

# 新型带限位元件的非线性隔振器设计及应用\*

孙玉华<sup>1</sup>, 柯尚娟<sup>2</sup>, 王国成<sup>3</sup>, 刘志彬<sup>3</sup>

(1. 西南大学工程技术学院 重庆, 400715) (2. 长安福特汽车有限公司 重庆, 401120)

(3. 重庆创元新能源科技有限责任公司 重庆, 404100)

**摘要** 针对传统的隔振器在解决负荷随转速变化的静压泵支撑基础的过度倾斜问题,采用理论分析和数值计算的方法,根据实际工程应用对象和避免共振的技术要求,设计了一种新型带限位元件的非线性变刚度隔振器,对其隔振效率进行了仿真分析和理论推导。通过试制新型隔振器并进行了安装测试实验,结果表明,新设计的隔振器隔振效率略高于原隔振器,静压泵的支撑基础基本处于水平位置,提高了系统的稳定性,且静压泵支撑基础的水平误差可通过调节隔振器的限位间隙来保证,具有实际工程应用价值。

**关键词** 限位间隙; 变刚度隔振器; 非线性; 隔振效率; 静压泵

**中图分类号** TH113.1

## 引言

振动隔离是解决动力设备振动问题的重要手段,目前普遍采用线性隔振器。根据线性隔振理论,当系统的激励频率与隔振器的固有频率之比大于 $\sqrt{2}$ 时才具有隔振效果。为了兼顾系统稳定性,隔振器的固有频率不能太低。因此,隔振器采用非线性刚度可同时满足系统稳定性和隔振效果的要求。

目前,实现非线性刚度隔振器的主要方法有:准零刚度非线性隔振器通过在传统的线性弹簧隔振器中并联一负刚度机构,实现隔振系统刚度的降低<sup>[1-2]</sup>。系统的质量完全由正刚度承载,通过合理设置隔振器设计参数、并联之后的低刚度来消减振动,达到高静刚度低动刚度的特性<sup>[3]</sup>。磁流变弹性体隔振器利用磁流变弹性体的刚度和阻尼可控特性<sup>[4-6]</sup>,采用相应的隔振控制算法编制控制系统软件,搭建控制系统硬件等实现移频,从而避开共振区域<sup>[7]</sup>。

在隔振器结构及材料方面,增加了摩擦阻尼器的橡胶隔振器可以在大位移条件下发挥作用,使其在低频阶段拥有大阻尼而迅速衰减振动,提高橡胶隔振器在低频的隔振性能<sup>[8-9]</sup>,类似于空间网状大分子链接形态、具有阻尼隔振材料的金属橡胶结构产生的非线性刚度和阻尼<sup>[10]</sup>。钢丝绳隔振器具有静态非线性、螺旋结构的大变形和材料非线性特性,是一种复杂的非线性弹簧系统,其位移响应中夹杂

随机成分<sup>[11]</sup>。空气弹簧是一个包括材料非线性、接触非线性和几何非线性三重耦合的强非线性,对低频和高频都具有良好的隔振效果<sup>[12-13]</sup>。

准零刚度隔振器可以实现隔振器刚度“高静低动”非线性特性,采用该类型隔振器会造成静压泵支撑基础的过度倾斜,不适合静压泵的振动隔离。磁流变弹性体隔振系统中的控制算法、控制系统软件和控制硬件涉及多学科领域,控制系统设计不好将严重影响隔振性能,且还需考虑隔振器成本。摩擦阻尼器隔振器不能够有效防止静压泵支撑基础的倾斜问题;金属橡胶和钢丝绳隔振器刚度会呈现出渐硬或者渐软的特性;空气弹簧受空间安装位置、控制系统复杂程度以及成本制约,限制了其进一步使用。因此,笔者设计了一种新型带限位元件的非线性隔振器,刚度呈现出“高动低静”的特性,能够实现低频振动隔离和防止支撑基础的过度倾斜。

## 1 隔振器应力-应变特性

对橡胶隔振器进行静态计算,假设橡胶材料为各向同性的超弹性材料<sup>[14]</sup>,通过对橡胶的应变能密度函数求导,得到材料的工程应力与工程应变之间的本构关系<sup>[15]</sup>。Mooney-Rivlin模型为橡胶材料的经典模型,基本可以模拟所有橡胶材料的力学特性,适用于中小变形。应变能密度函数为

\* 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(XDJK2019B064);重庆市科学技术局技术创新与应用发展重点资助项目(cstc2019jscx-gksb0281);高校间合作资助项目(F2018094);企业横向资金资助项目(2018022)

收稿日期:2019-07-09;修回日期:2019-10-10

$$W = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j + \sum_{k=1}^N \frac{1}{d_k} (I_3 - 1)^{2k} \quad (1)$$

典型的二项三阶展开式为

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + \frac{1}{d} (J - 1)^2 \quad (2)$$

其中:  $C_{10}, C_{01}, d$  为 Mooney 常数, 由材料实验确定; 对于不可压缩橡胶材料  $J = 1$ 。

取测试用的橡胶材料邵氏硬度为 50, Mooney-Rivlin 本构模型的材料常数  $C_{10} = 0.2185, C_{01} = 0.1799$ , 用式(3)拟合计算该橡胶单轴拉伸的应力应变曲线, 如图 1 所示。

$$y = 12.02x^3 - 20.014x^2 + 11.939x - 1.4146 \quad (3)$$

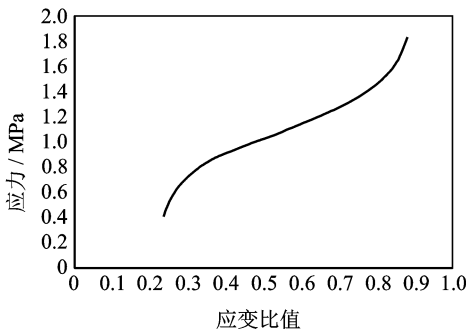


图 1 应力应变曲线

Fig. 1 The stress-strain curve

从图 1 可以看出, 应力和应变比值呈非线性关系, 主要是由于橡胶材料的非线性导致。橡胶在最初的小变形阶段, 随着变形增大, 工程应力增加较快; 在中等应变范围内, 应力和应变比值基本呈线性关系; 在大应变阶段, 随应变比值增加, 应力增幅加快。橡胶材料的这种特性能在小范围内改变橡胶隔振器的刚度。对起限位作用时需要刚度突然变大的隔振器, 传统的圆柱隔振器无法满足这一要求, 因此设计了一种带限位元件的橡胶隔振器, 实现从低刚度(主要起隔振作用)向高刚度(主要起限位作用)的突变, 使设计的隔振器刚度呈“高动低静”的特性, 满足实际工程需求, 其刚度对比如图 2 所示。

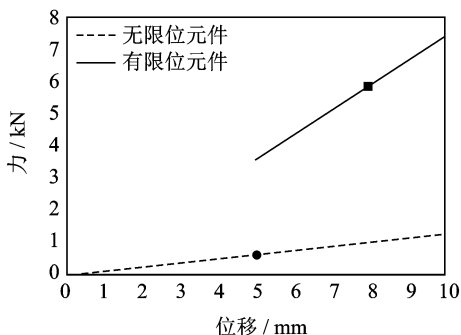


图 2 两种隔振器刚度对比

Fig. 2 The stiffness comparison of two types of isolators

图 2 中, 无限位元件在小变形阶段, 刚度趋于线性关系。有限位元件当隔振器的变形量小于限位间隙时(图中的 5mm 位移), 隔振器刚度为低刚度特性, 主要起隔振作用。当隔振器的变形量大于限位间隙时, 在限位元件的作用下隔振器刚度突然变大, 起到限位作用, 有效防止隔振设备的过度倾斜。

## 2 传统隔振器设计

作为内燃动车冷却系统核心部件的静压泵, 其可靠性直接影响机车的运行安全。静压泵安装位置如图 3 所示, 柴油发电机组自由端伸出一根万向轴带动静压泵轴旋转, 静压泵刚性安装在基座上, 基座通过 4 个圆柱形隔振器安装在构架伸出的两弯管支撑座上, 以减小静压泵激振力传递到公共构架。静压泵质量为 58.2 kg, 为了避免机组垂向固有频率与静压泵的固有频率接近而发生共振, 内燃动车发电机组的垂向固有频率为 8 Hz, 两者的频率比大于  $\sqrt{2}$ , 可估算静压泵的垂向固有频率为 15 Hz。

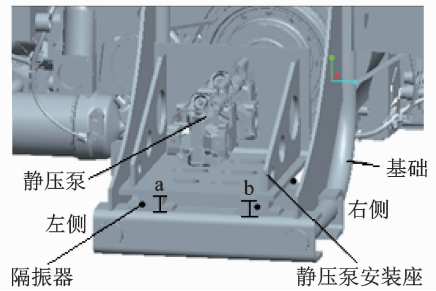


图 3 静压泵安装图

Fig. 3 The installation diagram of static pressure pump

设计隔振器的计算公式为

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_z}{m}} \quad (4)$$

$$K_z = (2\pi f)^2 m \quad (5)$$

每只隔振器的动刚度为

$$K_{iz} = (2\pi f)^2 m/n \quad (6)$$

其中:  $n$  为隔振器个数。

每只隔振器的垂向静刚度为

$$K_{is} = K_{iz}/n_d \quad (7)$$

其中:  $n_d$  值取 2~2.5, 在温度为 30℃ 时取 2.5。

隔振器在垂直方向上的静变形为

$$\delta_{is} = \frac{mg}{nK_{is}} = \frac{gn_d}{(2\pi f)^2} \quad (8)$$

一般取隔振器静变形  $\delta_{is}$  等于橡胶块高度  $H$  的 15%~25%, 即

$$\delta_{is} = (0.15 - 0.25) H \quad (9)$$

$$H = (4 - 6.7) \delta_{is} \quad (10)$$

橡胶块的截面积  $A$  为

$$A = HK_{is}/E_s \quad (11)$$

隔振器的承压面应尽量采用正方形或者圆形,其边长或直径宜控制在

$$4H \geq D \geq H \quad (12)$$

其中: $D$ 为正方形边长或者圆形承压面的直径。

隔振器的水平刚度为

$$K_{ix} = G_d A / H \quad (13)$$

其中: $G_d$ 为动态剪切模量, $G_d = 1/3E_d$ 。

在此隔振器橡胶材料的邵氏硬度取 50,静弹性模量  $E_s$  取  $262.5 \text{ N/cm}^2$ ,固有频率为  $15 \text{ Hz}$ ,隔振器数量为 4, $n_d$  取 2.5, $g$  取  $9.8 \text{ m/s}^2$ 。利用式(4)~(6)推导出静压泵隔振器垂向刚度为  $K_{iz} = 120 \text{ kN/m}$ 。利用式(7)~(13)推导出静压泵隔振器  $x$  方向刚度  $K_{ix} = 40 \text{ kN/m}$  和  $y$  方向刚度  $K_{iy} = 40 \text{ kN/m}$ 。利用式(8)~(11)得到隔振器高和截面积的形状参数,并利用式(12)进行校核。原隔振器的断面图如图 4 所示。动力包在组装完成后测试阶段,发现静压泵在运行过程中处于倾斜状态,特别是在柴油机启动瞬间倾斜更为明显。由于柴油机为顺时针旋转,造成静压泵左侧隔振器处于受拉状态,右侧处于受压状态,且随着柴油机档位的增加,倾斜越来越明显。表 1 为在不同档位下静压泵左侧间距  $a$  和右侧间距  $b$  的原间距值。可以看出,在怠速工况静压泵安装支座倾斜了近  $5 \text{ mm}$ ,在 7 档工况倾斜量达到了  $17 \text{ mm}$ ,因此需设计一种新型非线性隔振器以满足隔振和限位的要求。

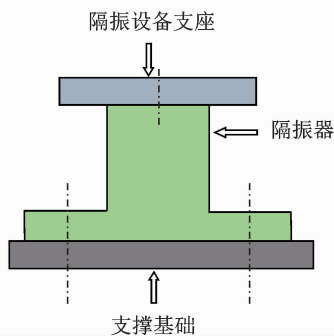


图 4 隔振器断面图

Fig. 4 The cross-section diagram of isolator

表 1 原间距值

Tab. 1 The original spacing value

档位	转速/(r·min <sup>-1</sup> )	间距 $a$ /mm	间距 $b$ /mm
0	600	45.00	39.70
1	900	46.09	35.62
2	1 100	47.06	34.64
3	1 200	48.04	34.70
4	1 350	48.88	34.52
5	1 500	49.92	34.02
6	1 650	50.04	32.16
7	1 800	49.80	32.76

### 3 新型隔振器设计及隔振效率有限元分析

根据原隔振器台架实验数据可知,造成安装基础倾斜的原因主要是隔振器刚度不足,在激振力矩的作用下基础倾斜,但又不能显著提高隔振器刚度。隔振器刚度过高,隔振效率显著下降,因此适当提高隔振器刚度,同时增加一限位元件,在保证隔振效率的同时,防止安装基础的严重倾斜。设计了一种新型带限位元件的隔振器断面图如图 5 所示,其刚度参数如表 2 所示。该类型隔振器在左侧隔振器受拉的情况下,下部限位器起作用;在右侧隔振器受压下情况下,上部限位器起作用。

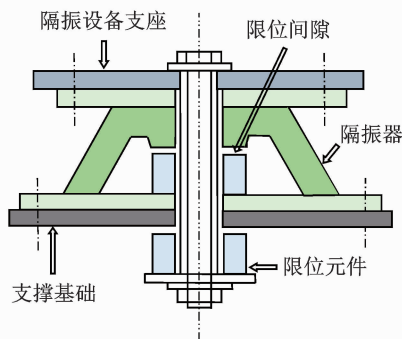


图 5 新型隔振器断面图

Fig. 5 The cross-section diagram of new type of isolator

表 2 隔振器及限位器刚度参数

Tab. 2 The parameters of isolator stiffness and displacement

三向刚度	kN/m	
	隔振器	限位器
$K_{ix}$	92	155
$K_{iy}$	920	155
$K_{iz}$	276	466

为了评价新设计的隔振器和传统隔振器的隔振效率,建立静压泵的有限元模型,静压泵质量为  $58.2 \text{ kg}$ ,通过设置 MASS21 单元实常数以模拟静压泵的质量,利用 COMBIN14 单元模拟隔振器,通过设置单元实常数来模拟隔振器  $x, y, z$  3 个方向的刚度,建立的隔振系统有限元模型如图 6 所示。

图 6 中圆柱形表面模拟静压泵外形,其弹性模量模拟刚体,圆柱质心位置设置 MASS21 单元,模拟静压泵质量,MASS21 单元通过与圆柱表面创建刚性区域固结在一起。圆柱形表面与矩形表面通过创建刚性区域固结,模拟静压泵与支撑基础刚性连接。矩形表面通过 4 个三向刚度 COMBIN14 单元与安装基础连接,来模拟静压泵隔振系统。

静压泵 4 个隔振器安装位置相对静压泵质心位置基本对称,在进行隔振系统强迫振动计算时,在静

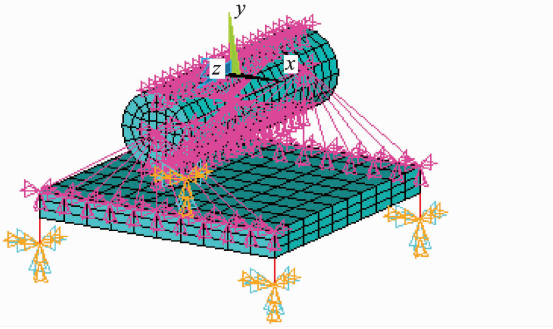


图6 隔振系统有限元模型

Fig. 6 The finite element model of vibration isolation system

压泵质心位置施加简谐力,提取隔振器上端与支座连接处的位移,根据隔振器的刚度计算传递到基础的当量力,从而计算隔振器的隔振效率。图7为静压泵隔振系统振动模型采用原隔振器和新设计的隔振器计算得到的垂向位移对比曲线。

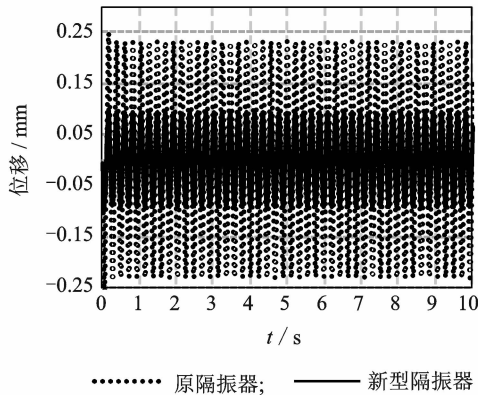


图7 原隔振器和新型隔振器位移对比曲线

Fig. 7 The displacement comparison curves of the original isolator and the new type of isolator

根据静压泵的有限元模型,强迫振动计算完成后,提取静压泵隔振器上支点与静压泵支座连接点的位移,对应隔振器的相应方向上的刚度乘积,利用式(14)求出传递到基础上的力,根据式(15)计算出垂向幅值为100 N的简谐力。在激振频率为90 Hz的激励下,原隔振器和新型隔振器的隔振效率分别为80.42%和81.53%。由此可以看出,新设计的隔振器隔振效率相比原隔振器略有提高,且隔振系统的稳定性增加。在机组运行过程中,静压泵隔振系统基础基本水平,不会出现严重倾斜问题,满足实际工程需求。

$$F = \sqrt{\frac{(\sum F_x)^2}{N_x^2} + \frac{(\sum F_y)^2}{N_y^2} + \frac{(\sum F_z)^2}{N_z^2}} \quad (14)$$

其中: $F$ 为当量力; $F_x, F_y, F_z$ 分别为与基础相连的各隔振器在 $x, y, z$ 方向上的均方根值; $N_x, N_y, N_z$ 为 $x, y, z$ 方向上的测点个数。

$$\eta = (1 - F/F_0) \times 100\% \quad (15)$$

其中: $F_0$ 为激振力的大小。

## 4 隔振效率理论分析

为了验证静压泵新型隔振器设计和有限元模型仿真结果的正确性,对静压泵隔振系统隔振效率进行理论计算。静压泵通过4个隔振器对称安装,弹性中心基本在静压泵质心位置,因此可将该隔振系统简化为单自由度系统,如图8所示。

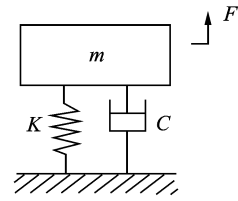


图8 单层隔振系统简图

Fig. 8 The sketch of single vibration isolation system

系统在简谐激振力 $f_0 \sin \omega t$ 作用下,传递到刚性基础的弹性力和阻尼力分别为

$$kF(t) = kB_d \sin(\omega t + \varphi_d) \quad (16)$$

$$c\dot{F}(t) = c\omega B_d \cos(\omega t + \varphi_d) \quad (17)$$

隔振系统的稳态响应幅值为

$$B = F_0 / k \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2} \quad (18)$$

力幅值为

$$F = kB \sqrt{1 + 4\xi^2 \lambda^2} \quad (19)$$

将经过隔振器传递到基础的力与激励幅值的比值作为衡量隔振效果的标准,称为力传递率,即

$$T_f = F/F_0 = \sqrt{[1 + (2\xi\lambda)^2] / [(1 - \lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2]} \quad (20)$$

其中: $k$ 为隔振器刚度; $c$ 为隔振器阻尼; $\xi$ 为隔振器相对阻尼系数; $\lambda = \omega/\omega_0$ ,为频率比; $\omega$ 为激振频率; $\omega_0$ 为系统固有频率。

为了和有限元模型仿真结果进行对比, $\xi$ 取0.12。在整个转速范围内,激振频率为3.0和6.0谐次的激振力幅值很大,因此激振频率为30,45, ..., 180 Hz。隔振器固有频率为原隔振器频率和新隔振器频率,按照式(20)计算静压泵隔振系统的隔振效率,结果如图9所示。

从图9可知:由于新型隔振器刚度的提高导致隔振效率整体上低于原隔振器的隔振效率,符合隔振器刚度越低、隔振效果越好的隔振理论;随着激振频率的提高,激振频率与隔振器固有频率之比增大,隔振效率提高;有限元模型仿真得到的原隔振器和新型隔振器的隔振效率分别为80.42%和81.53%;理论推导的原隔振器隔振效率为88.53%,位于图9虚线中的黑实点位置;新型隔振器的隔振效率为



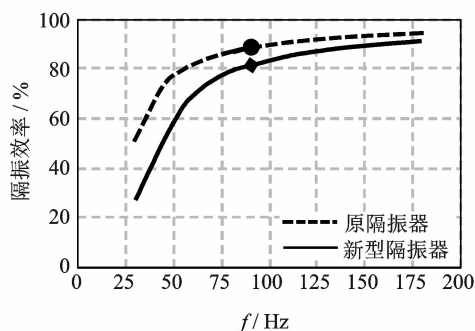


图9 原隔振器和新型隔振器隔振效率对比图

Fig. 9 The vibration isolation efficiency comparison of the original isolator and the new type of isolator

81.50%，位于图9实线上黑方点位置。原隔振器的隔振效率相对理论推导的隔振效率误差为9.2%，而新型隔振器的隔振效率基本和理论推导的隔振效率完全一致，从而进一步验证了新型隔振器设计的正确性，保证了隔振系统的稳定性。

## 5 实验

为了验证新设计的带限位元件隔振器运行过程中静压泵安装基础是否倾斜，对动力包装车进行了实车实验，实验照片如图10所示。对静压泵的支座进行了平衡测试，改进后的间距值如表3所示。从表3可知，柴油发电机组总速到1200 r/min之间，主要为隔振器变形，当转速为1200 r/min时，最大偏移量为3.81 mm。当柴油发电机组的转速为1350 r/min时，此时的限位元件发挥限位作用，与隔振器刚度并联，此时的最大偏移量为5.04 mm。当转速高于1350 r/min时，刚度突变，总刚度为隔振器刚度和限位元件刚度之和。当达到最大转速1800 r/min时，最大偏移量为5.61 mm，改进之前静压泵基础的最大偏移量为17 mm，通过新型带限位元件的非线性隔振器设计，使静压泵支撑基础的倾斜问题基本解决。



图10 隔振系统实验照片

Fig. 10 The experimental photo of vibration isolation system

表3 改进后的间距值

Tab. 3 The improved spacing value

档位	转速 / (r · min <sup>-1</sup> )	间距 $a$ / mm	间距 $b$ / mm
0	600	43.27	41.53
1	900	43.72	41.04
2	1 100	44.04	40.88
3	1 200	44.36	40.55
4	1 350	44.85	39.81
5	1 500	44.93	39.67
6	1 650	45.04	39.55
7	1 800	45.12	39.51

为了验证动力包双层隔振系统的隔振效率，进行了动力包装车运行工况下的振动测试，动力包隔振系统实车实验测试图如图11所示。测试动力包一级、二级隔振器支座处的振动加速度时域曲线，获得隔振器处上、下测点位移的主要简谐成分，得出各个二级隔振器的位移差，与对应隔振器的刚度乘积，即可求出传递到基础上的力。根据式(15)得到3.0和6.0谐次的隔振效率随转速的变化曲线，图12为动力包隔振系统隔振效率实车测试图。可见，在整个转速范围内各运行工况下，动力包双层隔振系统的隔振效率均在85%以上，在1100 r/min及以上转速隔振效率均超过90%，在高频区具有良好的隔振效果，验证了静压泵隔振系统与动力包双层隔振系统没有振动耦合及静压泵新型隔振器隔振设计的正确性。



图11 实车实验测试图

Fig. 11 The experimental photo of the real train test

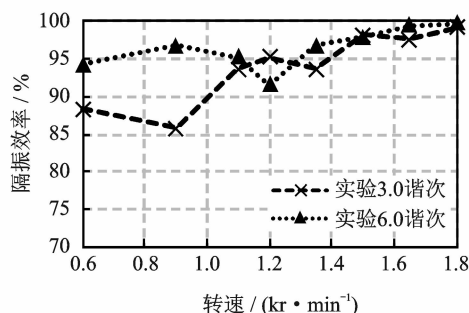


图12 隔振效率实车测试图

Fig. 12 The vibration isolation efficiency of real train test

## 6 结 论

1) 设计的带限位元件的非线性隔振器结构简单,对传统隔振器进行小范围改动即可满足实际工程的隔振和限位要求,具有经济实用的特点。

2) 通过新型隔振器设计前后的实验测试结果对比得出,实际工程中隔振基础的倾斜最大误差可通过调节设计的带限位元件的非线性隔振器的限位间隙来保证。

3) 通过隔振效率的对比可以得出,笔者设计的新型带限位元件的非线性隔振器在满足隔振效率的同时,兼顾了系统的稳定性。该设计可为其他类似的工程隔振限位问题提供参考。

### 参 考 文 献

- [1] PALOMARES E, NIETO A J, MORALES A L, et al. Numerical and experimental analysis of a vibration isolator equipped with a negative stiffness system [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, 414: 31-42.
- [2] CARRELLA A, BRENNAN M J, WATERS T P. Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 301(3/5): 678-689.
- [3] WANG X L, ZHOU J X, XU D L, et al. Force transmissibility of a two-stage vibration isolation system with quasi-zero stiffness [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 87(1): 633-646.
- [4] BENACCHIO S, MALHER A, BOISSON J, et al. Design of a magnetic vibration absorber with tunable stiffnesses [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 85(2): 893-911.
- [5] WANG B C, KARI L. Modeling and vibration control of a smart vibration isolation system based on magneto-sensitive rubber [J]. *Smart Materials and Structures*, 2019, 28(6): 1-10.
- [6] YARRA S, GORDANINEJAD F, BEHROOZ M, et al. Performance of a large-scale magnetorheological elastomer-based vibration isolator for highway bridges [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2018, 29(20): 3890-3901.
- [7] NGUYEN X B, KOMATSUZAKI T, IWATA Y, et al. Robust adaptive controller for semi-active control of uncertain structures using a magnetorheological elastomer-based isolator [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, 434: 192-212.
- [8] 林胜, 袁健, 贺才春. 摩擦阻尼橡胶隔振器的研究 [J]. *噪声与振动控制*, 2006, 3: 18-21.

- LIN Sheng, YUAN Jian, HE Caichun. Research of a type of friction-damper rubber mount [J]. *Noise and Vibration Control*, 2006, 3: 18-21. (in Chinese)
- [9] 王迪. 基于某型涡浆发动机橡胶隔振器动力学特性研究 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2017.
  - [10] 朱斌, 马艳红, 洪杰. 金属橡胶刚度阻尼模型理论分析 [J]. *北京航空航天大学学报*, 2011, 37(10): 1298-1302.
  - ZHU Bin, MA Yanhong, HONG Jie. Theoretical analysis on stiffness and damping characteristics of metal rubber [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2011, 37(10): 1298-1302. (in Chinese)
  - [11] 王红霞, 龚宪生, 潘飞, 等. O型钢丝绳隔振器的三向动态特性 [J]. *振动、测试与诊断*, 2016, 36(6): 1190-1195.
  - WANG Hongxia, GONG Xiansheng, PAN Fei, et al. Research on the dynamic behavior of O type wire-cable vibration isolator in three modes [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2016, 36(6): 1190-1195. (in Chinese)
  - [12] 朱煜, 喻强, 徐登峰, 等. 串联倒摆的空气弹簧隔振器中倒摆的稳定性分析 [J]. *振动与冲击*, 2018, 37(6): 188-194.
  - ZHU Yu, YU Qiang, XU Dengfeng, et al. Stability analysis of an inverted pendulum in an air-spring vibration isolator connected in series with the inverted pendulum [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, 37(6): 188-194. (in Chinese)
  - [13] 应杏娟, 李郝林, 倪争技. 空气弹簧隔振器的动力特性研究 [J]. *上海理工大学学报*, 2006, 28(2): 164-168.
  - YING Xingjuan, LI Haolin, NI Zhengji. Study on dynamic characteristics of air-spring vibration isolator [J]. *University of Shanghai for Science and Technology*, 2006, 28(2): 164-168. (in Chinese)
  - [14] SEIBERT D J, SCHOICHE N. Direct comparison of some recent rubber elasticity models [J]. *Rubber Chemistry and Technology*, 2000, 73: 366-384.
  - [15] 郭仲衡. 非线性弹性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1980: 98-133.



**第一作者简介:** 孙玉华,男,1983年5月生,博士、副教授。主要研究方向为机械动力设备振动控制。曾发表《内燃动车车体与动力包悬挂局部振动分析》(《振动、测试与诊断》2016年第36卷第4期)等论文。

E-mail: syh240@163.com

