R, BATRA R C. Ana-

lytical solution for free vibrations of moderately thick hybrid piezoelectric laminated plates[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332: 5981-5998.

- [4] JIN J, BATRA R C. Effect of electromechanical coupling on static deformations and natural frequencies[J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2005, 52(7): 1079-1093.
- [5] TORRES D F, MENDONÇA P R. HSDT-layer wise analytical solution for rectangular piezoelectric laminated plates[J]. *Composite Structures*, 2010, 92: 1763-1774.
- [6] TOPDAR P, SHEIKH A H, DHANG N. Vibration characteristics of composite/sandwich laminates with piezoelectric layers using a refined hybrid plate model[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2007, 49: 1193-1203.
- [7] LIANG X Q, BATRA R C. Changes in frequencies of a laminated plate caused by embedded piezoelectric layers[J]. *AIAA Journal*, 1997, 35: 1672-1673.
- [8] DAVIS C L, LESIEUTRE G A. An actively tuned solids state vibration absorber using capacitive shunting of piezoelectric stiffness[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 232(3): 601-617.
- [9] WU N, WANG Q, QUEK S T. Free vibration analysis of piezoelectric coupled circular plate with open circuit[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329: 1126-1136.

- [10] SILVA S da, JÚNIOR M Dias, JUNIOR V Lopes. Structural health monitoring in smart structures through time series analysis [J]. *Structural Health Monitoring*, 2008,7:231-244.
- [11] HUANG G, SONG F, WANG X. Quantitative modeling of coupled piezo-elasto dynamic behaviour of piezoelectric actuators bonded to an elastic medium for structural health monitoring; a review [J]. *Sensors*, 2010,10:3681-3702.
- [12] 黎志伟. 含压电层双稳态复合材料层合壳体的力学特性及数值模拟[D]. 上海:同济大学,2007.
- [13] TAKI M S, TIKANI R, ZIAEI-RAD S, et al. Dynamic responses of cross-ply bi-stable composite laminates with piezoelectric layers [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2016,86:1003-1018.
- [14] PHUNG-VAN P, LORENZIS L De, CHIEN H, et al. Analysis of laminated composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators using higher-order shear deformation theory and isogeometric finite elements [J]. *Computational Materials Science*, 2015, 96:495-505.
- [15] ZHANG S Q, LI Y X, SCHMIDT R. Modeling and simulation of macro-fiber composite layered smart structures [J]. *Composite Structures*, 2015, 126: 89-100.
- [16] STÜRZENBECHER R, HOFSTETTER K, EBERHARDSTEINER J. Structural design of cross laminated timber (CLT) by advanced plate theories [J]. *Composites Science and Technology*, 2010, 70: 1368-1379.
- [17] CARRERA E. On the use of the Murakami's zigzag function in the modeling of layered plates and shells [J]. *Computers and Structures*, 2004, 82: 541-554.
- [18] REDDY J N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis* [M]. New York: CRC Press, 2004:100-101.
- [19] PANDEY A, AROCKIARAJAN A. Actuation performance of macro-fiber composite (MFC): Modeling and experimental studies [J]. *Sensors and Actuators A*, 2016, 248:114-129.
- [20] SONG Z G, LI F M. Active aeroelastic flutter analysis and vibration control of supersonic composite laminated plate [J]. *Composite Structures*, 2012, 94: 702-713.
- [21] ALIJANI F, AMABILI M. Nonlinear vibrations of laminated and sandwich rectangular plates with free edges. part 1: theory and numerical simulations [J]. *Composite Structures*, 2013, 105: 422-436.
- [22] CAO D X, LIU B Y. Free vibration analysis of a pre-twisted sandwich blade with thermal barrier coatings [J]. *Science China Technological Sciences*, 2017, 60: 1747-1761.
- [23] DOZIO L, CARRERA E. Ritz analysis of vibrating rectangular and skew multilayered plates based on advanced variable-kinematic models [J]. *Composite Structures*, 2012, 94: 2118-2128.
- [24] BOWEN C R, GIDDINGS C R, SALO A I T, et al. Modeling and characterization of piezoelectrically actuated bistable composites [J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2011, 58(9): 1737-1750.



第一作者简介:赵宽飞,男,1991年7月生,硕士生。主要研究方向为智能复合材料板壳结构振动特性、动力学行为与控制。

E-mail: 1039328773@qq.com

通信作者简介:郝育新,男,1972年2月生,博士、教授。主要研究方向为智能复合材料板壳结构非线性动力学。

E-mail: bimhao@163.com

