Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis

DOI:10.16450/j. cnki. issn. 1004-6801. 2020. 05. 019

# 基于 VMD 和广义 Morse 小波的结构瞬时频率识别

(1. 湖北工业大学土木建筑与环境学院 武汉,430034) (2. 武汉理工大学土木工程与建筑学院 武汉,430070)

**摘要** 提出了基于变分模态分解和广义 Morse 小波相结合的时变结构瞬时频率识别方法。首先,针对噪音干扰问题,提出了快速阈值迭代算法,通过将信号转换到小波域,利用信号稀疏特性进行降噪;然后,提出了基于变分模态 分解和广义 Morse 小波的时变参数识别理论,采用数值算例验证了提出方法的有效性和精度;最后,设计了一个具 有时变特性的移动小车试验,进行模态试验对结构有限元模型进行校正。采集小车通过主梁时的应变和加速度响 应,由应变数据估算小车不同时刻在梁上的位置,对加速度响应数据进行分析识别结构的瞬时频率,与有限元计算 的结果进行对比分析。结果表明,提出的方法可以有效准确地识别时变结构瞬时频率。

关键词 时变结构;瞬时频率;小波变换;广义 Morse 小波;快速阈值迭代;变分模态分解 中图分类号 TH70; TU317.1; U446.3

# 引 言

对于土木工程结构损伤诊断、健康监测与安全 评估来说,模态参数识别是一个非常重要的研究课 题。最近几十年,各国学者提出了许多模态参数识 别技术,如频域分解法、时域分解法、随机子空间识 别、基于响应传递比的参数识别法[1]和基于贝叶斯 理论的模态参数识别法<sup>[2]</sup>等。这些参数识别方法都 是针对时不变系统。然而,实际土木工程结构在运 营过程中由于环境或者荷载变化可能导致结构发生 时变,如不同时刻构件不均匀温度变换会引起结构 模态频率随时间改变;桥上车辆荷载的变化引起结 构拉索索力的变化,导致拉索刚度时变;车辆过桥时 由于车辆位置不断改变引起车桥系统质量时变。因 此许多学者提出了时变参数识别方法进行系统识 别,如状态空间小波识别法<sup>[3]</sup>、S变换法<sup>[4]</sup>、HHT (Hilbert-Huang transform, 简称 HHT)法<sup>[5]</sup>、自适 应稀疏时频分析法<sup>[6]</sup>、同步挤压小波变换法<sup>[7]</sup>和解 析模态分解法(analytical modal decomposition 简 称 AMD)<sup>[8]</sup> 等。

变分模态分解(variational mode decomposition,简称 VMD)是最近提出的一种新的信号自适 应分解方法<sup>[9]</sup>,与 HHT 类似,它可以将非平稳的时 变信号自适应的分解成多个具有有限带宽的模态分 量信号之和,但是它没有 HHT 分解时遇到的模态 混叠问题。由 VMD 分解得到模态分量需再采取合 适方法提取信号的瞬时频率。HHT 是采用 Hilbert 变换的方法进行分析得到 Hilbert 谱,但是它 会产生负频率和端点效应问题。利用小波变换技术 也可以提取信号瞬时频率,通常采用的复 Morlet 小 波并不是完全解析的,当中心频率较小时可能产生 负频率泄露,导致时频分析结果产生偏差。

因此,笔者采用 VMD 和广义 Morse 小波(generalized Morse wavelets,简称 GMW)相结合的技术 来识别时变结构瞬时频率。首先,利用信号在小波 时频域具有稀疏性的特性,引入快速阈值迭代技术 对信号进行去噪处理;然后,采用 VMD 将去噪信号 分解为多个模态分量;最后,采用 GMW 对每个模 态分量进行时频分析提取对应的瞬时频率。通过数 值算例和一个移动小车试验验证了提出的方法。

## 1 快速阈值迭代降噪

现场实测信号通常会受到噪声污染,这里引入 快速阈值迭代算法(fast iterative shrinkage-thresholding algorithm,简称 FISTA)进行降噪。含噪信 号通过小波变换可以转化到时间-尺度域,噪声能量 将分布到非常广泛的时间-尺度空间,而有效信号能 量将集中在一个局部的时间-尺度域空间,具有稀疏

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(51408250,51708188);湖北工业大学博士科研启动基金资助项目(BSQD14043) 收稿日期:2019-03-14;修回日期:2019-05-20

特性,因此,通过最优稀疏性可以实现将噪声和信号 尽量分离。假设实测的含噪信号 y 表示为

 $y = x + n = I_w(C) + n$  (1) 其中: x 为真实无噪信号; C 为 x 小波变换系数矩阵;  $I_w(\cdot)$  为小波逆变换; n 为噪音。

由于实际真实信号 x 是未知的,可以将信号转 换到时间-尺度域利用稀疏性求取它的近似解  $\tilde{x} = I_w(\tilde{C})$ (上标~表示近似解),要求:①  $\tilde{C}$ 具有最大的 稀疏性;②误差  $x - \tilde{x}_2$  最小。

稀疏性对应于 *l*<sub>0</sub> 范数最小化问题,对于非凸复 杂性优化问题,可以采用 *l*<sub>1</sub> 范数来替代求解<sup>[10]</sup>,因 此,上述问题可以转换为求解优化问题

 $\widetilde{\boldsymbol{C}} = \arg \min \|\boldsymbol{C}\|_1 \quad \text{s. t. } \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{C})\|_2 \leqslant \varepsilon (2)$ 其中: s. t. 为约束条件;  $\varepsilon$  为小量。

式(2)有约束优化问题可以通过施加拉格朗日 乘子正则化方法转变为无约束优化问题来求解<sup>[11]</sup>

$$\widetilde{C}_{\lambda} = \arg \min \frac{1}{2} \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{I}_{W}(\boldsymbol{C}) \|_{2}^{2} + \lambda \| \boldsymbol{C} \|_{1} \quad (3)$$

其中:λ 为拉格朗日乘子。

这里采用 Beck 等<sup>[12]</sup>提出的快速阈值迭代算法 (IST)通过下式快速迭代求解式(3)的解

$$\begin{cases} \boldsymbol{C}^{0} = \boldsymbol{C}^{1} = \boldsymbol{W}_{T}(\boldsymbol{y}) \\ \tilde{\boldsymbol{C}}^{k} = \boldsymbol{C}^{k} + \frac{t_{k} - 1}{t_{k+1}} (\boldsymbol{C}^{k} - \boldsymbol{C}^{k-1}) \\ \boldsymbol{C}^{k+1} = T_{\lambda} [\tilde{\boldsymbol{C}}^{k} + \boldsymbol{W}_{T}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{I}_{W}(\tilde{\boldsymbol{C}}^{k}))] \end{cases}$$
(4)

其中: $W_{\tau}(\cdot)$ 为小波变换; $T_{\lambda}(\cdot)$ 为软阈值函数;k为迭代数;t为迭代参数。

$$T_{\lambda}(c) = \begin{cases} c - \lambda \frac{c}{|c|} & (|c| \ge \lambda) \\ 0 & (|c| < \lambda) \end{cases}$$
(5)

其中:c为小波系数矩阵C中的小波系数。

为了提高收敛效率,λ按指数衰减变化取值

$$\lambda_{k} = \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)^{(k-1)/(N-1)} \cdot \lambda_{\max} \quad (k = 1, 2, \cdots, N)$$
(7)

其中: N 为迭代求解次数;  $\lambda_{max} = 0.99 \max |C^{\circ}|$ ;  $\lambda_{min} = \max |C^{\circ}|/q$ , q 为系数 $C^{\circ}$ 的数量。

通过上述算法对响应数据进行分析,可以有效 降低噪音干扰。

## 2 变分模态分解

VMD 是一种新的信号自适应分解技术,将实

信号分解为具有最优特定稀疏特性的多个分量信号 (模态)之和。这里的稀疏特性采用分解信号的频谱 带宽来衡量,VMD要求分解的每个模态分量具有 围绕各自中心频率最紧的带宽。

为了估计每个模态分量的带宽,VMD利用希 尔伯特变换计算各模态对应的解析信号,得到其单 边频谱,然后通过频率平移将每个模态频谱平移到 各自估计的中心频率位置,最后计算频移后信号梯 度范数的平方来估计各模态分量的带宽。这样最优 模态分解转化为如下有约束的变分优化问题来 实现<sup>[13]</sup>

$$\min_{\{s_i\}, \{\omega_i\}} \left\{ \sum_{i} \left\| \partial_t \left[ (\delta(t) + \frac{j}{\pi t}) * s_i(t) \right] e^{-j\omega_i t} \right\|_2^2 \right\}$$
  
s. t.  $f = \sum_i s_i$  (8)

其中:  $\{s_i\}$  和  $\{\omega_i\}$  分别为分解的模态分量和对应 的中心频率;  $\delta(t)$  为狄拉克函数; \* 为卷积; f 为 分解的信号。

通过引入二次罚函数项和拉格朗日乘子ζ来处 理上式的重构约束条件,拉格朗日乘子ζ用来施加 严格的约束条件,而二次罚函数项可以提高收敛性 能,将式(8)的约束优化问题转变为式(9)无约束的 函数优化问题

$$\mathcal{L}(\{s_i\},\{\omega_i\},\zeta) = \alpha \sum_i \left\| \partial_t \left[ (\delta(t) + \frac{j}{\pi t}) * s_i(t) \right] e^{-j\omega_i t} \right\|_2^2 + \left\| f(t) - \sum_i s_i(t) \right\|_2^2 + \langle \zeta(t), f(t) - \sum_i s_i(t) \rangle$$
(9)

其中:α为带宽约束参数。

α 增加可能导致分解的模态分量带宽减小,中 心频率误差估计增大; α 减小可能导致分解的模态 带宽增加,包含更多的噪音成分。α 建议取值区间为 100~10 000,文中取 2 000。

通过交替方向乘子法 (alternating direction method of multipliers,简称 ADMM)可迭代求取原 变分优化问题的解。步骤如下:

1) 初始化  $\{\hat{s}_{i}^{1}\}, \{\omega_{i}^{1}\}, \hat{\zeta}^{1}, n, \hat{\zeta}^{n}, m, \hat{\zeta}^{n}, m, \hat{\zeta}^{n}, \hat{\zeta}^{n}, m, \hat{\zeta}^{n}, \hat{\zeta}^{n}, m, \hat{\zeta}^{n}, \hat{\zeta}^{n}, m, \hat{\zeta}^{n}, \hat{\zeta}^{n},$ 

2) 按式(10)进行迭代求解 s<sub>i</sub><sup>n+1</sup>

$$\begin{cases} \hat{s}_i^{n+1}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega) - \sum_{j \le i} \hat{s}_i^{n+1}(\omega) - \sum_{j \ge i} \hat{s}_i^n(\omega) + \frac{\hat{\zeta}^n(\omega)}{2}}{1 + 2\alpha(\omega - \omega_i^n)^2} \\ s_i^{n+1} = R(\mathcal{F}^{-1}(\hat{s}_i^{n+1}(\omega))) \end{cases}$$

(10)

其中: デ1(•) 表示傅里叶逆变换。

958

3) 按式(11)进行迭代求解 ω<sub>i</sub><sup>n+1</sup>

$$\omega_i^{n+1} = \frac{\int_0^\infty \omega \left| \hat{s}_i^{n+1}(\omega) \right|^2 \mathrm{d}\omega}{\int_0^\infty \left| \hat{s}_i^{n+1}(\omega) \right|^2 \mathrm{d}\omega}$$
(11)

4) 按式(12)进行迭代更新

$$\hat{\boldsymbol{\zeta}}^{n+1}(\boldsymbol{\omega}) = \hat{\boldsymbol{\zeta}}^{n}(\boldsymbol{\omega}) + \tau(\hat{f}(\boldsymbol{\omega}) - \sum_{i} \hat{\boldsymbol{s}}_{i}^{n+1}(\boldsymbol{\omega}))$$
(12)

其中: $\tau \in (0, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ 为迭代步长。

循环迭代步骤 2~4 直到满足收敛条件

$$\sum_{i} \|\hat{s}_{i}^{n+1} - \hat{s}_{i}^{n}\|_{2}^{2} / \|\hat{s}_{i}^{n}\|_{2}^{2} < \zeta$$
(13)

其中: ζ为迭代收敛容差,文中取 1e<sup>-7</sup>。

## 3 广义 Morse 小波瞬时频率识别

对于 N 自由度的时变结构系统,其振动响应 z(t)可分解为 N 阶振型模态响应的叠加和

$$z(t) = \sum_{m=1}^{N} z_m(t)$$
 (14)

其中: $z_m(t)$ 为第 m 阶振型模态响应。

每阶模态响应可表示为时变幅值 $A_m(t)$ 和相位  $\varphi_m(t)$ 的乘积

$$x_m(t) = A_m(t) e^{i\varphi_m(t)}$$
(15)

通过 VMD 对结构响应信号 z(t)进行分析,可 以将结构不同阶振型模态分离成各模态分量,然后 分别对各模态分量采用连续小波变换进行时频分 析,提取对应的小波脊线,由小波尺度与信号的频率 关系可以得到结构的瞬时频率<sup>[7]</sup>。

连续小波时频分析通常采用复 Morlet 小波,然 而,复 Morlet 小波只是当中心频率较大时近似解 析,当中心频率较小时可能产生负频率泄露,导致分 析结果产生一定偏差。文中引入 GMW<sup>[13]</sup>进行时 频分析,该小波是完全解析的,不存在负频率泄露 问题。GMW 频域定义为

 $\Psi_{\beta,\gamma}(\omega) = H(\omega)2(e\gamma/\beta)^{\beta/\gamma})\omega^{\beta}e^{-\omega\gamma}$  (16) 其中:  $H(\omega)$  为阶跃函数;  $\beta$  和 γ 为控制小波时域和 频域衰减的参数。

当 $\gamma = 3$ 时,GMW 接近高斯函数,具有很好的时频分辨率。文中采用的GMW 参数为 $\gamma = 3$ 和 $\beta = 27$ ,对应的时域和频域波形如图 1 所示(示意图,幅值无量纲)。

## 4 数值算例

为验证提出的算法,首先采用如下具有不同时



图 1 GMW 时域和频域波形



#### 变频率成分组合成的振动信号进行数值验证

	$(x_1 = \sin(2\pi \cdot 3t))$	(0	$\leqslant$	$t \leqslant$	18)
	$x_2 = \sin(2\pi \cdot 7t)$	(0	$\leq$	$t \leqslant$	9)
$\prec$	$x_2 = \sin(2\pi \cdot 5t)$	(9	<	$t \leqslant$	18)
	$x_3 = 1.5 \cos[2\pi \cdot 12t - 0.1\pi t^2]$	(0	$\leqslant$	$t \leqslant$	18)
	$x = x_1 + x_2 + x_3$	(0	$\leq$	$t \leqslant$	18)

(17)

信号采样频率为100 Hz,并添加10%的高斯白噪声。这里噪声强度10%定义为噪声的2-范数与 信号的2-范数之比。

首先,利用 FISTA 对含噪信号进行降噪处理, 降噪前后信号的时频分布图(又称小波量图,尺度坐 标为指数坐标,无量纲)如图 2 所示。



图中颜色亮度表示小波系数幅值大小,越亮表 示越大,对应能量就越大。可以看出,信号成分在小 波域分布具有稀疏性,比较集中,能量较大,而噪声 分布较广,通过 FISTA 处理后噪声明显减少。

随后,采用 VMD 对降噪后的信号进行分析,分 解得到如图 3 所示的 4 个模态分量,原信号各成分



- 图 3 VMD 分解的各模态分量(黑线)和对应的原信号 x<sub>i</sub> (蓝线)
- Fig. 3 The decomposed mode components by VMD (dark line) and corresponding signal  $x_i$  (blue line)

从图可以看出,VMD 将原信号不同成分完好的分解开来,其中第 2 个成分 x<sub>2</sub> 具有突变特性, VMD 将其突变前后分解成两个部分,分解的各部 分与原信号对应各成分吻合的非常好。

采用 GMW 对 VMD 分解的各模态分量进行连续小波分析提取对应的小波脊线,识别其时变频率。 另外,也采用 HHT 的方法的识别结果用于对比,原 信号的瞬时频率的理论值用来验证识别结果的准确 性,分析结果如图 4 所示。



图 4 信号各成分时变频率识别结果

Fig. 4 The identified time-varying frequency of each component

由图 4 可知, HHT 方法识别的 3 个信号成分

瞬时频率受噪音干扰波动较大,对于信号突变成分 突变时刻存在一定的偏差,而且 HHT 方法的端点 效应影响很大。提出的方法 3 个信号成分瞬时频率 识别结果与理论值吻合的很好,只在端部由于小波 端点效应稍有偏离,但是远小于 HHT 的影响。

## 5 移动荷载试验

#### 5.1 试验模型

为进一步验证提出的方法,设计了一个移动小 车试验,采用马达牵引小车通过一个简支钢板梁来 模拟移动荷载作用下的结构时变特性。板梁尺寸为 1000 mm×150 mm×9 mm,质量为10.555 kg,采 用圆钢杆支撑模拟的简支支撑。为避免小车进入和 离开主梁时产生大的振动与冲击,在板梁首尾分别 连接了一段过渡的引梁和尾梁,但它们与主梁断开。 小车设有两轴,轴距为0.117 m,质量为2.308 kg, 小车内通过砝码调整重量,本试验时小车总重为 5.296 kg。主梁上设置了一根与主梁中线平行的穿 过小车的的钢丝,使小车能沿板梁中线移动。试验 模型如图5 所示。



在梁底板起点和终点,1/4,1/2,3/4 跨处布设 了应变片,在节点3,5,7,9 处(见图6)布设了加速 度计,测点布置如图6所示。



### 5.2 模态试验

首先进行模态试验。在节点4处用力锤锤击主 梁,采集结构的加速度响应,采样频率为1000 Hz。 进行模态分析并对结构的有限元模型进行校正。随 后将小车当做移动质量块,利用校正后的有限元模型计算小车重心通过不同节点位置时结构的第1阶 模态频率,结果如表1所示。

#### 表1 小车重心通过不同节点时结构第1阶频率(FEA)

 Tab. 1
 The first frequency of structure when the vehicle cross different node (FEA)

小车位置	1 <sup>st</sup> 频率/Hz	小车位置	1 <sup>st</sup> 频率/Hz
节点1	22.858	节点 7	16.753
节点 2	21.890	节点 8	17.854
节点 3	20.087	节点 9	19.677
节点 4	18.251	节点 10	21.648
节点 5	16.986	节点 11	22.802
节点 6	16.470		

## 5.3 移动小车试验

通过马达牵引小车匀速通过试验梁,小车移动 时导致主梁上质量分布发生改变,引起结构的时 变。采集响应的应变和加速度响应,采样频率为 200 Hz。节点1和11 处测得的应变响应如图7 所示。







通过首尾节点应变测点响应、主梁长度、小车轴 距可以计算小车通过主梁时速度。应变峰值对应小 车前后轮正好经过测点位置,由图 7 测得前轮通过 节点1的时刻为4.925 s,后轮通过节点11的时刻 为7.895 s。由此估算得到小车速度为0.376 m/s。

采用提出的方法对节点9处加速度测点测得的 响应进行分析识别结构的第一阶瞬时频率。为进行 比较,也分别采用 HHT 和复 Morlet 连续小波变换 方法(continuous wavelet transform,简称 CWT)进 行时变频率识别,结果如图 8 所示。

从识别的结果可以看出,采用提出了 VMD 和





Fig. 8 Identified instantaneous frequency by sensor at node 9

GMW 方法识别的结果比较光滑,性能较好,通常的 CWT 识别结构波动稍大,主要存在不同模态间干 扰和噪音干扰,HHT 识别结果最差,端点效应影响 很大。

采用 GMW 方法提取小波脊线时,对识别精度 的影响主要是信号小波脊线对应的各阶成分是否被 充分激起,另外信号各阶成分频率间距太小,间距过 密可能会造成能量的相互干扰。

随后对所有测点(节点 3,5,7,9)测得的加速度 响应进行分析,首先用 FISTA 算法进行降噪,然后 采用 VMD 和 GMW 相结合的方法识别结构的第 1 阶瞬时频率。由应变估计的小车移动速度和通过主 梁的起止时间,可以推导出小车在不同时刻在主梁上 的位置。结合表 1 中有限元计算的结果,可以得到小 车通过主梁不同时刻的第 1 阶瞬时频率有限元计算 结果,与提出的方法进行对比分析,如图 9 所示。



图 9 所有测点识别的结构瞬时频率



由图可见,所有测点数据的识别结果与有限元 计算结果吻合的较好,主要在两端位置稍有偏差,分 析偏差的原因:a. 尾梁跟主梁连接位置还是存在一 定冲击振动干扰;b. 小波端点效应有一定影响。另 外,所有测点识别结果相差很小,表明提出的方法可 以有效识别结构时变参数。

# 6 结束语

土木工程结构在运营过程中通常表现出时变特性,笔者提出了基于 VMD 和 GMW 的方法识别时 变结构瞬时频率。对于实测信号的噪声污染问题, 提出采用快速阈值迭代算法(FISTA)进行降噪处 理。数值模拟结果表明,提出的 FISTA 算法通过将 信号转换到小波域利用信号稀疏特性可以较好地对 信号进行降噪,VMD 和 GMW 法可以有效准确地 识别时变结构瞬时频率。移动小车试验进一步验证 了方法的有效性和精度,提出的方法比 HHT 和 CWT 具有更好的效果。

#### 参考文献

- [1] YAN W J, ZHAO M Y, SUN Q, et al. Transmissibility-based system identification for structural health Monitoring: Fundamentals, approaches, and applications [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019,117:453-482.
- [2] AU S K, ZHANG F L. Fundamental two-stage formulation for Bayesian system identification [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, PartI: Generaltheory, 2016, 66: 31-42.
- [3] 许鑫,史治宇.用于时变系统参数识别的状态空间小 波方法[J].工程力学,2011,28(3):23-28.
  XU Xin, SHI Zhiyu. Parameter identification for time-varying system using state space and wavelet method
  [J]. Engineering Mechanics, 2011,28(3):23-28. (in Chinese)
- [4] WANG L, MENG X F. An adaptive generalized Stransform for instantaneous frequency estimation [J].
   Signal Processing, 2011, 91:1879-1886.
- [5] 熊飞,程远胜,刘均. 基于 HHT 方法的时变多自由度 系统的损伤识别[J]. 振动、测试与诊断,2008,28(2): 122-125.

XIONG Fei, CHENG Yuansheng, LIU Jun. Damage identification of time varying multi-degrees of freedom systems based on hilbert-huang transform [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2008, 28 (2):122-125. (in Chinese)

[6] BAO Y Q, SHI Z Q, JAMES L B. Identification of time-varying cable tension forces based on adaptive sparse time-frequency analysis of cable vibrations [J]. Structural Control and Health Monitoring, 2017,24:1-17.

[7] 王超,朱宏平,艾德米.基于同步挤压小波变换的结构 时变参数识别[J].华中科技大学学报(自然科学版), 2017,45(11):46-50.

WANG Chao, ZHU Hongping, AI Demi. Structural time-varying parameter identification based on synchrosqueezed wavelet transform [J]. Journal of Huazhong University of Science & Technology (Natural Science Edition), 2017,45(11):46-50. (in Chinese)

[8] 李晶,曹登庆,刘绍奎,等.基于解析模态分解和希尔伯 特变换的模态参数辨识新方法[J].振动与冲击,2016, 35(1):34-39.

LI Jing, CAO Dengqing, LIU Shaokui, et al. A new method for modal parameter identification based on analytical modal decomposition and Hilbert transformation [J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35 (1):34-39. (in Chinese)

- [9] KONSTANTIN D, DOMINIQUE Z. Variational mode decomposition [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014,62(3):531-544.
- [10] DONOHO D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [11] ELAD M, STARCK J L, QUERRE P, et al. Simultaneous cartoon and texture image inpainting using morphological component analysis (MCA) [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2005, 19 (3):340-358.
- BECK A, TEBOULLE M. A fast iterative shrinkagethresholding algorithm for linear inverse problems
   [J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2009,2(1): 183-202.
- [13] LILLY J M, OLHEDE S C. Generalized morse wavelets as a superfamily of analytic wavelets [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60 (11): 6036-6041.



**第一作者简介:**王超,男,1979 年 7 月 生,博士、副教授。主要研究方向为结构 健康监测,桥梁损伤诊断与安全评估。 曾发表《A wavelet transform and substructure algorithm for tracking the abrupt stiffness degradation of shear structure》(《Advances in Structural Engineering》2019, Vol. 22, No. 5)等论文。 E-mail: wangc800@126.com