

基于近似似然的频响函数不确定性模型修正^{*}

邓振鸿¹, 张保强¹, 苏国强¹, 郭勤涛²

(1. 厦门大学航空航天学院 厦门, 361005) (2. 南京航空航天大学机电学院 南京, 210016)

摘要 贝叶斯模型修正框架下,以频响函数作为目标,提出了一种使用近似似然函数的不确定性模型修正方法。相比于模态参数,频响函数包含了结构更加充分的信息,用于结构动力学模型修正时有诸多优点,但现有的不确定性模型修正方法并不能很好地实现将频响函数作为目标进行修正。针对此问题,介绍了频响函数和贝叶斯框架下的不确定性模型修正理论,基于近似贝叶斯计算提出了一种近似似然函数,可适用于频响函数作为目标进行不确定性修正。将提出的似然函数应用到三自由度数值和 H 型非对称梁的有限元模型修正算例中,并结合 DREAM 算法对不确定性参数进行识别。研究表明:修正后参数的上、下限与目标值相差无几,修正后模型的频响函数与目标值几乎重合,在一定噪声水平下仍具有较好的修正效果,验证了所提方法的有效性。

关键词 模型修正; 频响函数; 贝叶斯; 近似似然函数; 不确定性

中图分类号 TH113; O327

引言

在许多工程问题中,所建立的仿真模型的准确度对于结构的设计分析至关重要,模型修正作为一种提高仿真模型可信度的手段,旨在借助试验数据来校准仿真模型^[1]。实际工程中,结构设备在制造加工误差、运输损伤及测试过程中的主客观因素等的影响下,使得系统中存在诸多不确定性,而造成多次试验的结果存在一定的分散性。如何准确定位这些分散性即不确定性的来源并将不确定因素识别出来,已经成为研究人员关注的重点。

不确定性模型修正技术是在传统的确定性模型修正的基础上,结合概率或非概率等统计学手段,对仿真模型进行修正。Beck 等^[2]提出了贝叶斯框架下的不确定性模型修正。Collins 等^[3]在处理振动测量数据的随机误差时,引入线性灵敏度方法,以测量数据的协方差矩阵的逆作为权重,通过加权最小二乘法来获得未知参数的统计量。文献[4-6]基于文献[2]的框架,发展了其他模型修正方法,并应用在各种线性和非线性动力学系统中。文献[7-8]发展了随机模型修正理论,提出了梯度回归方法,并应用到一系列物理结构中。文献[9]比较了贝叶斯方

法和摄动法,并将两种不确定性修正方法应用到 DLR AIRMOD 结构上加以对比验证。方圣恩等^[10]利用随机响应面模型的快速运算特性来反演得到参数的均值和方差。陈喆等^[11]研究了考虑试验模态不确定性的有限元模型修正方法。

上述不确定性模型修正研究均是以结构振动的模态参数作为输出响应量进行的,相比于模态参数,结构振动的频率响应量,如频响函数(frequency response function, 简称 FRF)则包含了结构更充分的信息,能够更加准确地反应结构的动力学特性。同时,采用频响函数进行模型修正可以有效避免由模态分析所引入的误差。文献[12-15]介绍了频响函数驱动模型修正研究,但均属于确定性修正范畴内的工作。Mares 等^[16]基于贝叶斯方法以三自由度质量弹簧系统频响函数的不确定性修正为例,比较了不同频率点的选择策略,发现靠近共振峰处的频率点应该被舍去,但仍没有得到很理想的修正效果。Arora 等^[17]针对动力学系统中存在的密集模态和阻尼问题,提出了一种基于复频响的参数不确定性修正方法。Hegde 等^[18]将单自由度二阶系统频响函数的幅值和相位分离,构建出参数与响应之间的线性模型,并采用极大似然估计方法反演出参数的均值和方差。Vakilzadhe 等^[19]在阻尼平衡

^{*} 国家自然科学基金资助项目(51505398);国家自然科学基金委员会与中国工程物理研究院联合基金资助项目(U1530122);航空科学基金资助项目(20150968003)
收稿日期:2019-05-07;修回日期:2019-08-26

模型校准技术的基础上,引入 Bootstrating 方法对试验频响函数重复采样,提出了一种新的随机有限元模型修正框架,可用于处理含有噪声的频响函数模型修正问题。Machado 等^[20]将随机场理论同基于灵敏度的频响函数模型修正方法结合起来,对梁材料随机场特性进行估计。Zhang 等^[21]同时考虑了参数和模型形式引起的不确定性,基于贝叶斯方法对重复测量的频响函数进行了不确定性校准研究。曹诗泽^[22]对基于频响函数的结构有限元模型修正的不确定性量化方法进行了研究,基于频率响应函数的概率模型,提出了频响函数驱动的贝叶斯模型修正方法,并采用渐进马尔科夫蒙特卡洛算法进行求解待修正参数的最优解及后验概率密度函数。

传统的贝叶斯模型修正通常假设不确定性参数服从正态分布,而实际工程中由于试验数据有限,其样本的分布特性并不明显,从而影响似然函数的选择。因此,笔者在贝叶斯框架下,引入近似贝叶斯计算(approximate Bayesian computation, 简称 ABC)理论^[23],采用区间作为参数的统计量,提出了一种适用于频响函数的似然函数,使用 DREAM 算法对不确定性参数进行识别,统计出参数的后验范围,并分别采用了三自由度数值算例和 H 型非对称梁的有限元模型修正算例加以验证。

1 基于频响函数的不确定性模型修正理论

对于多自由度振动系统,其动力学方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

其中: $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}$ 分别为其质量、刚度和阻尼矩阵; $\mathbf{F}(t)$ 为激振力。

对式(1)进行傅里叶变换得到

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C})^{-1} \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (2)$$

其中: ω 为频率。

定义系统的动刚度矩阵

$$\mathbf{Z}(\omega) = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} \quad (3)$$

动刚度矩阵的逆矩阵即为系统的位移频响函数矩阵

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{Z}(\omega)^{-1} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C})^{-1} \quad (4)$$

其中: $\mathbf{H}(\omega)$ 为在频率 ω 下的位移频响函数矩阵,其元素 $H_{ij}(\omega)$ 代表第 j 个自由度激励下第 i 个自由度的频率响应。

同理,可以得到系统的速度频响函数和加速度频响函数。

当系统参数 θ 存在不确定性的情况下,试验测试的频响函数和仿真计算频响函数有如下关系

$$\mathbf{H}_e(\omega) = \mathbf{H}_a(\omega; \theta) + \mathbf{e} \quad (5)$$

其中: $\mathbf{H}_e(\omega)$ 为试验频响函数; $\mathbf{H}_a(\omega; \theta)$ 为仿真频响函数; \mathbf{e} 为二者的误差,它是一个随机变量。

2 贝叶斯框架下的模型修正

2.1 贝叶斯理论

在不确定性模型修正领域,贝叶斯方法被广泛用来实现参数识别和统计推断。其基本理论为:已知感兴趣的量的先验信息,同时结合实测数据,对其后验分布进行更新。通常对于某个系统 $\mathbf{Y} = f(\theta)$, 已知参数 θ 的先验分布 $p(\theta)$ 和观察样本 $\tilde{\mathbf{Y}} = \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n\}$, 根据贝叶斯公式,其参数的后验概率可表示为

$$P(\theta | \tilde{\mathbf{Y}}) = \frac{p(\theta)P(\tilde{\mathbf{Y}} | \theta)}{\int_{\Theta} P(\tilde{\mathbf{Y}} | \theta)p(\theta)d\theta} \quad (6)$$

其中: $P(\theta | \tilde{\mathbf{Y}})$ 为参数 θ 的后验概率; $P(\tilde{\mathbf{Y}} | \theta) = L(\theta | \tilde{\mathbf{Y}})$ 为其似然函数;分母 $\int_{\Theta} P(\tilde{\mathbf{Y}} | \theta)p(\theta)d\theta$ 为积分常数。

因此有

$$P(\theta | \tilde{\mathbf{Y}}) \propto p(\theta)L(\theta | \tilde{\mathbf{Y}}) \quad (7)$$

可以看出,当先验信息给定时,似然函数的值越大,参数的后验概率也越大,意味着该参数接近目标值的可能性越大。

2.2 适用于频响函数模型修正的似然函数

一般情况下,假设观测数据 $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n$ 均服从正态分布,此时的似然函数即为其联合概率密度函数

$$L(\theta, \sigma | \tilde{\mathbf{Y}}) = L(\theta, \sigma | \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{e}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e})\right] \quad (8)$$

其中: \mathbf{e} 为实测值和仿真值的残差; $\boldsymbol{\Sigma}$ 为协方差矩阵。

然而在实际情况中,受限于试验样本数量,其所服从的分布并不总能满足正态分布。另外,当在正态分布假设下选用频响函数数据直接进行修正时,必须选择少量频率点下的响应进行修正,否则可能出现响应数据的协方差矩阵奇异的情况,而不同的频率点选取策略则会对修正结果产生不同的影响^[16]。近似贝叶斯估计是一种似然自由贝叶斯技

术^[23],该方法不假定数据服从某个特定的分布类型,而是通过设定一个容忍误差 ϵ ,并计算某个参数下模型数据和观测数据之间的距离 d ,当 $d < \epsilon$ 时,就接受该参数,否则拒绝该参数。基于该理论,笔者采用一种近似似然函数,以实现频响函数的不确定性模型修正。具体的似然函数表达式为

$$L(\boldsymbol{\theta} | \tilde{\mathbf{H}}) = \begin{cases} \text{rand}(a, b) \\ \left(\prod_{j=1}^m \{I(|S(\tilde{H}(\omega_j)) - H(\omega_j, \boldsymbol{\theta})| \leq \epsilon_j)\} > 0 \right) \\ 0 \quad \left(\prod_{j=1}^m \{I(|S(\tilde{H}(\omega_j)) - H(\omega_j, \boldsymbol{\theta})| \leq \epsilon_j)\} = 0 \right) \end{cases} \quad (9)$$

其中: $S(\tilde{H}(\omega_j))$ 为试验频响函数的某个统计量,通常为数据的均值,这里取区间中值; $H(\omega_j, \boldsymbol{\theta})$ 为在参数 $\boldsymbol{\theta}$ 下仿真计算得到的频率响应; ϵ_j 为可容忍的误差,这里选用0.5倍的试验最大值和最小值之差,即区间半径; $I(\cdot)$ 为指示函数,当括号里的不等式满足时,其值取1,不满足时取0; $\text{rand}(a, b)$ 为在区间 $[a, b]$ 范围内均匀产生的随机数, a 和 b 均取远大于零且相差不大的实数。

式(9)表明,当试验与仿真之间的误差满足试验本身的变异水平时,令似然函数值等于一个相对较大的数,而不满足时其值取零,从而实现对参数的接受和拒绝。同时为了保证继续搜寻其他满足收敛指标的参数而不停留在该处,故将似然函数设置成某个较大数附近的随机数,而非固定的值。

2.3 DREAM 算法

对于参数后验概率的求解,由于 \mathbf{Y} 关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的函数通常相对复杂或是以隐式存在,很难直接利用表达式进行积分计算,因此对于后验分布的求解一般借助于马尔科夫链蒙特卡洛(Markov chain Monte Carlo,简称MCMC)方法进行抽样。传统的MCMC抽样主要包括Metropolis算法、Metropolis-Hastings算法以及Gibbs抽样等,然而上述算法普遍存在计算效率低、拒绝率高及依赖建议分布严重的问题。后续发展起来的延迟拒绝MCMC算法能够自适应地改变建议分布,加快其收敛效率,但可能造成得到的后验分布与真实分布存在偏差。

DREAM算法^[24]是一种改进的MCMC算法,其全称为差分进化自适应Metropolis算法。DREAM算法具备多链并行抽样的能力,每条并行链在产生不同初始样本后,通过差分进化方程来产生新样本,在搜索过程中能自适应地调整步长和方向,从而对多个全局最优区域进行有效搜索,有利于

样本从局部最优点跳到全局最优点,拥有高效率的计算能力^[25-26]。笔者采用DREAM-Matlab工具箱^[27]求解不确定性参数的后验分布。

本研究所提模型修正方法具体包含如下步骤:

- 1) 结合测试得到的频响函数数据,统计出所关注频率下的所有试验频响函数的上、下限以及中值;
- 2) 根据试验数据的上、下限及中值计算出数据的离散度,将其作为容忍误差向量;
- 3) 设定参数的初始范围及迭代次数;
- 4) DREAM算法抽样产生参数值,并代入模型计算频响;
- 5) 根据式(9)计算近似似然函数值 L ,若 $L > 0$ 则接受该参数, $L = 0$ 则拒绝该参数;
- 6) 当计算次数小于等于设定的迭代次数时,回到步骤4,否则停止迭代计算,统计出所有使似然值取非零值的参数样本。

上述步骤的流程图如图1所示。

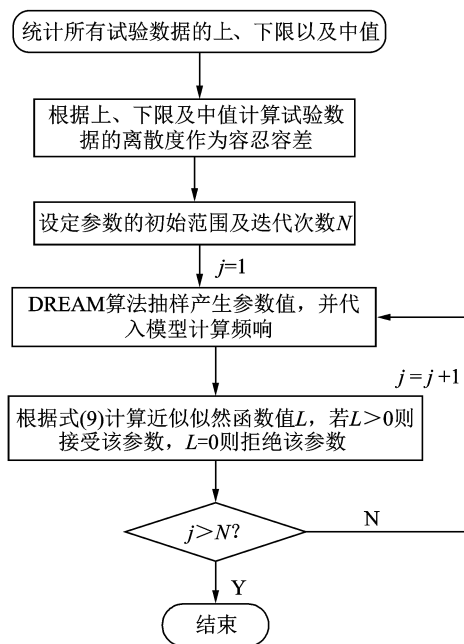


图1 修正过程流程图

Fig. 1 The flow chart of model updating process

3 算例验证

3.1 三自由度算例

某三自由度振动系统见图2,已知 $m_1 = m_2 = m_3 = 1.0 \text{ kg}$, $k_3 = k_4 = 1.0 \text{ N/m}$, $k_6 = 3.0 \text{ N/m}$ 。其他3个刚度系数 k_1, k_2, k_5 为待识别的不确定性参数,表现为在区间 $[0.8, 1.2] \text{ N/m}$ 范围内波动。

本算例在参数的目标区间范围内采用拉丁超立

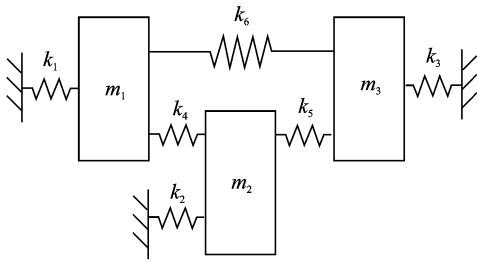


图 2 三自由度系统

Fig. 2 3DOF vibration system

方抽样 100 次得到的频响函数作为目标值,认为参数的初始值在区间 $[0.4, 2.4]$ N/m 内,采用 DREAM 算法对参数的后验分布进行更新。图 3 给出了 5 000 次抽样计算的参数迭代结果,可以看出参数在约 500 次迭代后趋于收敛,将收敛后参数样本的最大值和最小值统计出来,并与目标值进行比较,结果见表 1。

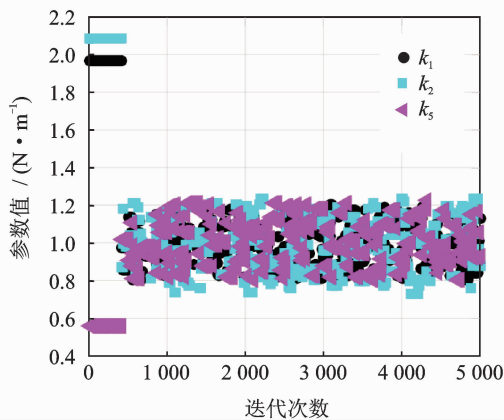


图 3 待修正参数迭代收敛过程

Fig. 3 Iterative convergence process of modified parameters

表 1 参数修正前后值及误差对比

Tab. 1 Comparison of parameters and errors before and after model updating

参数	下限			上限		
	k_1	k_2	k_5	k_1	k_2	k_5
目标值/ ($\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$)	0.80	0.80	0.80	1.20	1.20	1.20
初始值/ ($\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$)	0.40	0.40	0.40	2.40	2.40	2.40
修正值/ ($\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$)	0.80	0.73	0.80	1.20	1.23	1.22
初始 误差/%	-50	-50	-50	100	100	100
修正后 误差/%	0	-8.75	0	0	2.50	1.67

从表 1 可以看出,修正后参数的上限误差由原来的 100%减小到 3%以下,下限误差的绝对值由 50%降低至不超过 8.75%,可见修正效果显著。

图 4 为修正前后频响函数的对比,分别给出了初始参数下得到的 FRF 值、目标 FRF 值和修正后的 FRF 边界值。从图 4 可以看出,修正后 FRF 边界能够较好地包含所有的目标 FRF 曲线,相比于修正前,不确定性的范围大大缩小。

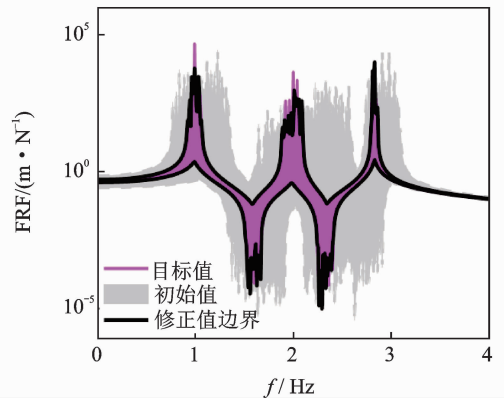


图 4 修正前后 FRF 对比图

Fig. 4 Comparison of FRF before and after updating

3.2 H 型非对称梁算例

结合某 H 型非对称梁有限元模型修正算例来说明笔者提出方法的可行性。H 型非对称梁及其尺寸如图 5 所示,将其划分为 12 个单元,材料为铝。在加工过程中,两侧的竖梁和横梁分别选用了两批不同的铝材料,同时由于安装过程中的损伤,其结构刚度受到了影响,主要体现在弹性模量的不确定性中,具体的材料参数见表 2。

表 2 材料参数及其不确定性

Tab. 2 Material parameters and their uncertainties

材料参数	目标值
两侧竖梁的弹性模量 E_1/MPa	[65 550, 72 450]
横梁的弹性模量 E_2/MPa	[65 550, 72 450]
泊松比	0.33
密度/ $(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	2 700

本算例中选取 E_1 和 E_2 作为待修正参数,另外考虑系统阻尼的不确定性,将模态阻尼比也作为不确定性参数同时进行修正,采用 Matlab 和 NAS-TRAN 联合编程,在参数目标值范围内执行 100 次拉丁超立方抽样获得的频响函数作为目标值来代替试验。将参数的初始区间定义在 $[60\ 000, 80\ 000]$ MPa 范围内。在图 5 中标出的激励点处施加单位加速度激励,选取的频率带宽范围为 100~800 Hz,

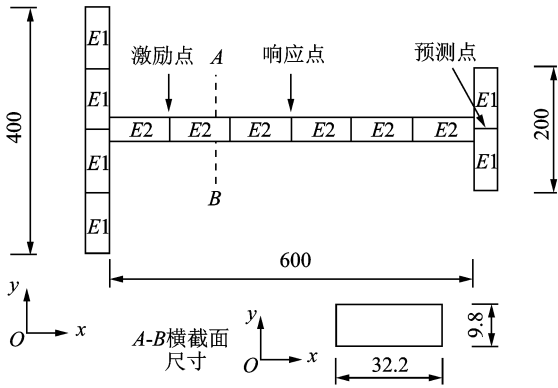


图5 非对称H型梁结构及其尺寸示意图(单位:mm)

Fig.5 The unsymmetrical H-shaped structure(unit:mm)

模态阻尼比 ζ 的目标区间设定为 $[0.028, 0.032]$, 初始区间为 $[0.02, 0.04]$ 。以图5所示的响应点处的位移频响函数为目标, 对参数进行修正。

表3给出了参数修正前后的上、下限及误差对比, 参数 E_1 的误差由 $[-8.47\%, 10.42\%]$ 降低至 $[0.20\%, 0.79\%]$, 参数 E_2 的误差由 $[-8.47\%, 10.42\%]$ 降低至 $[0.29\%, -0.11\%]$, 参数 ζ 的误差由 $[-28.57\%, 25.00\%]$ 降低至 $[0.81\%, 0.41\%]$, 表明参数的修正精度较高。图6为修正前后的FRF对比图, 分别给出了修正前后FRF边界以及目标值。可以看出相比于修正前, 修正后的FRF边界缩小, 并与目标值的边界相重合。图7给出了其他响应点(单元10, 11, 12交点处节点)修正后FRF的预测对比, 修正后的FRF边界与目标值的边界也基本吻合。进一步对所有试验测试的频响函数增加2%水平的高斯白噪声, 以考虑试验噪声对修正结果的影响。参数修正结果见表4, 可以看出, 相比于修正前, 不确定性参数的误差下降明显, 修正后不确定性参数也接近于真实值, 说明在一定水平噪声情况下, 仍具有不错的修正效果。综上所述, 笔者所提

表3 参数修正前后值及误差对比

Tab.3 Comparison of parameters and errors before and after model updating

参数	下限			上限		
	E_1 /MPa	E_2 /MPa	ζ	E_1 /MPa	E_2 /MPa	ζ
目标值	65 550	65 550	0.028 0	72 450	72 450	0.032 0
初始值	60 000	60 000	0.020 0	80 000	80 000	0.040 0
修正值	65 680	65 740	0.028 2	73 021	72 368	0.032 1
初始误差/%	-8.47	-8.47	-28.57	10.42	10.42	25.00
修正后误差/%	0.20	0.29	0.81	0.79	-0.11	0.41

方法对有限元模型的不确定性参数修正也具有适用性。

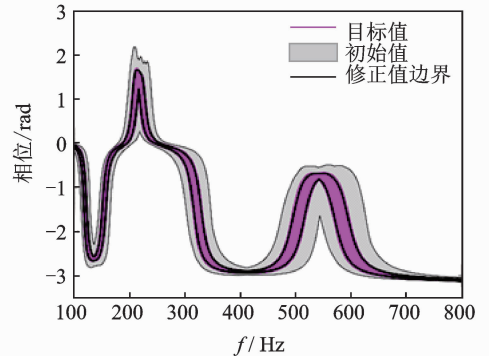
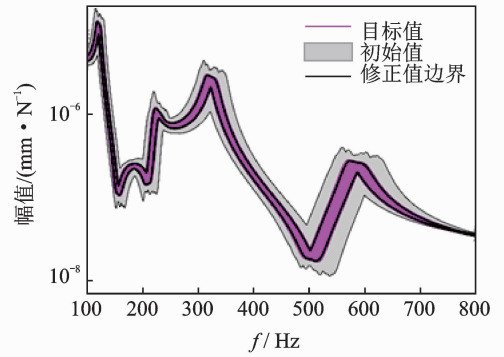


图6 修正前后FRF对比图

Fig.6 Comparison of FRF before and after updating

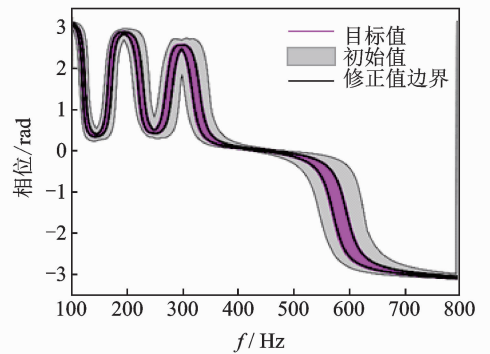
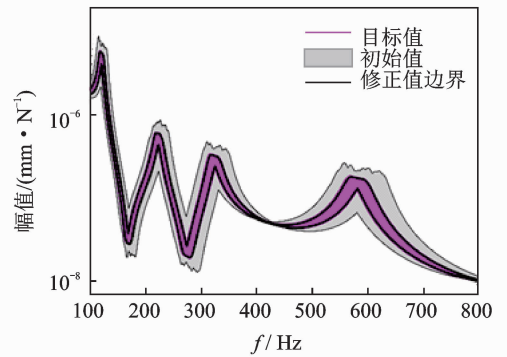


图7 其他响应点修正前后FRF预测对比图

Fig.7 Comparison of FRF prediction before and after updating of other response point

表4 参数修正前后值及误差对比(2%噪声)

Tab. 4 Comparison of parameters and errors before and after model updating (2% noise)

参数	下限			上限		
	E_1/MPa	E_2/MPa	ζ	E_1/MPa	E_2/MPa	ζ
目标值	65 550	65 550	0.028 0	72 450	72 450	0.032 0
初始值	60 000	60 000	0.020 0	80 000	80 000	0.040 0
修正值	64 667	65 770	0.028 0	73 904	72 400	0.032 9
初始 误差/%	-8.47	-8.47	-28.57	10.42	10.42	25.00
修正后 误差/%	-1.35	0.34	0.00	2.01	-0.07	2.75

4 结 论

1) 在贝叶斯模型修正框架下,引入近似贝叶斯计算方法,提出了一种近似似然函数,适用于频响函数不确定性模型修正,分别结合三自由度数值算例以及非对称梁的有限元模型修正算例进行了验证。

2) 修正过程中可直接应用离散化后的频响函数数据,不需要人为地选择频率点来避开共振峰处的响应。

3) 在参数分布不明确的情况下,采用区间来描述参数的不确定性,并引入近似贝叶斯计算理论,使用近似似然函数对参数进行筛选,避免了主观假设分布类型带来的偏差。

4) 算例结果表明,修正后的模型与目标值更加接近,且在一定噪声水平下仍能保持不错的修正效果,对于工程实际有一定的参考价值。

参 考 文 献

- [1] MOTTERSHEAD J E, FRISWELL M I. Model updating in structural dynamics: a survey[J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 167(2): 347-375.
- [2] BECK J L, KATAFYGIOTIS L S. Updating models and their uncertainties. I: Bayesian statistical framework[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1998, 124(4): 455-461.
- [3] COLLINS J D, HART G C, HASELMAN T K, et al. Statistical identification of structures[J]. AIAA Journal, 1974, 12(2): 185-190.
- [4] BECK J L, AU S K. Bayesian updating of structural models and reliability using Markov chain Monte Carlo simulation[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2002, 128(4): 380-391.
- [5] KERSCHEN G, GOLINVAL J C, HEMEZ F M.

Bayesian model screening for the identification of non-linear mechanical structures[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2003, 125(3): 389-397.

- [6] CHING J, CHEN Y C. Transitional Markov chain Monte Carlo method for Bayesian model updating, model class selection, and model averaging[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2007, 133(7): 816-832.
- [7] MARES C, MOTTERSHEAD J E, FRISWELL M I. Stochastic model updating: part 1—theory and simulated example[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2006, 20(7): 1674-1695.
- [8] MOTTERSHEAD J E, MARES C, JAMES S. Stochastic model updating: part 2—application to a set of physical structures [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2006, 20(8): 2171-2185.
- [9] GOVERS Y, KHODAPARAST H H, LINK M, et al. A comparison of two stochastic model updating methods using the DLR AIRMOD test structure[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2015, 52: 105-114.
- [10] 方圣恩, 张秋虎, 林友勤, 等. 参数不确定性估计的随机响应面模型修正方法[J]. 振动工程学报, 2016, 29(4): 594-602.
FANG Sheng'en, ZHANG Qiu hu, LIN You qin, et al. Stochastic response surface model updating for estimating parameters uncertainty[J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(4): 594-602. (in Chinese)
- [11] 陈喆, 何欢, 陈国平, 等. 考虑不确定性因素的有限元模型修正方法研究[J]. 振动工程学报, 2017, 30(6): 921-928.
CHEN Zhe, HE Huan, CHEN Guoping, et al. The research of finite element model updating method considering uncertainty[J]. Journal of Vibration Engineering, 2017, 30(6): 921-928. (in Chinese)
- [12] IMREGUN M, VISSER W J, EWINS D J. Finite element model updating using frequency response function data: I. theory and initial investigation[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1995, 9(2): 187-202.
- [13] LIN R M, ZHU J. Model updating of damped structures using FRF data[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2006, 20(8): 2200-2218.
- [14] 李伟明, 洪嘉振. 基于频响函数的模型修正方法[J]. 上海交通大学学报, 2011, 45(10): 1455-1459.
LI Weiming, HONG Jiazhen. Research on model updating method based on frequency response functions [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2011, 45(10): 1455-1459. (in Chinese)

- [15] 杨修铭, 郭杏林, 李东升. 基于 Kriging 模型的频响函数有限元模型修正方法[J]. 计算力学学报, 2018, 35(4): 487-493.
YANG Xiuming, GUO Xinglin, LI Dongsheng. Kriging model based finite element model updating method using frequency response function[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2018, 35(4): 487-493. (in Chinese)
- [16] MARES C, DRATZ B, MOTTERSHEAD J E, et al. Model updating using Bayesian estimation[C]// International Conference on Noise and Vibration Engineering. Leuven, Belgium; Katholieke Universiteit, 2006: 2607-2616.
- [17] ARORA V, FRISWELL M, ADHIKARI S. FRF-based probabilistic model updating in structural dynamics for uncertainty identification and quantification [C]// 24th International Congress on Sound and Vibration, International Institute of Acoustics and Vibration. London, UK:[s. n.], 2017.
- [18] HEGDE A, TANG J. Identifying parametric variation in second-order system from frequency response measurement[J]. Journal of Vibration and Control, 2018, 24(5): 879-891.
- [19] VAKILZADEH M K, YAGHOUBI V, JOHANSSON A T, et al. Stochastic finite element model calibration based on frequency responses and bootstrap sampling[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 88: 180-198.
- [20] MACHADO M R, ADHIKARI S, DOS SANTOS J M C, et al. Estimation of beam material random field properties via sensitivity-based model updating using experimental frequency response functions [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 102: 180-197.
- [21] ZHANG Baoqiang, GUO Qintao, WANG Yan, et al. Model-form and parameter uncertainty quantification in structural vibration simulation using fractional derivatives[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2019, 14(5): 051006.
- [22] 曹诗泽. 频率响应函数驱动的结构有限元模型修正贝叶斯算法及实验研究[D]. 合肥:合肥工业大学, 2018.
- [23] MARIN J M, PUDLO P, ROBERT C P, et al. Approximate Bayesian computational methods[J]. Statistics and Computing, 2012, 22(6): 1167-1180.
- [24] VRUGT J A, TERBRAAK C J F, CLARK M P, et al. Treatment of input uncertainty in hydrologic modeling: doing hydrology backward with Markov chain Monte Carlo simulation [J]. Water Resources Research, 2008, 44(12): W00B09.
- [25] 骆乾坤, 吴剑锋, 杨运, 等. 基于 DREAM 算法的含水层渗透系数空间变异特征识别[J]. 南京大学学报(自然科学版), 2016, 52(3): 448-455.
LUO Qiankun, WU Jianfeng, YANG Yun, et al. Identification of the spatial variability of aquifer hydraulic conductivity[J]. Journal of Nanjing University(Natural Science), 2016, 52(3): 448-455. (in Chinese)
- [26] 叶凯. 基于改进马尔科夫链算法的贝叶斯有限元模型修正研究[D]. 重庆:重庆大学, 2017.
- [27] VRUGT J A. Markov chain Monte Carlo simulation using the DREAM software package: theory, concepts, and Matlab implementation[J]. Environmental Modelling & Software, 2016, 75: 273-316.



第一作者简介: 邓振鸿, 男, 1995 年 10 月生, 硕士生。主要研究方向为结构动力学优化设计、模型确认等。
E-mail: zhdeng13@163.com

