

基于子系统的非线性时变系统辨识方法^{*}

陈腾飞¹, 何欢¹, 何成², 陈国平¹

(1. 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室 南京, 210016)

(2. 南京航空航天大学无人机研究院 南京, 210016)

摘要 针对非线性时变系统提出一种基于子系统的辨识方法,用于时变多自由度(multiple degree-of-freedom,简称 MDOF)系统中非线性的定位和估计,并且无需关于系统的先验知识。所提出的新方法提供一个连续时间模型, MDOF 系统按照自由度被分解为不同的子系统。设计正交化算法和误差减小率(error reduction ratio,简称 ERR),可以确定子系统中质量和自由度之间的线性及非线性连接的所有信息。在辨识过程中,时变参数的时间表达式可以由新方法准确给出。用一个 3 自由度(degree-of-freedom,简称 DOF)集中质量系统和一个机械臂结构的辨识过程为例,对所提出的方法进行验证。由于简单性及高效性,此方法将在实际工程中取得广泛的应用。

关键词 非线性时变系统;参数辨识;子系统;正交三角分解;误差减小率计算

中图分类号 TH113.1; O302; O322

引言

在时变系统辨识领域,目前对线性系统的研究比较深入。现有各种时域、频域方法,大多通过线性系统成熟的理论将线性时不变结构系统的模态分析理论推广到时变系统^[1-3]。但是,几乎所有的实际工程结构都呈现出非线性特性,在系统辨识中同时考虑系统的非线性和时变特性难度较大^[4-5]。近年来,在系统控制、信号处理等领域中,国内外学者已经开始研究,并做出一些有意义的尝试^[6-8]。

根据模型不同,非线性时变系统辨识方法可以分为两大类:第 1 类是神经网络模型方法,第 2 类是非线性参数模型方法^[9]。Ahmed-Ali 等^[10]基于径向基函数神经网络发展提出一种自适应辨识方法。He 等^[11]基于“短时时不变”假设,将非线性自回归滑动平均(nonlinear autoregressive moving average,简称 NARMA)模型应用于非线性时变系统辨识问题。一些用于线性时变系统的信号处理方法也被应用在非线性问题中。Li 等^[12]结合 B 样条基函数和正交前向回归(orthogonal forward regression,简称 OFR)算法,有效地追踪线性系统中的慢变及

快变参数,并将此方法结合时变 NARMA 模型,用于非线性时变系统问题,得到了较好的辨识效果^[13]。

非线性时变系统辨识包括非线性的定位、非线性类型的确定以及参数估计,其中非线性定位方法已经发展成熟。目前,大多研究默认非线性类型已知,并没有涉及这方面的讨论。因此,迫切需要新的方法确定系统中时变非线性的所有信息,包括具体位置、类型和系数。正交三角分解 QR 是回归量正交化常用手段,可以用于消除不同变量之间的耦合关系。本研究将 QR 分解应用于连续时间 MDOF 模型中,准确辨识出系统的所有线性及非线性时变特征。

在动力学分析中,实际工程结构通常被离散为多自由度结构系统。根据实际情况,可以采取不同的离散方法,例如集中质量系统,有限单元方法等。文中假设结构可以精确离散化为多自由度系统,并且所有自由度上的运动被精确测量。文中简单描述非线性时变 MDOF 系统的数学模型;根据自由度将结构系统分解为不同子系统;结合 QR 分解和 ERR 计算,对系统非线性时变参数进行辨识;最后,通过数值算例来验证辨识方法的精度。

^{*} 国家自然科学基金资助项目(11472123, 11602105);机械结构力学及控制国家重点实验室研究基金资助项目(南京航空航天大学)(MCMS-I-0118G01);江苏省自然科学基金资助项目(BK20160782)

收稿日期:2018-07-27;修回日期:2019-09-07

1 非线性时变 MDOF 系统数学模型

通常, n 自由度线性时变系统的运动方程可以写为

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

其中: $\mathbf{M}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ 和 $\mathbf{K}(t)$ 分别为时变质量、阻尼和刚度矩阵; $\mathbf{x}(t)$ 为位移向量; $\mathbf{F}(t) = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ 为外载荷向量; $\dot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{x}}$ 分别为时间变量的一阶及二阶导数。

在式(1)中引入非线性项 $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$, 可得 n 自由度非线性时变系统的运动方程

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{F}(t) \quad (2)$$

其中: $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = [N_1, N_2, \dots, N_n]^T$ 为非线性恢复力, 通常可表示为位移和速度向量的函数。

由式(2), 系统第 i 个自由度上的运动方程为

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j}(t)\ddot{x}_j(t) + \sum_{j=1}^n c_{i,j}(t)\dot{x}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{i,j}(t)x_j(t) + N_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = f_i(t) \quad (3)$$

其中: $m_{i,j}(t)$, $c_{i,j}(t)$, $k_{i,j}(t)$ 分别为 $\mathbf{M}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{K}(t)$ 矩阵第 i 行第 j 列元素; $x_i(t)$, $x_j(t)$ 分别为位移向量 $\mathbf{x}(t)$ 的第 i, j 个元素; $N_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ 为向量 $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ 的第 i 个元素; $f_i(t)$ 为向量 $\mathbf{F}(t)$ 的第 i 个元素。

在 MDOF 系统中, 每个自由度的运动不仅由自由度上的载荷分量决定, 还受到其他自由度运动连接的影响, 而系统辨识的意义在于确定不同自由度之间这些未知连接关系。用一组基函数对系统中非线性恢复力展开

$$N_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \sum_{r=1}^{L_n} \alpha_{i,r}(t) \nu_{i,r}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (4)$$

其中: $\nu_{i,r}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ 为基函数; $\alpha_{i,r}(t)$ 为相应的时变系数; L_n 为基函数总数。

在一般的动力学系统中, 多项式基函数可以拟合多种类型的非线性恢复力, 例如三次非线性刚性力、立方根型非线性刚性力等。将式(4)代入式(3)可得

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j}(t)\ddot{x}_j(t) + \sum_{j=1}^n c_{i,j}(t)\dot{x}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{i,j}(t)x_j(t) + \sum_{r=1}^{L_n} \alpha_{i,r}(t) \nu_{i,r}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = f_i(t) \quad (5)$$

若将式(5)等号左边所有线性项和非线性项用

统一的形式 $\varphi_{i,k}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}})$ 表示, 可得更简单的形式

$$\sum_{k=1}^{3n+L_n} \beta_{i,k}(t) \varphi_{i,k}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) = f_i(t) \quad (6)$$

其中: $\beta_{i,k}(t)$ 为时变系数。

处理时变问题时, 常采取“短时时不变”假设, 即在很短的时间内将时变参数看作常量。在此假设下, 给定合适的短时间间隔 Δt , 对任意时间步 t_n , 在时间区间 $[t_n - \frac{1}{2}\Delta t, t_n + \frac{1}{2}\Delta t]$ 内, 式(3)可作为时不变系统处理。因此, 根据式(6)可得

$$\sum_{k=1}^{3n+L_n} \beta_{t_n,i,k} \varphi_{i,k}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) = f_i(t) \quad (t_n - \frac{1}{2}\Delta t \leq t \leq t_n + \frac{1}{2}\Delta t) \quad (7)$$

其中: $\beta_{t_n,i,k}$ 为常数, 表示时间区间 $[t_n - \frac{1}{2}\Delta t, t_n + \frac{1}{2}\Delta t]$ 内参数值。

由“短时时不变”假设可知, $\beta_{t_n,i,k}$ 即为式(6)中时刻 t_n 下的参数值, 即 $\beta_{i,k}(t_n) = \beta_{t_n,i,k}$ 。若系统位移、速度、加速度以及外载荷均可准确测得, 则系统参数辨识问题转化为标准回归问题。对不同时刻 t_n , 若时刻点数大于未知参数的数量, 则所有线性和非线性参数可通过求解式(7)中方程确定。在此之前, 需要解决的一个重要问题是如何确定式(6)中基函数具体形式和总数。对此, 文中会提出一个基于 QR 分解的子系统算法, 有效解决此问题。

2 非线性时变 MDOF 系统的子系统描述

时不变集中质量 MDOF 系统的质量矩阵是对角矩阵, 相似地, 时变集中质量 MDOF 系统的质量矩阵可以表示成以下形式

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} m_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2(t) & \cdots & 0 \\ M & M & O & M \\ 0 & 0 & \cdots & m_n(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

作用在第 i 个自由度上的恢复力, 由此自由度与其他相关自由度上的相对运动决定。集中质量之间相对位移可记作 $\xi_{i,j} = x_i - x_j$, 其中 $\xi_{i,i} = x_i$ 表示集中质量 m_i 的绝对位移。 m_i 上由不同连接产生的恢复力可由相对位移 $\xi_{i,j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 和相对速度 $\dot{\xi}_{i,j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 表示, 包括线性弹性力 $\sum_{j=1}^n -$

$k_{i,j}(t)\xi_{i,j}; k_{i,j}(t)$ 为线性弹簧刚度,负号表示相反方向;线性阻尼力 $\sum_{j=1}^n -c_{i,j}(t)\dot{\xi}_{i,j}$, 其中 $c_{i,j}(t)$ 为线性阻尼系数。另外,非线性恢复力 $N_i(x, \dot{x}, t) = N_i(\xi_i, \dot{\xi}_i, t)$, 其中 $\xi_i = [\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \dots, \xi_{i,n}]^T$ 。

与式(4)相似, m_i 上的非线性恢复力可以用一组关于 ξ_i 和 $\dot{\xi}_i$ 的基函数展开

$$N_i(\xi_i, \dot{\xi}_i, t) = \sum_{r=1}^{L_n} \alpha'_{i,r}(t) v_{i,r}(\xi_i, \dot{\xi}_i) \quad (9)$$

其中: $v_{i,r}(\xi_i, \dot{\xi}_i)$ 为基函数; $\alpha'_{i,r}(t)$ 为时变系数; L_n 为基函数总数。

因此,式(5)可以改写为

$$m_i(t)\ddot{\xi}_{i,i} + \sum_{j=1}^n c_{i,j}(t)\dot{\xi}_{i,j} + \sum_{j=1}^n k_{i,j}(t)\xi_{i,j} + \sum_{r=1}^{L_n} \alpha'_{i,r}(t)v_{i,r}(\xi_i, \dot{\xi}_i) = f_i(t) \quad (10)$$

尽管式(10)在形式上与式(5)类似,但是式中所有项均有具体的物理意义,包括连接的位置及形式。例如, $k_{i,j}(t)\xi_{i,j}$ 表示 m_i 和 m_j 之间存在线性弹簧连接。因此,文中将采用式(10)中的模型。

同式(6)中原理,式(10)中所有线性项和非线性项可以写成统一形式,式(11)可看作一个包括系统线性和非线性连接黑箱模型

$$\sum_{k=1}^K \theta_{i,k}(t) \varphi_{i,k}(\xi_i, \dot{\xi}_i, \ddot{\xi}_i) = f_i(t) \quad (11)$$

其中: K 为线性和非线性项总数; $\theta_{i,k}(t)$ 为模型中时变系数; $\varphi_{i,k}$ 为和 m_i 相关的相对位移和速度的任意形式的函数。

在本研究中,将采用多项式基函数展开,因此式(11)可以改写为

$$m_i(t)\ddot{\xi}_{i,i} + \sum_{r=1}^L \sum_{p=0}^r \gamma_{j,k,p,q}(t) \xi_{i,j}^p \dot{\xi}_{i,k}^q = f_i(t) \quad (12)$$

$\binom{j=1, \dots, n}{k=1, \dots, n}^{p+q=r}$

其中: $\gamma_{j,k,p,q}(t)$ 为模型中多项式 $\xi_{i,j}^p \dot{\xi}_{i,k}^q$ 的时变系数。

引入“短时不变”假设,系统可以表示为

$$m_{i_m,i} \ddot{\xi}_{i,i} + \sum_{r=1}^L \sum_{p=0}^r \gamma_{t_m,j,k,p,q} \xi_{i,j}^p \dot{\xi}_{i,k}^q = f_i(t) \quad (13)$$

$\binom{j=1, \dots, n}{k=1, \dots, n}^{p+q=r}$

$(t_m - \Delta t/2 \leq t \leq t_m + \Delta t/2)$

其中:质量 $m_{i_m,i}$ 和多项式系数 $\gamma_{t_m,j,k,p,q}$ 在此时间区间内均为常数,且

$$\begin{cases} m_i(t_m) = m_{t_m,i} \\ \gamma_{j,k,p,q}(t_m) = \gamma_{t_m,j,k,p,q} \end{cases} \quad (14)$$

在式(13)中,如何确定多项式项成为新的难题,因为不是所有的多项式项都是模型中所需要的,这主要取决于系统中非线性特性,包括位置以及非线性的类型,这些信息正是所缺乏的。因此,引入一个新的方法以确定式(13)中多项式项,并将参数估计简化为每个时间区间内的标准回归问题。为方便起见,式(13)可以写为更加简洁的形式

$$\theta_{t_m,i,k} \varphi_{i,k}(\xi_i, \dot{\xi}_i, \ddot{\xi}_i) = f_i(t) \quad (15)$$

$(t_m - \frac{1}{2}\Delta t \leq t \leq t_m + \frac{1}{2}\Delta t)$

在式(14)的假设下,通过对不同时刻 t_m 的时间区间 $[t_m - \frac{1}{2}\Delta t, t_m + \frac{1}{2}\Delta t]$ 中的标准回归问题进行计算,可以估计出多项式模型中的时变系数。得出的多项式系数可以清楚反映原 MDOF 系统的特性,包括所有线性连接和非线性连接。例如,形如式(12)的等式 ($\ddot{\xi}_{2,2} + 0.1\dot{\xi}_{2,1} + \xi_{2,1} + 1.5\xi_{2,3}^3 = f_2, t_m = 5$ s) 表明: m_2 通过一个线性刚度弹簧和一个线性阻尼与 m_1 连接,通过一个三次非线性刚度弹簧与 m_3 连接,且系数随时间变化。实际上,时变参数可以表示为这些系数的时间曲线。另外需要注意,式(13)中离散时刻 t_m 的取值范围是 $[\Delta t/2, T_{\text{total}} - \Delta t/2]$, 其中 T_{total} 为数据收集的总时间。

3 MDOF 子系统非线性时变参数辨识方法

在式(15)的辨识问题中,通过一种基于 QR 分解的方法,从所有的多项式项中确定模型所需的重要项,并对所选项的系数进行估计。通常,重要项的确定分为两个步骤^[11]。首先,需要确定多项式的最高阶,即式(13)中的 L 。显然,阶次越高,多项式基拟合非线性模型的能力越强。但是出于计算成本的考虑,常使用较低阶次的多项式基函数,具体可通过比较不同阶次下的拟合精度来确定。与之相比,第 2 个步骤是在确定最高阶次的情况下,确定模型所需的重要项,是本节讨论的重点。应用 QR 分解确定重要项的过程:①回归量正交化,消除变量之间的相关性;②通过 ERR 确定模型所需的重要项;③估计参数。

式(15)中短时区间 $[t_m - \Delta t/2, t_m + \Delta t/2]$ 内采样点总数记为 N ,则方程可以改写为如下矩阵方程

的形式

$$\mathbf{F} = \Phi \Theta + \mathbf{H} \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(1) \\ \cdots \\ f(N) \end{bmatrix}; \Phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \cdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix}, \Phi \text{ 为回归矩阵}; \Theta =$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{t_m,1} \\ \cdots \\ \theta_{t_m,K} \end{bmatrix}; \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \eta(1) \\ \cdots \\ \eta(N) \end{bmatrix}, \mathbf{H} \text{ 为未测量的噪声}; \eta(t) \text{ 为}$$

与回归矩阵 Φ 无关的零均值白噪声序列; $\varphi^T(t) = [\varphi_1 \cdots \varphi_K]$ 。

为了将回归量正交化,对回归矩阵 Φ 进行 QR 分解

$$\Phi = QR \quad (17)$$

其中: \mathbf{R} 为 $K \times K$ 阶的上三角矩阵且对角元素为正; \mathbf{Q} 为 $N \times K$ 阶的上三角矩阵。

\mathbf{R} 矩阵可以作如下分解

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}\mathbf{A} \quad (18)$$

其中: \mathbf{D} 为一个 $K \times K$ 阶对角矩阵,其元素为 \mathbf{R} 矩阵对角线元素; \mathbf{A} 为 $K \times K$ 阶单位上三角矩阵,即对角元素均为 1。

因此,式(17)可以改写为

$$\Phi = \mathbf{W}\mathbf{A} \quad (19)$$

$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_K] = \mathbf{Q}\mathbf{D}$, 为一个 $N \times K$ 阶矩阵,且满足如下条件

$$\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \begin{cases} d_i > 0 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

其中: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积运算,即 $\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_j =$

$$\sum_{k=1}^K \mathbf{w}_i(k) \mathbf{w}_j(k)。$$

将式(17)代入式(16)可得

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}\mathbf{g} + \mathbf{H} \quad (20)$$

其中: $\mathbf{g} = \mathbf{A}\Theta$ 。

式(20)可以改写为

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^K \mathbf{w}_i g_i + \mathbf{H} \quad (21)$$

若对 \mathbf{F} 自身作内积运算 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle$, 将式(21)代入可得

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^K \mathbf{w}_i g_i, \mathbf{F} \right\rangle = \sum_{i=1}^K \langle \mathbf{w}_i g_i, \mathbf{F} \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^K g_i^2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle \end{aligned} \quad (22)$$

式(22)等号两边同时除以 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle$ 可得

$$1 = \frac{\sum_{i=1}^K g_i^2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle}{\langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle} \quad (23)$$

ERR_j 定义为

$$\text{ERR}_j = g_j^2 \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle / \langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle \quad (24)$$

其中: $g_j = \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{F} \rangle / \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle$ 。

从所有候选多项式中确定模型所需的重要项,各项的 ERR 可以提供一个标准。在 ERR 计算的每一步中,具有最大 ERR_j 的候选项会被作为重要项加入模型。若给定公差常数 ρ , 如果以下条件满足,此重要项选择过程将在第 K_s 步停止

$$\sum_{i=1}^{K_s} \text{ERR}_i > 1 - \rho \quad (25)$$

这里的 ERR 计算具有较高的效率,可以用来构造出形如式(15)的数学模型,避免所有的非重要项,有利于计算。

至此,文中提出的系统辨识过程可以总结如下。

1) 分别对 MDOF 系统不同的离散点施加外载荷并测量系统响应。

2) 确定多项式基函数最高阶,得到含有 K 个候选项的模型,并确定 ρ 数值。

3) 计算各候选项 ERR,具有最大 ERR 的候选项作为重要项加入式(15)中的模型。

4) 在 ERR 计算的第 k ($k \geq 2$) 步,在剩余候选项中选择具有最大 ERR 的项作为模型的第 k 项。若条件式(25)满足,继续步骤 5; 否则,令 $k = k + 1$, 重复此步骤。

5) 完成 ERR 计算,得到由 K_s 项构成的模型,系统参数估计如下

$$\mathbf{A}_s \hat{\Theta}_s = \mathbf{g}_s \quad (26)$$

其中: \mathbf{A}_s 为一个 $K_s \times K_s$ 单位上三角矩阵; \mathbf{g}_s 向量由 g_k ($k = 1, 2, \dots, K_s$) 构成。

通过对选择出的重要项构成的回归方程最小二乘求解,可以得出系数向量 $\hat{\Theta}_s$ 。由 Gauss-Markov 定理可知,在平稳零均值白噪声下,此最小二乘解给出最佳无偏估计。对每一个离散时刻 t_m 在时间区间 $[\Delta t/2, T_{\text{total}} - \Delta t/2]$ 内施加以上过程,通过最小二乘求解得出的 $\hat{\Theta}_s$ 给出 t_m 时刻系统参数值。为简单起见,ERR 计算的终止条件可改进为给定常数 ρ_c , 当所有剩余项的 ERR 均小于 ρ_c 时,则程序终止。

4 算例分析

4.1 3DOF 集中质量系统辨识

本节通过一个非线性时变 MDOF 集中质量系

统辨识的算例,说明提出的方法的精度和效率。若输入、输出数据全部测量,可以通过上一节描述的方法对形如式(5)的模型进行辨识。

考虑如图 1 所示的 3 自由度系统。系统质量分别为 $m_1 = -0.01t + 2.5$ kg, $m_1 = 1$ kg 和 $m_3 = 1.5$ kg。系统中线性刚度弹簧为 $k_1 = k_2 = k_4 = 1$ N/m 和 $k_3 = -0.03t + 4$ N/m,线性阻尼为 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0.1$ N·s/m。另外,在 m_2 和 m_3 之间有一个三次非线性刚度 $k_{nl} = 3 + 0.0005 t^2$ N/m³。在这些系统参数中, m_1, k_3 和 k_{nl} 为含时变特性。依次单独对 3 个集中质量进行激励,其中外激励为用方差 $\sigma^2 = 25$ 的零均值平稳高斯白噪声表示的集中载荷。用四阶 Runge-Kutta 方法分别对系统响应进行求解,采样频率为 100 Hz。在“短时不变”假设下,每个时间区间内有 1 000 个时刻点参与计算,即 $\Delta t = 10$ s 且 $5 \text{ s} \leq t_m \leq 95 \text{ s}$ 。考虑到测量噪声的影响,在系统响应数据中添加 3% 高斯干扰。当噪声较大情况下,通过测量加速度积分求速度及位移,会导致误差。因此,文中假设各自由度响应数据(包括位移、速度及加速度)均可直接准确测量。

首先,需要在较多候选多项式中确定模型的重要项。在本算例中,多项式基函数的最高阶 $L = 9$,图 1 所示的 3 自由度系统可以由形如式(13)中的子系统模型描述,在每个子系统中,由最高阶为 9 的多项式基函数构成最初的子系统方程。通过 ERR 计算,在 $5 \text{ s} \leq t_m \leq 95 \text{ s}$ 内平均 ERR 大于 $\rho_c = 0.005\%$ 的多项式将作为此模型的重要项,不同子系统的 ERR 结果如表 1 所示。

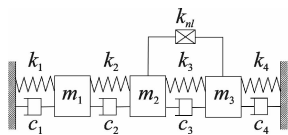


图 1 3 自由度集中质量系统

Fig. 1 The 3DOF lumped mass system

表 1 子系统 1 中所有的项均为线性项,非线性项均在 ERR 计算中被忽略,这说明作用在 m_1 上的恢复力均为线性恢复力,这与图 1 所示一致。子系统 1 中的辨识结果如图 2 所示,包括质量 m_1 和 m_1 相关的所有线性连接(红色实线表示实际参数时间曲线,黑色点划线表示辨识出的曲线)。图 2(a)表明质量 m_1 辨识结果准确,包括其时变特性。为了定量分析辨识结果的精确度,将辨识出的曲线最小二乘拟合为时间的线性函数曲线,拟合曲线参数与实

际质量 m_1 比较,计算误差。拟合的曲线在图 2(a)中用蓝色虚线表示,其参数及误差如表 2 所示。拟合直线与真实曲线接近,斜率和初值的误差均小于 5%。由图 2(b)~(e)可知,对子系统 1 中的线性刚度和线性阻尼识别精度相当高,4 条辨识时间曲线与实际常参数十分接近。

表 1 各子系统中 ERR 结果

Tab. 1 ERRs of Terms in the Subsystems

系 统	编号	重要项	ERRs/%
子系统 1	1	$\dot{\xi}_{1,1}$	94.04
	2	$\xi_{1,2}$	3.58
	3	$\xi_{1,1}$	2.13
	4	$\dot{\xi}_{1,2}$	0.21
	5	$\dot{\xi}_{1,1}$	0.02
子系统 2	1	$\dot{\xi}_{2,2}$	70.38
	2	$\xi_{2,1}$	15.21
	3	$\xi_{2,3}$	12.09
	4	$\xi_{2,3}^3$	0.80
	5	$\dot{\xi}_{2,1}$	0.73
	6	$\dot{\xi}_{2,3}$	0.32
子系统 3	1	$\dot{\xi}_{3,3}$	95.34
	2	$\xi_{3,3}$	3.03
	3	$\xi_{3,2}$	1.40
	4	$\dot{\xi}_{3,3}$	0.13
	5	$\dot{\xi}_{3,2}$	0.08
	6	$\xi_{3,2}^3$	0.01

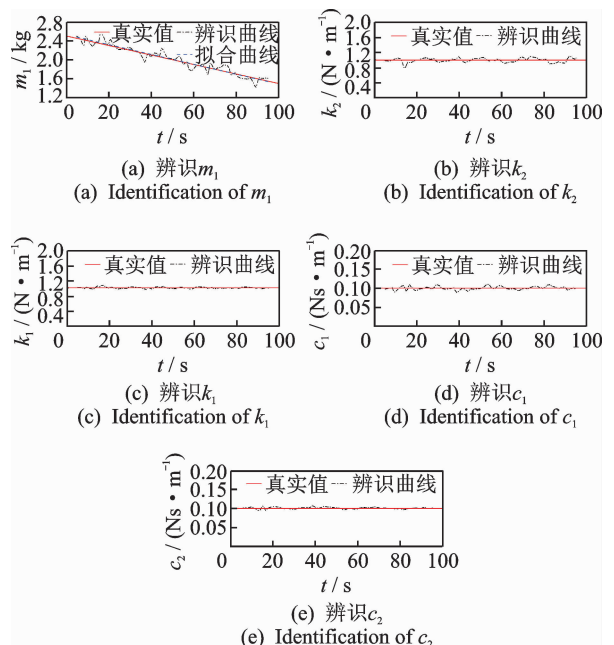


图 2 子系统 1 辨识结果

Fig. 2 Identification result of subsystem 1

表2 子系统1中 m_1 时间曲线参数

Tab.2 Parameters in the Time Expression of m_1 in subsystem 1

拟合项	实际值	拟合曲线系数	误差/%
t	-0.010 0	-0.010 4	3.80
1	2.500 0	2.526 5	1.06

在表1子系统2中,第2,5项代表 m_2 和 m_1 之间的线性刚度和线性阻尼,第3,6项代表 m_2 和 m_3 之间的线性刚度和线性阻尼,第4项代表 m_2 和 m_3 之间的非线性刚度连接,这与图1所示的结构特性相吻合。子系统2的辨识结果如图3所示。在这个子系统中,存在线性时变刚度 k_3 和非线性时变刚度 k_{nl} 。为定量分析上述两个时变参数辨识结果的精确度,将 k_3 的辨识结果最小二乘拟合为时间的线性函数,将 k_{nl} 的辨识结果拟合为时间的二次函数,拟合项的系数及其误差如表3所示。拟合曲线与真实曲线很接近,系数误差均低于5%。

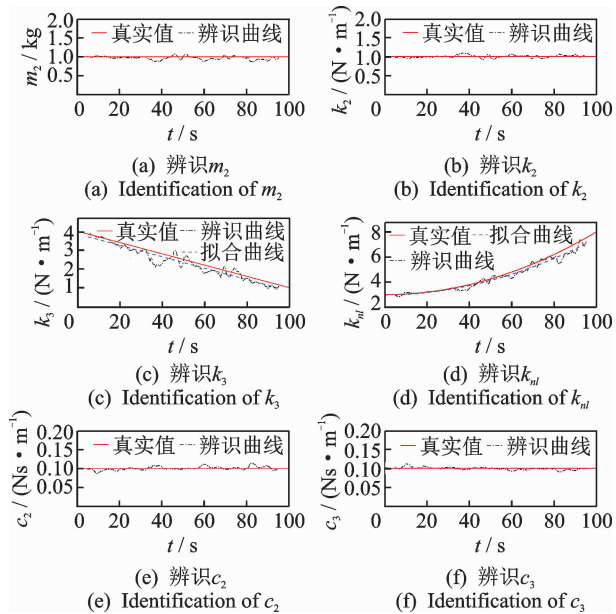


图3 子系统2 辨识结果

Fig.3 Identification result of subsystem 2

表3 子系统2中辨识时间曲线参数

Tab.3 Identified parameters in the time expression in subsystem 2

参数	拟合项	实际值	拟合曲线系数	误差/%
k_3	t	-0.030 0	-0.030 4	1.30
	1	4.000 0	3.859 0	3.53
	t^2	0.000 5	0.000 5	4.30
k_{nl}	t	0.000 0	-0.001 3	
	1	3.000 0	2.969 1	1.03

由表1子系统3可知,在子系统3中时变参数 k_3 和 k_{nl} 也被确定,分别由第3和第6项代表,子系

统3的辨识结果如图4所示。同样地,对时变参数 k_3 和 k_{nl} 辨识结果定量分析,结果如表4所示,由图5(c),(f)可知,用蓝色虚线表示的拟合曲线几乎与参数实际曲线重合,表明辨识精度很高。

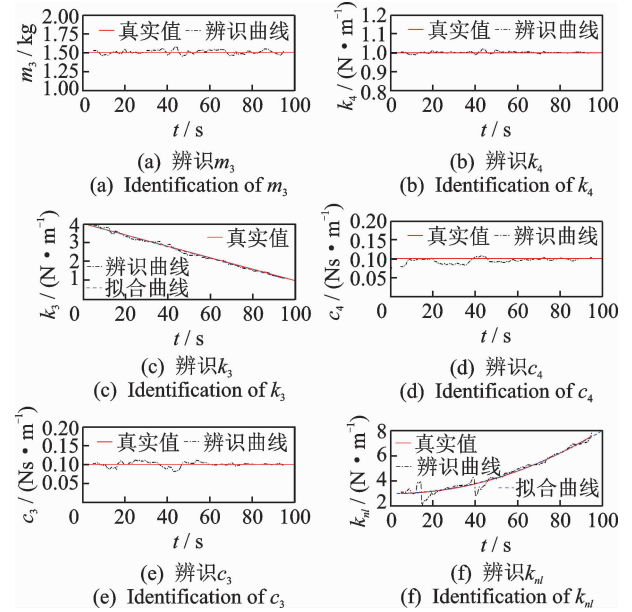


图4 子系统3 辨识结果

Fig.4 Identification result of subsystem 3

表4 子系统3中辨识时间曲线参数

Tab.4 Identified parameters in the Time expression of k_3 in subsystem 3

参数	拟合项	实际值	拟合曲线系数	误差/%
k_3	t	-0.030 0	-0.030 5	1.67
	1	4.000 0	3.999 0	0.03
	t^2	0.000 5	0.000 5	5.07
k_{nl}	t	0.000 0	-0.001 9	
	1	3.000 0	3.002 2	0.07

4.2 机械臂结构辨识

本节考虑一个可以在平面中转动的机械臂结构(图5),此结构可看作平面两杆时变结构系统:两杆

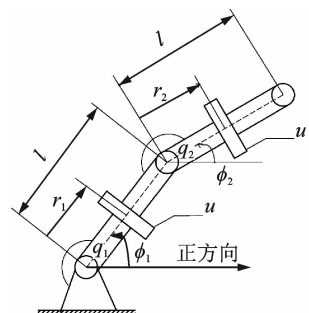


图5 机械臂结构

Fig.5 Mechanical arm structure

长度均为 $l=1$ m,质量为 $m=1$ kg。杆 1 与基础间为立方根型非线性扭转刚度 $\sqrt[3]{\varphi_1}$,系数为 $k_{n1}=1000$ Nm/rad^{1/3};杆 1 与杆 2 之间为线性扭转刚度连接,其系数为 $k_2=800$ Nm/rad。假设两杆上均有质量 $u=0.25$ kg 的可移动质量块, r_1 和 r_2 分别为两个质量块与扭转连接处的距离, q_1 和 q_2 为两个扭转连接处的力矩载荷, φ_1 和 φ_2 为两杆的旋转位移。

图 5 中机械臂结构运动方程可以写为

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\boldsymbol{\varphi}}(t) + \mathbf{C}(t)\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}(t) + \mathbf{N}(t) = \mathbf{q}(t) \quad (27)$$

其中: $\boldsymbol{\varphi}(t) = [\varphi_1, \varphi_2]^T$; 时变质量矩阵 $\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} 4ml^2/3 + u(r_1^2 + l^2) & (0.5ml^2 + ur_2l)\cos(\delta\varphi) \\ (0.5ml^2 + ur_2l)\cos(\delta\varphi) & ml^2/3 + ur_2^2 \end{bmatrix}$; $\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ 为 $t=0$ s,时刻两杆初始旋转角度位移之差。

与上一个算例不同,此质量矩阵并不是对角矩阵,因此在每一个子系统的辨识过程中,都需要考虑两杆的旋转加速度 $\ddot{\varphi}_1$ 和 $\ddot{\varphi}_2$ 。系统刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

时变阻尼矩阵为

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} 2ur_1\dot{r}_1 & ur_2l\cos(\delta\varphi) \\ ur_2l\cos(\delta\varphi) & 2ur_2\dot{r}_2 \end{bmatrix} + 0.005\mathbf{K} \quad (29)$$

这里包括系数为 0.005 的比例阻尼。

非线性恢复力矩向量为

$$\mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} k_{n1}\varphi_1^{1/3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

外载荷向量为

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) - q_2(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

假设两个移动质量块位移的表达式为

$$r_i = 0.5 + 0.3\sin(\pi t) \quad (i=1,2) \quad (32)$$

两杆的初始角度为

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\pi/4, 0) \quad (33)$$

分别用方差 $\sigma^2=25$ 的零均值平稳高斯白噪声表示的力矩载荷对两个子系统进行激励。用四阶 Runge-Kutta 方法分别对系统 10 s 内响应进行求解,采样频率为 100 Hz。

在杆 1 子系统的辨识结果中, $\xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \xi_{1,1}^3, \xi_{1,1}^5, \xi_{1,1}^7, \xi_{1,1}^9$ 项的系数在 0~10 s 内几乎为常数,各系数在此时段内的均值如表 5 所示。立方根型非线性扭转刚度 k_{n1} 可由关于 $\xi_{1,1}$ 的多项式项系数确定,而线性扭转刚度 k_2 可由 $\xi_{1,2}$ 项的系数确定。

通过图 6 所示的非线性扭转刚度辨识值与真实值的比较结果(扭转角度 $[-0.1, 0, 0.1]$ 范围内)可知,笔者提出的方法可以准确辨识出非多项式类型的非线性特征。 $\xi_{1,2}$ 项系数的均值为 836(误差 = 4.5%),与线性扭转刚度 k_2 的真实值一致。另外, $\mathbf{M}(t)$ 和 $\mathbf{C}(t)$ 矩阵中的其他时变元素可以在杆 1 和杆 2 的子系统中辨识出来,过程与上一算例类似,此处不再赘述。

表 5 杆 1 子系统中 k_{n1} 辨识结果

Tab. 5 Identification Results of k_{n1}

重要项	辨识均值	重要项	辨识均值
$\xi_{1,1}$	1.63×10^4	$\xi_{1,1}^5$	1.79×10^9
$\xi_{1,2}$	8.36×10^2	$\xi_{1,1}^7$	-2.02×10^{11}
$\xi_{1,1}^3$	-7.01×10^6	$\xi_{1,1}^9$	8.10×10^{12}

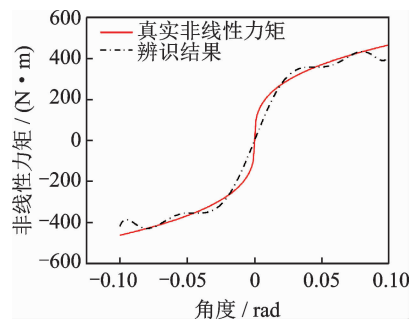


图 6 立方根型非线性扭转刚度 k_{n1} 辨识结果

Fig. 6 Identified result of the cube-root stiffness k_{n1}

上述两个数值算例结果表明,笔者提出的方法可以准确地识别出时变 MDOF 系统中非线性特性,确定非线性位置及类型,并估计出系统参数的时间曲线。不同自由度之间的连接可以在不同子系统中分别辨识。值得注意的是,有些系统的非线性特性取决于外载荷的大小和频率,为了能在合理范围内对实际结构系统进行近似,外载荷最好具有宽幅、宽频,以激发系统的非线性特性。

5 结束语

基于 QR 分解和 ERR 计算,发展出一个新的非线性时变系统辨识方法,将 MDOF 系统分为不同的子系统,在不同子系统中,对非线性及时变连接进行定位、估计。该方法主要优势在于,无需关于系统的先验知识,直接在连续时间模型中准确辨识非线性时变参数。此方法需要测量模型中各自由度的响应数据,对于大型工程结构,首先要对模型进行降阶处理。

参 考 文 献

- [1] LIU K. Identification of linear time-varying systems [J]. *Journal of Sound & Vibration*, 1997, 206(4): 487-505.
- [2] 邹经湘, 于开平, 杨炳渊. 时变结构的参数识别方法 [J]. *力学进展*, 2000, 30(3): 370-377.
ZOU Jingxiang, YU Kaiping, YANG Bingyuan. Methods of time-varying structural parameter identification [J]. *Advances in Mechanics*, 2000, 30(3): 370-377. (in Chinese)
- [3] 庞世伟, 于开平, 邹经湘. 用于时变结构模态参数识别的投影估计递推子空间方法 [J]. *工程力学*, 2005(5): 125-129.
PANG Shiwei, YU Kaiping, ZOU Jingxiang. A projection approximation recursive subspace method for identification of modal parameters of time-varying structures [J]. *Engineering Mechanics*, 2005(5): 125-129. (in Chinese)
- [4] NORDSJO A E, ZETTERBERG L H. A recursive prediction error algorithm for identification of certain time-varying nonlinear systems [C] // 1999 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing-Proceedings. Phoenix: IEEE Computer Society, 1999: 1305-1308.
- [5] NORDSJO A E, ZETTERBERG L H. Identification of certain time-varying nonlinear Wiener and Hammerstein systems [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49(3): 577-592.
- [6] 邹高峰, 王正欧. 基于回归神经网络的非线性时变系统辨识 [J]. *控制与决策*, 2002, 17(5): 517-521.
ZOU Gaofeng, WANG Zheng'ou. Identification of nonlinear time varying systems based on recurrent neural networks [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(5): 517-521. (in Chinese)
- [7] GREEN M, ZOUBIR A M. Selection of a time-varying quadratic Volterra model using a wavelet packet basis expansion [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(10): 2721-2728.
- [8] 罗晓, 陈耀, 孙优贤. 基于小波包分解的非线性时变系统辨识 [J]. *高校应用数学学报*, 2004, 19(1): 51-56.
LUO Xiao, CHEN Yao, SUN Youxian. Time-varying nonlinear system identification based on wavelet packet [J]. *Applied Mathematics a Journal of Chinese Universities (Ser. A)*, 2004, 19(1): 51-56. (in Chinese)
- [9] YU K P, PANG S W, ZHAO J. Advances in method of time-varying linear/nonlinear structural system identification and parameter estimate [J]. *Chinese Science Bulletin*, 2009, 54(20): 3147-3156.
- [10] AHMED-ALI T, KENNE G, FRANCOISE L L. Identification of nonlinear systems with time-varying parameters using a sliding-neural network observer [J]. *Neurocomputing*, 2009, 72(7/9): 1611-1620.
- [11] HE F, WEI H L, STEPHEN B. Identification and frequency domain analysis of non-stationary and nonlinear systems using time-varying NARMAX models [J]. *International Journal of Systems Science*, 2015, 46(11): 2087-2100.
- [12] LI Y, WEI H L, STEPHEN B. Identification of time-varying systems using multi-wavelet basis functions [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2011, 19(3): 656-663.
- [13] LI Y, WEI H L, STEPHEN B. Identification of nonlinear time-varying systems using an online sliding-window and common model structure selection CMSS approach with applications to EEG [J]. *International Journal of Systems Science*, 2016, 47(11): 2671-2681.



第一作者简介: 陈腾飞, 男, 1992年10月生, 博士生。主要研究方向为时变非线性动力学系统参数辨识。曾发表《New parameter-identification method based on QR decomposition for nonlinear time-varying systems》(《*Journal of Engineering Mechanics*》2019, Vol. 145, No. 1)等论文。

E-mail: 1985842771@qq.com