

# 考虑参数区间不确定性的子结构模态综合法<sup>\*</sup>

王 陶<sup>1</sup>, 史晓强<sup>2</sup>, 陈卫敏<sup>1</sup>, 何 欢<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室 南京, 210016)

(2. 内蒙古北方重工业集团有限公司 包头, 014030)

**摘要** 为提高大型复杂结构不确定性分析的计算效率,提出了一种考虑参数区间不确定性的改进自由界面子结构模态综合法。首先,根据系统特点将其划分为若干子结构,采用摄动法对含有区间不确定性参数的子结构进行分析,为减小模态截断误差,考虑剩余柔度的影响,通过构造 1 组与低阶模态加权正交的等效高阶模态集,避免了直接对系统刚度矩阵进行求逆的计算过程,解决了含有刚体位移时的子结构剩余柔度矩阵的求解问题;其次,根据界面连续性条件,得到考虑参数区间不确定性的系统模态综合方程;最后,分别采用本研究所提出的方法以及 Monte Carlo 法对某钢架桥模型进行了不确定性分析。计算结果表明,本研究方法在保证计算精度的同时可以有效提高模型计算效率。

**关键词** 不确定性; 自由界面; 子结构模态综合法; 摄动法; Monte Carlo 法

**中图分类号** TB123; TU311.3; TH113.1

## 引 言

近几十年来,有限单元法已经广泛应用于确定性结构的动力学分析中,但在结构实际设计加工过程中,不可避免地会引入一些不确定性因素,例如试件加工过程中引入的几何尺寸误差,或者不同批次同一材料的分散性等,导致传统的确定性模型对结构动力学特性进行的分析和预测通常难以获得理想的效果。因此,引入不确定性因素开展动力学建模和分析是解决这一问题的有效方法。随着工程结构逐渐趋于大型化和复杂化,采用有限单元法进行建模往往会离散出几十万甚至上百万规模的自由度数目,直接对这样大规模的模型进行不确定性分析,需要消耗极大的计算成本。如何提高大型复杂结构的不确定性分析效率是当前结构动力学领域亟待解决的热点问题。

子结构模态综合法是一种有效的减缩模型的方法。随着各种复杂结构动力学问题的出现,子结构模态综合法也从早期只针对线性系统的理论体系<sup>[1-3]</sup>,逐渐在大型复杂结构动力学优化<sup>[4]</sup>、一般黏性阻尼结构振动分析<sup>[5-6]</sup>及局部非线性结构动力学分析<sup>[7-8]</sup>等方面表现出很好的应用前景。子结构模态综合法的基本思路是将结构划分为若干子结构,通过对子结构

分别进行模态减缩后,再根据界面协调条件组装成降阶后的综合模型。由于各个子结构之间是相对独立的,因此通常对涉及不确定性因素的子结构分别进行分析,而对其余一些确定性子结构采用传统方法进行分析,最后通过模态综合将子系统的不确定参数的影响传递至综合方程中,这样可以显著降低大型复杂结构的不确定性分析规模,提高分析效率。Gersem 等<sup>[9]</sup>采用区间与模糊有限元法对含有不确定性参数的结构进行了特征值及频响分析,并通过子结构模态综合法对不确定性模型进行了模型减缩。Giannini 等<sup>[10]</sup>基于子结构模态综合法提出了一种针对模糊参数模型的不确定性分析方法。Hinke 等<sup>[11]</sup>给出了基于 Craig-Bampton 法的结构不确定性分析框架,对不同类型的不确定性问题进行了分析,计算结果显示,利用子结构模态综合法分析不确定性问题具有很好的效果。Tran 等<sup>[12]</sup>提出了一种基于 Ritz 基的子结构模态综合方法,并通过其对具有随机阻尼特性系统的鲁棒性进行了分析。

以上的研究多为通过固定界面模态综合法来提高模型不确定性分析的效率,然而在实际操作中,有时需要通过实测响应反演子结构不确定参数的区间范围,再通过综合将不确定性传递到总体系统中,从而完成对整体结构不确定性的定量分析。一般而

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(11602105);江苏省自然科学基金资助项目(BK20160782);中央高校基本科研业务费专项基金资助项目(NJ2018015);江苏高校优势学科建设工程资助项目  
收稿日期:2018-09-20;修回日期:2019-10-30

言,试验中固定界面的边界条件实现起来较为困难,这很大程度上限制了固定界面模态综合法在复杂结构系统不确定性分析中的应用。针对上述问题,笔者提出采用改进的自由界面子结构模态综合法对具有参数区间不确定性的问题进行分析。

## 1 考虑参数区间不确定性的子结构摄动方程

$n$  自由度无阻尼动力学系统的运动方程通常可以表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  分别为结构的质量矩阵和刚度矩阵;  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$  分别为广义位移向量和载荷向量;  $\mathbf{R}$  为实数集。

通过特征值分析,可以得到系统前  $l$  阶模态  $\Phi^l \in \mathbf{R}^{n \times l}$ 。

### 1.1 子结构摄动分析

假设某参数向量  $\mathbf{a} = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_r\}^T$  的区间范围  $\mathbf{a}^l = \mathbf{a}^c + \Delta \mathbf{a} e_\Delta$ , 其中:  $\mathbf{a}^c = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}})$ ;  $\Delta \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}})$ ;  $e_\Delta \in [-1, 1]$ ;  $\bar{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}}$  为参数的上、下界。

可以将区间参数向量写成

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^c + \delta \mathbf{a} \quad (|\delta \mathbf{a}| \leq \Delta \mathbf{a}) \quad (2)$$

根据摄动法,当结构参数发生小范围变化后,子结构的质量矩阵、刚度矩阵及模态 1 阶摄动表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \mathbf{M}^c + \delta \mathbf{M} \\ \mathbf{K} = \mathbf{K}^c + \delta \mathbf{K} \\ \lambda_i = \lambda_i^c + \delta \lambda_i \\ \Phi_i = \Phi_i^c + \delta \Phi_i \end{cases} \quad (3)$$

### 1.2 加权正交向量集的构造

假设存在矩阵  $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^{l \times (n-l)}$  和  $\tilde{\Phi} \in \mathbf{R}^{n \times (n-l)}$ , 使得

$$\Phi = \Phi^l \mathbf{w} + \tilde{\Phi} \quad (4)$$

且  $\Phi \in \mathbf{R}^{n \times (n-l)}$  可以满足式(5)

$$\Phi^{lT} \mathbf{M} \Phi = \mathbf{0} \quad (5)$$

给定线性无关的  $n-l$  个向量  $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \dots, \tilde{\Phi}_{(n-l)}$ ,

且令

$$\tilde{\Phi} = [\tilde{\Phi}_1 \ \tilde{\Phi}_2 \ \dots \ \tilde{\Phi}_{(n-l)}] \quad (6)$$

将式(4)代入式(5)可得

$$\Phi^{lT} \mathbf{M} (\Phi^l \mathbf{w} + \tilde{\Phi}) = \mathbf{0} \quad (7)$$

化简得

$$\mathbf{w} = -(\Phi^{lT} \mathbf{M} \Phi^l)^{-1} \Phi^{lT} \mathbf{M} \tilde{\Phi} \quad (8)$$

将式(8)代入式(4)可得

$$\Phi = \tilde{\Phi} - \Phi^l (\Phi^{lT} \mathbf{M} \Phi^l)^{-1} \Phi^{lT} \mathbf{M} \tilde{\Phi} \quad (9)$$

如果将  $\Phi^l$  按质量矩阵  $\mathbf{M}$  进行归一化处理,可以简化为

$$\Phi = (\mathbf{I} - \Phi^l \Phi^{lT} \mathbf{M}) \tilde{\Phi} \quad (10)$$

将式(3)代入式(10)并忽略 2 阶及以上小量,可以得到

$$\Phi = (\mathbf{I} - \Phi^l \Phi^{lcT} \mathbf{M}^c) \tilde{\Phi} - (\Phi^l \Phi^{lcT} \delta \mathbf{M} + \Phi^{lc} \delta \Phi^{lcT} \mathbf{M}^c + \delta \Phi^{lc} \Phi^{lcT} \mathbf{M}^c) \tilde{\Phi} = \Phi^c + \delta \Phi \quad (11)$$

容易证明:  $\Phi^{lT} \mathbf{K} \Phi = \mathbf{0}$ 。由此便构造了与系统矩阵都加权正交的等效高阶模态集  $\Phi$ 。

### 1.3 剩余柔度矩阵与界面协调方程

定义  $\Phi = [\Phi^l \ \Phi] = [\Phi^{lc} + \delta \Phi^l \ \Phi^c + \delta \Phi]$ , 子结构的位移向量可以表示为

$$\mathbf{u} = \Phi \beta \quad (12)$$

且

$$\beta = \begin{Bmatrix} \beta_l \\ \beta_h \end{Bmatrix} \quad (13)$$

其中:  $\beta_l$  为所要保留的低阶模态坐标;  $\beta_h$  为被消除的高阶模态坐标。

式(12)可以改写为

$$\mathbf{u} = [\Phi^l \ \Phi] \begin{Bmatrix} \beta_l \\ \beta_h \end{Bmatrix} \quad (14)$$

将式(14)代入式(1),考虑等效高阶模态与保留的低阶模态关于系统矩阵的加权正交关系,且左乘  $\Phi^T$  可得

$$\begin{bmatrix} \Phi^{lT} \mathbf{M} \Phi^l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi^T \mathbf{M} \Phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_l \\ \beta_h \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi^{lT} \mathbf{K} \Phi^l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi^T \mathbf{K} \Phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_l \\ \beta_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi^{lT} \mathbf{f} \\ \Phi^T \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

令

$$\mathbf{M}_h = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad (16)$$

$$\mathbf{K}_h = \Phi^T \mathbf{K} \Phi \quad (17)$$

将式(15)进行展开,其第 2 部分为

$$\mathbf{M}_h \ddot{\beta}_h + \mathbf{K}_h \beta_h = \Phi^T \mathbf{f} \quad (18)$$

对式(18)进行 Laplace 变换,可以得到

$$\bar{\beta}_h = (s^2 \mathbf{M}_h + \mathbf{K}_h)^{-1} \Phi^T \bar{\mathbf{f}} \quad (19)$$

将式(19)进行泰勒展开,保留第 1 项,然后再进行 Laplace 逆变换,有

$$\beta_h = \mathbf{K}_h^{-1} \Phi^T \mathbf{f} \quad (20)$$

将式(20)代入式(14)中,展开后可以得到

$$\mathbf{u} = \Phi^l \beta_l + \mathbf{G} \mathbf{f} \quad (21)$$

其中

$$\mathbf{G} = \Phi \mathbf{K}_h^{-1} \Phi^T \quad (22)$$

其中:  $\mathbf{G} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 为剩余柔度矩阵。

当子结构包含刚体位移时,刚体模态通常会包

含在保留的低阶模态中;而  $\boldsymbol{\varphi}$  为构造出来的等效高阶模态,其中并未包含刚体模态,所以式(17)中的  $\mathbf{K}_h = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}$  仅与高阶模态有关,为可逆矩阵。因此,通过式(22)可以求解存在刚体位移时的子结构剩余柔度矩阵。

将式(11)代入式(17),展开后可以得到  $\mathbf{K}_h$  的摄动表达式,再通过其逆矩阵的1阶近似展开可得

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_h)^{-1} &= [(\boldsymbol{\varphi}^T + \delta\boldsymbol{\varphi}^T)(\mathbf{K}^c + \delta\mathbf{K})(\boldsymbol{\varphi}^c + \delta\boldsymbol{\varphi})]^{-1} = \\ &= (\boldsymbol{\varphi}^{cT} \mathbf{K}^c \boldsymbol{\varphi}^c)^{-1} - [(\boldsymbol{\varphi}^{cT} \mathbf{K}^c \boldsymbol{\varphi}^c)^{-1} \delta\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K}^c \boldsymbol{\varphi}^c + \\ &= (\boldsymbol{\varphi}^{cT} \mathbf{K}^c \boldsymbol{\varphi}^c)^{-1} \boldsymbol{\varphi}^{cT} \delta\mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}^c + (\boldsymbol{\varphi}^{cT} \mathbf{K}^c \boldsymbol{\varphi}^c)^{-1} \boldsymbol{\varphi}^{cT} \mathbf{K}^c \delta\boldsymbol{\varphi}] \cdot \\ &= (\boldsymbol{\varphi}^{cT} \mathbf{K}^c \boldsymbol{\varphi}^c)^{-1} = (\mathbf{K}_h^c)^{-1} + \delta(\mathbf{K}_h)^{-1} \end{aligned} \quad (23)$$

同理可以得到剩余柔度矩阵的摄动表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \boldsymbol{\varphi}^c (\mathbf{K}_h^c)^{-1} \boldsymbol{\varphi}^{cT} + \delta\boldsymbol{\varphi}^c (\mathbf{K}_h^c)^{-1} \boldsymbol{\varphi}^{cT} - \\ &= \boldsymbol{\varphi}^c \delta(\mathbf{K}_h)^{-1} \boldsymbol{\varphi}^{cT} + \boldsymbol{\varphi}^c (\mathbf{K}_h^c)^{-1} \delta\boldsymbol{\varphi}^T = \mathbf{G}^c + \delta\mathbf{G} \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$\mathbf{G}^c = \boldsymbol{\varphi}^c (\mathbf{K}_h^c)^{-1} \boldsymbol{\varphi}^{cT} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{G} &= \delta\boldsymbol{\varphi}^c (\mathbf{K}_h^c)^{-1} \boldsymbol{\varphi}^{cT} - \boldsymbol{\varphi}^c \delta(\mathbf{K}_h)^{-1} \boldsymbol{\varphi}^{cT} + \\ &= \boldsymbol{\varphi}^c (\mathbf{K}_h^c)^{-1} \delta\boldsymbol{\varphi}^T \end{aligned} \quad (26)$$

将广义物理坐标分为内部坐标与界面坐标,则式(12)可以写为

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_i^c + \delta\boldsymbol{\Phi}_i^l \\ \boldsymbol{\Phi}_j^c + \delta\boldsymbol{\Phi}_j^l \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_l + \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_i^c + \delta\mathbf{G}_i & \mathbf{G}_{ij}^c + \delta\mathbf{G}_{ij} \\ \mathbf{G}_{ji}^c + \delta\mathbf{G}_{ji} & \mathbf{G}_j^c + \delta\mathbf{G}_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

其中:  $\mathbf{u}_j$  为子结构界面自由度所对应的位移;  $\mathbf{u}_i$  为子结构内部自由度所对应的位移;  $\mathbf{f}_i$  为结构内部自由度上所受到的外力;  $\mathbf{f}_j$  为界面力。

根据式(27)可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j &= (\boldsymbol{\Phi}_j^c + \delta\boldsymbol{\Phi}_j^l) \boldsymbol{\beta}_l + \\ &= (\mathbf{G}_{ji}^c + \delta\mathbf{G}_{ji}) \mathbf{f}_i + (\mathbf{G}_{jj}^c + \delta\mathbf{G}_{jj}) \mathbf{f}_j \end{aligned} \quad (28)$$

## 2 子结构综合方程的构造

假设将系统划分为两个子结构 a 和 b,由式(28)可得子结构 a 和 b 的界面位移为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{ja} &= (\boldsymbol{\Phi}_{ja}^c + \delta\boldsymbol{\Phi}_{ja}^l) \boldsymbol{\beta}_a + \\ &= (\mathbf{G}_{ja}^c + \delta\mathbf{G}_{ja}) \mathbf{f}_{ia} + (\mathbf{G}_{jj_a}^c + \delta\mathbf{G}_{jj_a}) \mathbf{f}_{ja} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{jb} &= (\boldsymbol{\Phi}_{jb}^c + \delta\boldsymbol{\Phi}_{jb}^l) \boldsymbol{\beta}_b + \\ &= (\mathbf{G}_{jb}^c + \delta\mathbf{G}_{jb}) \mathbf{f}_{ib} + (\mathbf{G}_{jj_b}^c + \delta\mathbf{G}_{jj_b}) \mathbf{f}_{jb} \end{aligned} \quad (30)$$

这里不考虑界面处存在外载荷及附加质量,则界面位移连续性条件和界面力协调关系为

$$\mathbf{u}_{ja} = \mathbf{u}_{jb} \quad (31)$$

$$\mathbf{f}_{ja} + \mathbf{f}_{jb} = \mathbf{0} \quad (32)$$

将式(29)、式(30)代入式(31),并且结合式(32)可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ja} &= \mathbf{K}_j [(\boldsymbol{\Phi}_{jb}^c + \delta\boldsymbol{\Phi}_{jb}^l) \boldsymbol{\beta}_b - (\boldsymbol{\Phi}_{ja}^c + \delta\boldsymbol{\Phi}_{ja}^l) \boldsymbol{\beta}_a + \\ &= (\mathbf{G}_{jib}^c + \delta\mathbf{G}_{jib}) \mathbf{f}_{ib} - (\mathbf{G}_{jia}^c + \delta\mathbf{G}_{jia}) \mathbf{f}_{ia}] = -\mathbf{f}_{jb} \end{aligned} \quad (33)$$

其中

$$\mathbf{K}_j = (\mathbf{G}_{jja}^c + \mathbf{G}_{jib}^c)^{-1} \quad (34)$$

将式(24)代入式(34)有

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_j &= (\mathbf{G}_{jja}^c + \mathbf{G}_{jib}^c)^{-1} - (\mathbf{G}_{jja}^c + \mathbf{G}_{jib}^c)^{-1} (\delta\mathbf{G}_{jja} + \\ &= \delta\mathbf{G}_{jib}) (\mathbf{G}_{jja}^c + \mathbf{G}_{jib}^c)^{-1} = \mathbf{K}_j^c + \delta\mathbf{K}_j \end{aligned} \quad (35)$$

其中

$$\mathbf{K}_j^c = (\mathbf{G}_{jja}^c + \mathbf{G}_{jib}^c)^{-1} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{K}_j &= -(\mathbf{G}_{jja}^c + \mathbf{G}_{jib}^c)^{-1} \cdot \\ &= (\delta\mathbf{G}_{jja} + \delta\mathbf{G}_{jib}) (\mathbf{G}_{jja}^c + \mathbf{G}_{jib}^c)^{-1} \end{aligned} \quad (37)$$

根据式(15)可以得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_a^{iT} \mathbf{M}_a \boldsymbol{\Phi}_a^l \ddot{\boldsymbol{\beta}}_a + \boldsymbol{\Phi}_a^{iT} \mathbf{K}_a \boldsymbol{\Phi}_a^l \boldsymbol{\beta}_a &= \boldsymbol{\Phi}_{ja}^{iT} \mathbf{f}_{ja} + \boldsymbol{\Phi}_{ia}^{iT} \mathbf{f}_{ia} \\ \boldsymbol{\Phi}_b^{iT} \mathbf{M}_b \boldsymbol{\Phi}_b^l \ddot{\boldsymbol{\beta}}_b + \boldsymbol{\Phi}_b^{iT} \mathbf{K}_b \boldsymbol{\Phi}_b^l \boldsymbol{\beta}_b &= \boldsymbol{\Phi}_{jb}^{iT} \mathbf{f}_{jb} + \boldsymbol{\Phi}_{ib}^{iT} \mathbf{f}_{ib} \end{aligned} \quad (38)$$

$$(39)$$

若不考虑外载荷作用,并将式(33)代入式(38)与式(39),经化简,可得综合方程为

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\boldsymbol{\beta}}_l + \bar{\mathbf{K}} \boldsymbol{\beta}_l = \mathbf{0} \quad (40)$$

记

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{aa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{bb} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{aa} & \bar{\mathbf{K}}_{ab} \\ \bar{\mathbf{K}}_{ba} & \bar{\mathbf{K}}_{bb} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_l = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\beta}_a \\ \boldsymbol{\beta}_b \end{Bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}_{aa} &= \boldsymbol{\Phi}_a^{cT} \mathbf{M}_a \boldsymbol{\Phi}_a^c + \delta\boldsymbol{\Phi}_a^{lT} \mathbf{M}_a \boldsymbol{\Phi}_a^c + \\ &= \boldsymbol{\Phi}_a^{cT} \delta\mathbf{M}_a \boldsymbol{\Phi}_a^c + \boldsymbol{\Phi}_a^{cT} \mathbf{M}_a \delta\boldsymbol{\Phi}_a^l \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}_{bb} &= \boldsymbol{\Phi}_b^{cT} \mathbf{M}_b \boldsymbol{\Phi}_b^c + \delta\boldsymbol{\Phi}_b^{lT} \mathbf{M}_b \boldsymbol{\Phi}_b^c + \\ &= \boldsymbol{\Phi}_b^{cT} \delta\mathbf{M}_b \boldsymbol{\Phi}_b^c + \boldsymbol{\Phi}_b^{cT} \mathbf{M}_b \delta\boldsymbol{\Phi}_b^l \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{aa} &= (\boldsymbol{\Phi}_a^{cT} \mathbf{K}_a \boldsymbol{\Phi}_a^c + \boldsymbol{\Phi}_a^{cT} \mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_j^c) + \\ &= \delta\boldsymbol{\Phi}_a^{lT} \mathbf{K}_a \boldsymbol{\Phi}_a^c + \boldsymbol{\Phi}_a^{cT} \delta\mathbf{K}_a \boldsymbol{\Phi}_a^c + \boldsymbol{\Phi}_a^{cT} \mathbf{K}_a \delta\boldsymbol{\Phi}_a^l + \\ &= \delta\boldsymbol{\Phi}_{ja}^{lT} \mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_j^c + \boldsymbol{\Phi}_{ja}^{cT} \delta\mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_j^c + \boldsymbol{\Phi}_{ja}^{cT} \mathbf{K}_j \delta\boldsymbol{\Phi}_j^l \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{ab} &= (-\boldsymbol{\Phi}_{ja}^{cT} \mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_j^c) + \\ &= (-\delta\boldsymbol{\Phi}_{ja}^{lT} \mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_j^c + \boldsymbol{\Phi}_{ja}^{cT} \delta\mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_j^c + \boldsymbol{\Phi}_{ja}^{cT} \mathbf{K}_j \delta\boldsymbol{\Phi}_j^l) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{ba} &= (-\boldsymbol{\Phi}_{jb}^{cT} \mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_j^c) + \\ &= (-\delta\boldsymbol{\Phi}_{jb}^{lT} \mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_j^c + \boldsymbol{\Phi}_{jb}^{cT} \delta\mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_j^c + \boldsymbol{\Phi}_{jb}^{cT} \mathbf{K}_j \delta\boldsymbol{\Phi}_j^l) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{bb} &= (\boldsymbol{\Phi}_b^{cT} \mathbf{K}_b \boldsymbol{\Phi}_b^c + \boldsymbol{\Phi}_b^{cT} \mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_j^c) + \\ &= \delta\boldsymbol{\Phi}_b^{lT} \mathbf{K}_b \boldsymbol{\Phi}_b^c + \boldsymbol{\Phi}_b^{cT} \delta\mathbf{K}_b \boldsymbol{\Phi}_b^c + \boldsymbol{\Phi}_b^{cT} \mathbf{K}_b \delta\boldsymbol{\Phi}_b^l + \\ &= \delta\boldsymbol{\Phi}_{jb}^{lT} \mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_j^c + \boldsymbol{\Phi}_{jb}^{cT} \delta\mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_j^c + \boldsymbol{\Phi}_{jb}^{cT} \mathbf{K}_j \delta\boldsymbol{\Phi}_j^l \end{aligned} \quad (46)$$

式(40)也可以写为

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{aa}^c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{bb}^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta\bar{\mathbf{M}}_{aa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta\bar{\mathbf{M}}_{bb} \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\beta}}_a \\ \ddot{\boldsymbol{\beta}}_b \end{Bmatrix} + \\ \left\{ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{aa}^c & \bar{\mathbf{K}}_{ab}^c \\ \bar{\mathbf{K}}_{ba}^c & \bar{\mathbf{K}}_{bb}^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta\bar{\mathbf{K}}_{aa} & \delta\bar{\mathbf{K}}_{ab} \\ \delta\bar{\mathbf{K}}_{ba} & \delta\bar{\mathbf{K}}_{bb} \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\beta}_a \\ \boldsymbol{\beta}_b \end{Bmatrix} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (47)$$

## 3 综合方程的区间不确定性分析

利用摄动法,容易得到综合方程的特征值1阶

摄动表达式为

$$\delta\lambda_i = \frac{\bar{\Phi}_i^T (\delta\bar{K} - \bar{\lambda}_i \delta\bar{M}) \bar{\Phi}_i}{\bar{\Phi}_i^T \bar{M} \bar{\Phi}_i} \quad (48)$$

其中:  $\bar{\lambda}_i, \bar{\Phi}_i$  为不含摄动项的综合方程的特征值和特征向量。

这里对  $\bar{\Phi}$  关于  $\bar{M}$  做归一化处理, 将  $\delta\bar{K}$  和  $\delta\bar{M}$  记作  $\sum_{j=1}^r \frac{\partial \bar{K}}{\partial \alpha_j} \delta\alpha_j$  和  $\sum_{j=1}^r \frac{\partial \bar{M}}{\partial \alpha_j} \delta\alpha_j$  的形式, 则得到  $\delta\lambda_i$  的区间范围为

$$\delta\lambda_i^I = \sum_{j=1}^r \left| \bar{\Phi}_i^T \left( \frac{\partial \bar{K}}{\partial \alpha_j} - \bar{\lambda}_i \frac{\partial \bar{M}}{\partial \alpha_j} \right) \bar{\Phi}_i \right| \Delta\alpha_j e_{\Delta} \quad (49)$$

按照区间运算规则给出  $\delta\bar{\lambda}$ ,  $\frac{\delta\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}$  的区间, 便可以得到子结构参数变化时减缩模型的固有频率变化区间及参数不确定性对结构固有频率的影响程度。

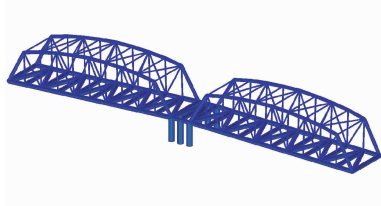


图1 某钢架桥有限元模型  
Fig. 1 The FEM of a bridge

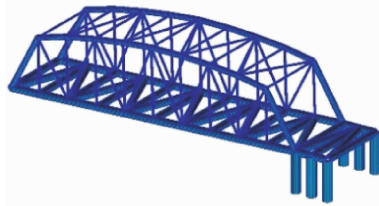


图2 桥梁子结构 a  
Fig. 2 The component a

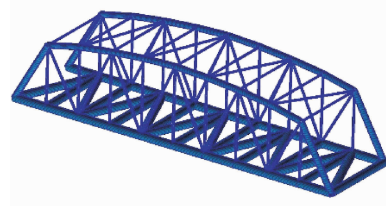


图3 桥梁子结构 b  
Fig. 3 The component b

表1 桥梁结构有限元模型参数

Tab. 1 The properties of the FEM

参数名称	数值	参数名称	数值
弹性模量/GPa	210	两侧桥架截面内径/m	0.14
泊松比	0.3	两侧桥架截面外径/m	0.16
密度/(kg·m <sup>-3</sup> )	7 800	上侧桥架截面内径/m	0.13
桥面截面内径/m	0.44	上侧桥架截面外径/m	0.15
桥面截面外径/m	0.52	桥墩截面内径/m	0.6
桥框截面内径/m	0.38	桥墩截面外径/m	0.7
桥框截面外径/m	0.40		

## 4.2 模态分析

采用本研究方法对该钢架桥模型进行结构动力学特性分析。分别保留每个子结构的前 10, 15, 20 和 25 阶低阶模态进行模态综合, 通过特征值分析可以得到结构的固有频率。表 2 给出了模态综合模型计算得到的结构固有频率和完全有限元模型计算得到的结构固有频率。定义  $\epsilon = \frac{|\omega_s - \omega_f|}{|\omega_f|} \times 100\%$ , 对本研究方法所计算得到的固有频率进行误差分析, 其中:  $\omega_s$  为采用本研究方法计算得到的固有频率;  $\omega_f$  为采用完全有限元模型计算得到的固有频率。

图 4 所示为保留前 10, 15, 20 和 25 阶低阶模态所计算得到的前 12 阶固有频率的误差对比, 其中  $l$  为用于构造综合模型所保留的低阶模态数。由图 4 可以看出, 随着保留低阶模态数目的增加, 通过本研

## 4 数值算例

### 4.1 模型说明

图 1 所示为某钢架桥有限元模型 (finite element model, 简称 FEM), 该桥总长约为 108 m, 桥宽约为 11.2 m。采用空间两节点梁单元对其进行建模, 梁单元截面形状均为空心圆, 桥梁左、右两端部以及桥墩底部为约束端。

如图 2 和图 3 所示, 将该桥梁结构划分为 2 个子结构: 子结构 a 包含 126 个梁单元, 50 个节点; 子结构 b 包含 111 个梁单元, 40 个节点。相关材料 & 结构尺寸参数如表 1 所示。

表2 综合模型与完全有限元模型计算结果比较

Tab. 2 Comparison of the eigenvalues from the presented method and the full FEM

模态阶数	Hz				完全有限元法
	$l=10$	$l=15$	$l=20$	$l=25$	
1	2.880	2.880	2.880	2.880	2.872
2	2.890	2.890	2.890	2.890	2.882
3	5.198	5.195	5.195	5.195	5.194
4	5.258	5.251	5.251	5.251	5.249
5	6.000	5.998	5.996	5.996	5.995
6	6.027	6.022	6.020	6.020	6.018
7	7.911	7.909	7.907	7.906	7.904
8	7.983	7.981	7.980	7.980	7.978
9	8.978	8.958	8.932	8.929	8.926
10	9.605	9.575	9.547	9.545	9.543
11	10.212	10.203	10.202	10.201	10.198
12	10.320	10.242	10.241	10.239	10.237

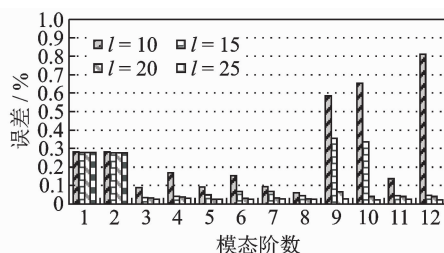


图4 固有频率相对误差

Fig. 4 Comparison of error for natural frequencies

究方法所计算得到的固有频率的计算精度也逐渐提高。总体的计算误差都保持在 1% 以内,且当保留的低阶模态数目达到 25 阶时,计算的误差可以降低到 4% 以内,与完全有限元模型的计算结果吻合度非常高。

表 3 对减缩模型以及完全有限元模型在进行特征值分析时的计算效率进行了对比。由表 3 可以看出,采用完全有限元模型计算结构固有频率所需的时间约为 2 247 ms;而采用本方法计算结构固有频率在选取  $l=25$  时所需时间约为 69.7ms,约为完全有限元法计算时间的 3%,在保证计算精度的同时,计算效率得到了显著提升。

表 3 子结构模态综合法与完全有限元法计算效率比较  
Tab.3 Comparison of the CPU time consumed between the synthesis models and full FE model

比较项目	子结构模态综合法				完全有限元法
	$l=10$	$l=15$	$l=20$	$l=25$	
计算时间/ms	20.2	44.6	52.6	69.7	2 247.0
计算时间比率/%	0.9	2.0	2.3	3.1	—

4.3 不确定性分析

这里考虑子结构 a, b 的弹性模量  $E$  为具有不确定性的有界变量,其区间为

$$E_i^l = [E^c - \beta E^c, E^c + \beta E^c] \quad (i = a, b)$$

其中:  $E^c = 210$  GPa。

表 4 给出了  $\beta=5\%$  时采用本研究方法和采用 100 次 Monte Carlo 模拟得到的频率区间。由表 4 可以看出,当对该结构参数即弹性模量按中心值 210 GPa 上、下 5% 的区间变化时,由本方法得到的各阶固有频率区间范围和 Monte Carlo 法得到的固有频率区间范围非常接近。

$$\text{定义 } \bar{\epsilon} = \frac{\bar{\omega} - \omega_c}{\omega_c} \times 100\% \text{ 与 } \underline{\epsilon} = \frac{\underline{\omega} - \omega_c}{\omega_c} \times 100\%$$

100% 对本研究方法计算所得到的固有频率区间上、下界相对中心值的相对变化量进行分析,其中:  $\omega_c$  为确定性模型计算得到的模型固有频率;  $\bar{\omega}$  与  $\underline{\omega}$  分别为相应固有频率的区间上、下界。由图 5 可以看出,当该结构弹性模量小范围变化时,采用本研究

表 4  $\beta=5\%$  时各阶固有频率区间

Tab.4 Comparison of the interval from the presented method and the Monte Carlo method when  $\beta=5\%$

模态阶数	本研究方法得到的	Monte Carlo 法得到的
	模态频率区间	模态频率区间
1	[2.806, 2.953]	[2.814, 2.944]
2	[2.815, 2.964]	[2.823, 2.954]
3	[5.061, 5.328]	[5.070, 5.321]
4	[5.118, 5.383]	[5.123, 5.378]
5	[5.843, 6.148]	[5.849, 6.142]
6	[5.867, 6.171]	[5.871, 6.167]
7	[7.703, 8.107]	[7.714, 8.098]
8	[7.776, 8.182]	[7.790, 8.174]
9	[8.686, 9.161]	[8.700, 9.147]
10	[9.281, 9.798]	[9.299, 9.774]
11	[9.937, 10.459]	[9.946, 10.450]
12	[9.969, 10.504]	[9.983, 10.490]

方法得到的各阶固有频率相对于中心值参数对应的频率的变化区间略大于由 Monte Carlo 方法得到的变化区间,为可以接受的范围。另外,采用 Monte Carlo 进行 100 次模拟耗时约需 110 min,而采用本研究方法仅需 1 次计算,耗时仅约 2 min,计算效率得到了显著提高。

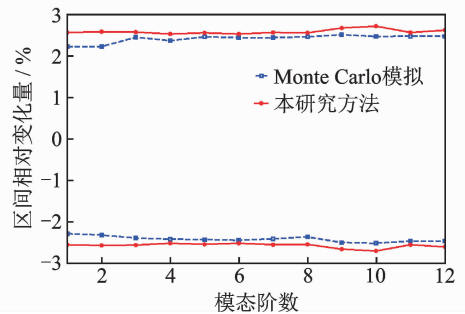
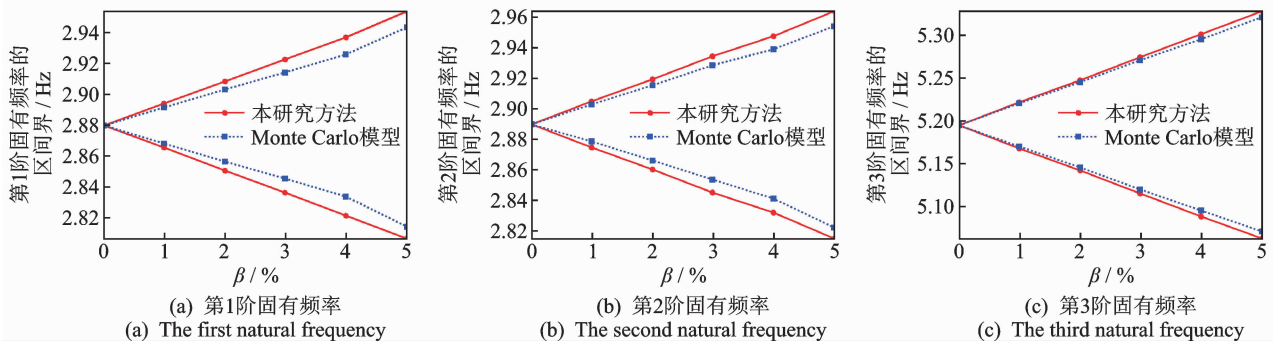


图 5  $\beta=5\%$  时各阶固有频率相对变化量的包络线  
Fig.5 The envelopes of change rate of natural frequencies when  $\beta=5\%$

图 6 给出了前 6 阶固有频率随  $\beta$  值增加的区域边界的变化趋势,可以看出,随着  $\beta$  值的增加,频率的区间变化也越来越大。同样可以看出,本方法得到的区间包含了 Monte Carlo 方法得到的区间。



(a) 第1阶固有频率 (a) The first natural frequency  
(b) 第2阶固有频率 (b) The second natural frequency  
(c) 第3阶固有频率 (c) The third natural frequency

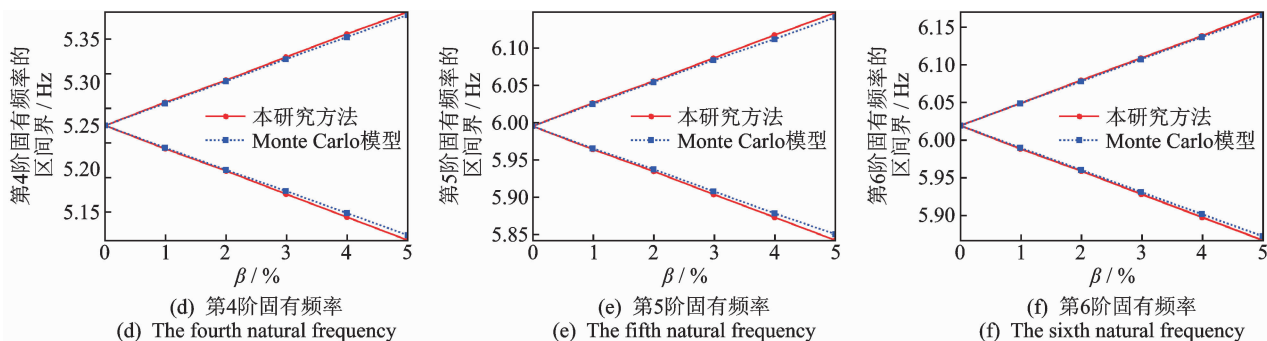
图6 系统前6阶固有频率随 $\beta$ 变化的区间边界包络线

Fig. 6 The envelopes of the first six natural frequencies

## 5 结论

1) 在综合过程中,考虑了剩余柔度的影响,并通过构造1组与子结构低阶模态加权正交的假设高阶模态集,避免了传统自由界面方法中需要对系统刚度矩阵直接求逆的过程,解决了子结构存在刚体位移时的剩余柔度矩阵的求解问题。

2) 采用摄动法对子结构进行分析,结构参数的不确定性可以通过子结构传递到综合方程中。通过数值算例可以看出,本研究方法计算所得到的固有频率区间范围与 Monte Carlo 数值模拟的结果吻合得很好。

3) 采用本研究方法可以大幅降低不确定性分析的模型规模,且无需像 Monte Carlo 法一样需要多次重复计算,显著提升了计算效率。

## 参 考 文 献

- [1] HURTY W C. Dynamic analysis of structural systems using component modes[J]. AIAA Journal, 1965, 3(4): 678-785.
- [2] GOLDMAN R L. Vibration analysis by dynamic partitioning[J]. AIAA Journal, 1969, 7(6): 1152-1154.
- [3] MACNEAL R H. A hybrid method of component mode synthesis[J]. Computers & Structures, 1971, 1(4): 581-601.
- [4] PAPADIMITRIOU C, PAPADIOTI D C. Component mode synthesis techniques for finite element model updating[J]. Computers and Structures, 2013, 126(1): 15-28.
- [5] HE H, WANG T, CHEN G, et al. A real decoupled method and free interface component mode synthesis methods for generally damped systems[J]. Journal of Sound & Vibration, 2014, 333(2): 584-603.
- [6] DING Z, LI L, HU Y. A free interface component mode synthesis method for viscoelastically damped systems[J]. Journal of Sound & Vibration, 2016, 365:119-215.
- [7] 华军,许庆余,张家忠. 挤压油膜阻尼器-滑动轴承-转

子系统非线性动力特性的数值分析及实验研究[J]. 航空学报, 2001, 22(1):42-45.

HUA Jun, XU Qingyu, ZHANG Jiazong. Numerical and experimental study on nonlinear dynamic behavior of the fluid film bearing-rotor system with squeeze film damper[J]. Acta Aeronautica et Astronautica, 2001, 22(1):42-45. (in Chinese))

- [8] HE H, WANG T, CHEN G P. A hybrid coordinates component mode synthesis method for dynamic analysis of structures with localized nonlinearities[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2016, 138: 031002.
- [9] GERSEM H D, MOENS D, DESMET W, et al. Interval and fuzzy dynamic analysis of finite element models with superelements[J]. Computers & Structures, 2007, 85(5/6): 304-319.
- [10] GIANNINI O, HANSS M. The component mode transformation method: A fast implementation of fuzzy arithmetic for uncertainty management in structural dynamics[J]. Journal of Sound & Vibration, 2008, 311(3/4/5):1340-1357.
- [11] HINKE L, DOHNAL F, MACE B R. Component mode synthesis as a framework for uncertainty analysis[J]. Journal of Sound & Vibration, 2009, 324(1): 161-178.
- [12] TRAN Q H, OUISE M, BOUHADDI N. A robust component mode synthesis method for stochastic damped vibroacoustics [J]. Mechanical Systems & Signal Processing, 2010, 24(1): 164-181.



**第一作者简介:**王陶,男,1987年8月生,博士生。主要研究方向为复杂结构动力学分析。曾发表《一种利用子结构综合技术的模型修正方法》(《振动与冲击》2017年第36卷第2期)等论文。  
E-mail: wt\_lx@nuaa.edu.cn

**通信作者简介:**何欢,男,1978年2月生,博士、教授、博士生导师。主要研究方向为复杂结构动力学分析、飞行器回收系统动力学。  
E-mail: hehuan@nuaa.edu.cn