DOI:10.16450/j.cnki.issn.1004-6801.2020.06.022

具有动态侧隙的齿轮传动系统动力响应分析*

刘　杰,　赵伟强,　任　望
(沈阳工业大学机械工程学院　沈阳,110870)

摘要　综合考虑动态侧隙、时变啮合刚度、齿轮偏心和传动误差等非线性因素,建立齿轮-转子-轴承传动系统的非线性动力学模型。以分形理论为基础,引用尺寸一致性的 Weierstrass-Mandelbrot 函数模拟动态侧隙的变化趋势。利用 4 阶龙格-库塔法对系统的非线性动力学微分方程求解,探究动态侧隙对系统响应的影响。结果显示:综合对比定侧隙系统和动态侧隙系统,齿轮在扭转方向上振动幅值的波动较大,动态侧隙系统由准周期运动渐变为混沌运动,并且与动态侧隙曲线的复杂程度有关;齿轮在扭转方向相平面的轨迹随动态侧隙的标准差(standard deviation,简称 STD)呈现出规律性变化;在系统振动响应频谱中,随着动态侧隙曲线的复杂程度的加剧,频率成分多样性增强,噪声频率的幅值逐渐增加,高倍频的幅值激增。

关键词　齿侧间隙;分形特征;齿轮;非线性;耦合振动
中图分类号　TH132

引　言

齿轮传动系统作为现代工业机械中最重要的动力传动机构之一,其运行机理和复杂的非线性现象,一直以来是人们研究的重点。Karhaman 等[1]研究了含有齿侧间隙和时变啮合刚度的齿轮-轴承系统的非线性动力学特性。Zhou 等[2]建立了 16 自由度的齿轮-转子-轴承系统的非线性动力学模型,描述了摩擦力和平均载荷变化时系统的动态响应。Farshidianfar 等[3]研究了带有多间隙的齿轮传动模型,重点研究了分岔、混沌等现象。对侧隙的研究中,Wang 等[4]考虑了时变啮合参数和侧隙非线性对准双曲面齿轮副动力学特性的影响,以时变啮合参数的基本谐波形式来研究变化的啮合参数与侧隙非线性对系统的动态响应的影响。

大多数学者都选择将齿轮系统中的参数和外部激励等效为定常数值,如齿侧间隙和外部负载。近些年来,许多学者分析了时变参数及激励对齿轮传动系统动态特性的影响。文献[5-6]基于 Runge-Kutta 数值方法,对含有动态摩擦力和动态侧隙的齿轮传动模型进行求解,讨论了不同转速下的间隙和齿轮偏心对系统振动特性的影响。Chen 等[7]研究了齿轮-轴承传动系统的非线性动力特性,建立含中心距误差影响的动态侧隙模型,通过分岔图、均方根(root mean square, 简称 RMS)和动态啮合力来讨论摩擦力和动态侧隙对系统响应的影响。Chen 等[8]以分形理论建立含动态侧隙的齿轮扭转振动模型,与固定值侧隙和正态分布侧隙对比,分形法明显优于其他二者,并且讨论了分形维数、时变啮合刚度和阻尼比对系统响应的影响,但只考虑了扭转方向。

研究具有分形特征的侧隙时,大部分仅综合考虑了分形维数对齿轮动态特性的影响,且模型过于简化,忽略了齿轮传动系统的其他重要部件对于系统的影响。笔者建立齿轮-转子-轴承传动系统的非线性动力学模型,以分形理论模拟动态侧隙随时间变化的曲线,研究了动态侧隙的峰值波动性和动态侧隙曲线的复杂程度对系统振动特性的影响。

1　动力学模型

1.1　齿轮传统系统集中质量模型

建立多自由度弯扭耦合的齿轮传动模型[2],如

*　国家自然科学基金资助项目(51305276,51675350);辽宁省自然科学基金资助项目(201602544);沈阳市双百工程资助项目(Z17-5-067)
收稿日期:2018-11-07;修回日期:2019-01-10

图 1 所示。驱动端、齿轮和负载端的转动惯量为 $J_i(i=d,1,2,g)$，齿轮的质量为 $m_i(i=1,2)$，$O_1(x_1,y_1)$ 和 $O_2(x_2,y_2)$ 分别为齿轮的理想回转中心，$G_1(x_{g1},y_{g1})$ 和 $G_2(x_{g2},y_{g2})$ 分别为主动齿轮和从动齿轮的质心，驱动端、齿轮和负载端扭转角位移都假设成由一个恒定的角速度 $\omega_i t(i=d,1,2,g)$ 加上一个微小的位移变化量 $\theta_i(t)(i=d,1,2,g)$，驱动端、齿轮和负载端的角位移为 $\varphi_i(t)(i=d,1,2,g)$。在旋转平面内轴的弹性变形表达式分别为

$$\begin{cases}\delta_{x1}=x_1-\xi_2 x_{b1}-\xi_1 x_{b2}\\ \delta_{y1}=y_1-\xi_2 y_{b1}-\xi_1 y_{b2}\\ \delta_{x2}=x_2-\xi_3 x_{b4}-\xi_4 x_{b3}\\ \delta_{y2}=y_2-\xi_3 y_{b4}-\xi_4 y_{b3}\end{cases}\tag{1}$$

其中：$\xi_i=l_{bi}/l_j$；l_1，l_2 为轴的长度；$l_{bi}(i=1\sim4)$ 为齿轮到轴承的距离。

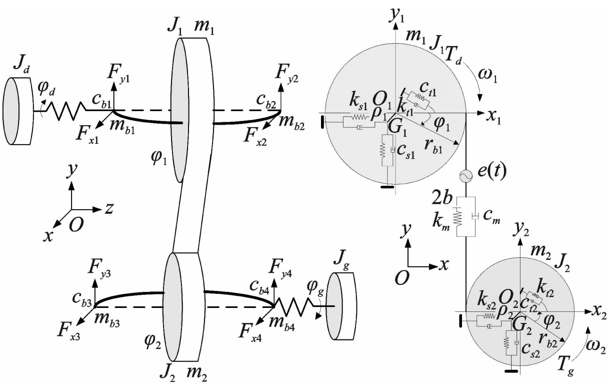


图 1　齿轮系统动态模型

Fig. 1　Dynamic model of gear system

时变啮合刚度[2]如图 2 所示，由于齿轮啮合存在单双齿交替接触，单齿啮合刚度 K_L 是从 nT_m 到 $(2-\varepsilon)nT_m$ 区间内，双齿啮合区对应啮合刚度 K_H 由 $(2-\varepsilon)nT_m$ 到 $(n+1)nT_m$。齿轮的时变啮合刚度为周期函数，其中：ε 为重合度；T_m 为啮合周期。

考虑啮合过程的啮合位置之间的间隙，作用在啮合点上的动态啮合力可表示为

$$\begin{cases}F_m=c_m\dot{\delta}+k_m(t)f(\delta)\\ \delta(t)=(r_{b1}\varphi_1-r_{b2}\varphi_2)+(y_{g1}-y_{g2})-e(t)\\ e(t)=e_0+e_r\sin(\omega_m t+\varphi_m)\end{cases}\tag{2}$$

其中：r_{b1}，r_{b2} 为两齿轮基圆半径；$e(t)$ 为空载传递误差；$\delta(t)$ 为齿轮沿啮合线方向的综合弹性变形；ω_m 为啮合频率，$\omega_m=2\pi n_1 z_1/60(2\pi n_2 z_2/60)$；$f(\delta)$ 为侧隙非线性函数。

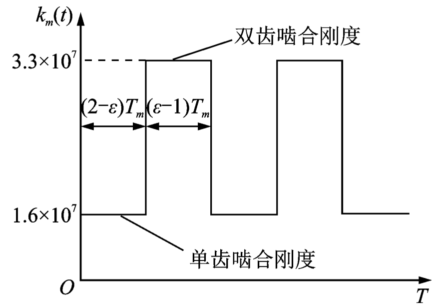


图 2　时变啮合刚度

Fig. 2　Time-varying meshing stiffness

1.2　球轴承的动态模型

图 3 为球轴承的动态模型图，轴承外圈固定在轴承座上，内圈固定在轴上，滚动体均匀分布在内外圈之间。滚动体和内外环之间的接触点的速度以及保持架的速度和角速度的表达式为

$$\begin{cases}v_{\mathrm{i}}=\omega_{\mathrm{i}}r\\ v_{\mathrm{o}}=\omega_{\mathrm{o}}R\\ v_{\mathrm{b}}=(v_{\mathrm{o}}+v_{\mathrm{i}})/2=(\omega_{\mathrm{o}}R+\omega_{\mathrm{i}}r)/2\\ \omega_{\mathrm{b}}=2v_{\mathrm{b}}/(R+r)=\omega_{\mathrm{i}}r/(R+r)\end{cases}\tag{3}$$

其中：R 和 r 分别为外圈和内圈的半径；v_{b} 为保持架速度；ω_{b} 为保持架角速度；ω_{i} 和 ω_{o} 分别为滚动体和内外轨道接触点的角速度。

第 i 个滚动体的接触应力 f_i 的表达式为

$$f_i=K_{\mathrm{b}}(x\cos\varphi_i+y\sin\varphi_i-\gamma_0)^{3/2}\cdot H(x\cos\varphi_i+y\sin\varphi_i-\gamma_0)\tag{4}$$

其中：x，y 为轴承中心在 x，y 方向的振动位移；φ_i 为第 i 个滚动体在 t 时刻的旋转角；K_{b} 为赫兹接触刚度；$H(x)$ 为亥维赛函数；γ_0 为轴承游隙。

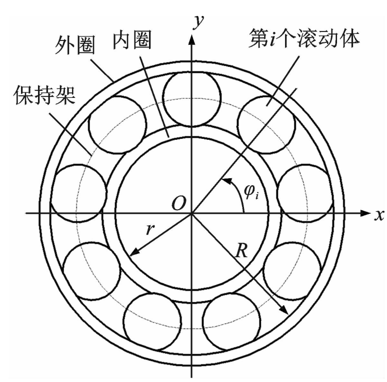


图 3　球轴承模型

Fig. 3　Ball bearing model

由式(4)可得轴承力的分量为

$$\begin{cases} F_x = \sum\limits_{i=1}^{N_b} f_i \cos\varphi_i = F\cos\varphi_i \\ F_y = \sum\limits_{i=1}^{N_b} f_i \sin\varphi_i = F\sin\varphi_i \end{cases} \tag{5}$$

其中：N_b 为滚动体的数目。

1.3 动态侧隙

金属加工的粗糙表面具有分形特征。齿轮啮合时，两粗糙齿面在啮合点附近产生相对位移，如图 4 所示，由此产生动态侧隙 $b_h(t)$。以分形理论为基础，笔者应用尺寸一致的（Weierstrass-Mandelbrot，简称 W-M）函数[10-11]模拟动态侧隙 $b_h(t)$。由于两齿轮啮合时，其各个轮齿不同，齿面微观结构不同，啮合位置不同，所以每个时刻的啮合位置的表面轮廓高度不同，则将轮廓位置坐标 x 替换为时间变量 t，表达式为

$$b_h(t) = b_0 + L\left(\frac{G}{L}\right)^{D-1} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{\cos\left(\frac{2\pi\gamma^n t}{L}\right)}{\gamma^{(2-D)n}} \tag{6}$$

$$(1 < D < 2;\gamma > 1)$$

其中：γ^n 为齿廓空间频率，对于服从正态分布的随机轮廓，$\gamma = 1.5$ 可适用于高频谱密度及相位的随机性；L 为取样长度；G 为特征尺度系数；D 为分形维数（无量纲），控制着分形曲线的复杂程度。

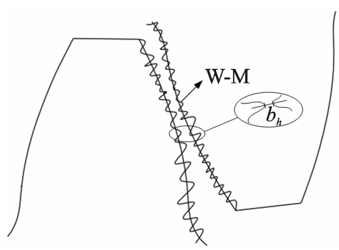


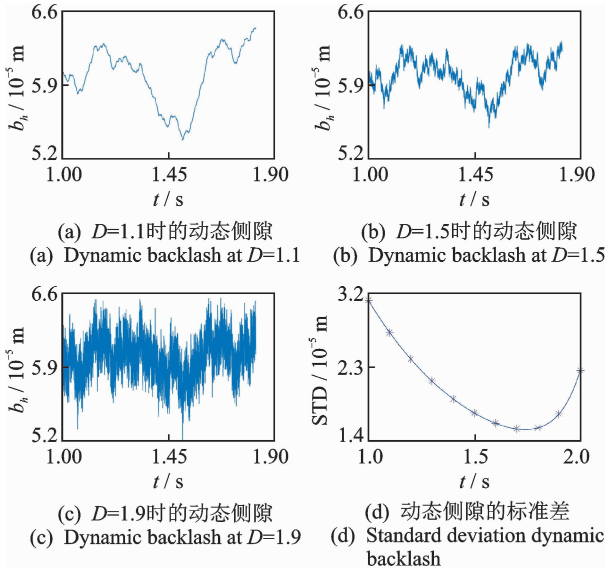
图 4 齿面微观结构

Fig. 4 The microstructure of the tooth surface

$f(\delta)$ 为侧隙非线性函数，α 为非线性系数，其表达式分别为

$$f(\delta) = \begin{cases} \delta - (1-\alpha) b_h(t) & (\delta > b_h(t)) \\ \alpha b_h(t) & (-b_h(t) < \delta < b_h(t); 0 \leqslant \alpha \leqslant 1) \\ \delta + (1-\alpha) b_h(t) & (\delta < -b_h(t)) \end{cases} \tag{7}$$

在图 5 中，取 $\gamma = 1.5$，D 值分别取 1.1，1.5 和 1.9，获得随时间 t 变化的动态侧隙 $b_h(t)$ 的曲线以及不同维数下动态侧隙的标准差（STD）来描述动态侧隙峰值的波动性。STD 值越大，动态侧隙的峰值波动越大；STD 值越小，动态侧隙的峰值波动越小。



(a) D=1.1时的动态侧隙
(a) Dynamic backlash at D=1.1

(b) D=1.5时的动态侧隙
(b) Dynamic backlash at D=1.5

(c) D=1.9时的动态侧隙
(c) Dynamic backlash at D=1.9

(d) 动态侧隙的标准差
(d) Standard deviation dynamic backlash

图 5 动态侧隙 b_h 和动态侧隙的标准差 $(b_h)_{\mathrm{STD}}$

Fig. 5 Dynamic backlash b_h and its standard deviation $(b_h)_{\mathrm{STD}}$

综上分析，根据广义坐标，求得系统的动能、势能及耗散能，由拉格朗日方程得到系统中的齿轮、轴承、输入/输出的振动微分方程分别为式(8)～式(10)所示

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_{s1}(\dot{x}_1 - \xi_2\dot{x}_{b1} - \xi_1\dot{x}_{b2}) + k_{s1}(x_1 - \\ \quad \xi_2 x_{b1} - \xi_1\dot{x}_{b2}) = m_1\rho_1\ddot{\theta}_1\sin(\omega_1 t + \theta_1) + \\ \quad m_1\rho_1(\omega_1 + \dot{\theta}_1)^2\cos(\omega_1 t + \theta_1) \\ m_1\ddot{y}_1 + c_{s1}(\dot{y}_1 - \xi_2\dot{y}_{b1} - \xi_1\dot{y}_{b2}) + k_{s1}(y_1 - \\ \quad \xi_2 y_{b1} - \xi_1 y_{b2}) = m_1\rho_1(\omega_1 t + \dot{\theta}_1)^2\sin(\omega_1 t + \\ \quad \theta_1) - m_1\rho_1\ddot{\theta}_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) - F_m - m_1 g \\ (J_1 + m_1\rho_1^2)\ddot{\theta}_1 + c_{t1}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_d) + k_{t1}(\theta_1 - \theta_d) = \\ \quad m_1\rho_1\sin(\omega_1 t + \theta_1)\ddot{x}_1 - m_1\rho_1\cos(\omega_1 t + \\ \quad \theta_1)\ddot{y}_1 - F_m r_{b1} \\ m_2\ddot{x}_2 + c_{s2}(\dot{x}_2 - \xi_4\dot{x}_{b3} - \xi_3\dot{x}_{b4}) + k_{s2}(x_2 - \xi_4 x_{b3} - \\ \quad \xi_3 x_{b4}) = m_2\rho_2\ddot{\theta}_2\sin(\omega_2 t + \theta_2) + m_2\rho_2(\omega_2 + \\ \quad \dot{\theta}_2)^2\cos(\omega_2 t + \theta_2) \\ m_2\ddot{y}_2 + c_{S2}(\dot{y}_2 - \xi_4\dot{y}_{b3} - \xi_3\dot{y}_{b4}) + k_{s1}(y_2 - \xi_4 y_{b3} - \\ \quad \xi_3 y_{b4}) = m_2\rho_2(\omega_2 t + \dot{\theta}_2)^2\sin(\omega_2 t + \theta_2) - \\ \quad m_2\rho_2\ddot{\theta}_2\cos(\omega_2 t + \theta_2) + F_m - m_2 g \\ (J_2 + m_2\rho_2^2)\ddot{\theta}_2 + c_{t2}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_g) + k_{t2}(\theta_2 - \theta_g) = \\ \quad m_2\rho_2\sin(\omega_2 t + \theta_2)\ddot{x}_2 - m_2\rho_2\cos(\omega_2 t + \\ \quad \theta_2)\ddot{y}_2 + F_m r_{b2} \end{cases} \tag{8}$$

$$
\begin{cases}
m_{b1}\ddot{x}_{b1}+c_{s1}\xi_2(-\dot{x}_1+\xi_2\dot{x}_{b1}+\xi_1\dot{x}_{b2})+c_{bx1}\dot{x}_{b1}+ \\
\qquad k_{s1}\xi_2(-x_1+\xi_2 x_{b1}+\xi_1 x_{b2})=F_{x1} \\
m_{b1}\ddot{y}_{b1}+c_{s1}\xi_2(-\dot{y}_1+\xi_2\dot{y}_{b1}+\xi_1\dot{y}_{b2})+c_{by1}\dot{y}_{b1}+ \\
\qquad k_{s1}\xi_2(-y_1+\xi_2 y_{b1}+\xi_1 y_{b2})=F_{y1}-m_{b1}g \\
m_{b2}\ddot{x}_{b2}+c_{s1}\xi_1(-\dot{x}_1+\xi_2\dot{x}_{b1}+\xi_1\dot{x}_{b2})+c_{bx2}\dot{x}_{b2}+ \\
\qquad k_{s1}\xi_1(-x_1+\xi_2 x_{b1}+\xi_1 x_{b2})=F_{x2} \\
m_{b2}\ddot{y}_{b2}+c_{s1}\xi_1(-\dot{y}_1+\xi_2\dot{y}_{b1}+\xi_1\dot{y}_{b2})+c_{by2}\dot{y}_{b1}+ \\
\qquad k_{s1}\xi_1(-y_1+\xi_2 y_{b1}+\xi_1 y_{b2})=F_{y2}-m_{b2}g \\
m_{b3}\ddot{x}_{b3}+c_{s2}\xi_4(-\dot{x}_2+\xi_4\dot{x}_{b3}+\xi_3\dot{x}_{b4})+c_{bx3}\dot{x}_{b3}+ \\
\qquad k_{s2}\xi_4(-x_2+\xi_4 x_{b3}+\xi_3 x_{b4})=F_{x3} \\
m_{b3}\ddot{y}_{b3}+c_{s2}\xi_4(-\dot{y}_2+\xi_4\dot{y}_{b3}+\xi_3\dot{y}_{b4})+c_{by3}\dot{y}_{b3}+ \\
\qquad k_{s2}\xi_4(-y_2+\xi_4 y_{b3}+\xi_3 y_{b4})=F_{y3}-m_{b3}g \\
m_{b4}\ddot{x}_{b4}+c_{s2}\xi_3(-\dot{x}_2+\xi_4\dot{x}_{b3}+\xi_3\dot{x}_{b4})+c_{bx4}\dot{x}_{b4}+ \\
\qquad k_{s2}\xi_3(-x_2+\xi_4 x_{b3}+\xi_3 x_{b4})=F_{x4} \\
m_{b4}\ddot{y}_{b4}+c_{s2}\xi_3(-\dot{y}_2+\xi_4\dot{y}_{b3}+\xi_3\dot{y}_{b4})+c_{by4}\dot{y}_{b4}+ \\
\qquad k_{s2}\xi_3(-y_2+\xi_4 y_{b3}+\xi_3 y_{b4})=F_{y4}-m_{b4}g
\end{cases}
\tag{9}
$$

$$
\begin{cases}
J_d\ddot{\theta}_d+c_{t1}(\dot{\theta}_d-\dot{\theta}_1)+k_{t1}(\theta_d-\theta_1)=T_d \\
J_g\ddot{\theta}_g+c_{t2}(\dot{\theta}_g-\dot{\theta}_2)+k_{t2}(\theta_g-\theta_2)=-T_g
\end{cases}
\tag{10}
$$

其中：k_{s1}，k_{s2}，k_{t1}，k_{t2}分别为两轴的弯曲与扭转刚度；c_{s1}，c_{s2}，c_{t1}，c_{t2}分别为两轴的弯曲和扭转阻尼系数；c_{bij}（$i=x,y;j=1,2,3,4$）为轴承在 x，y 方向上的阻尼系数。

2　侧隙对系统响应的影响

侧隙对齿轮系统的非线性特性及齿轮啮合状态具有直接影响，为研究动态侧隙对齿轮振动特性的影响规律，取恒转速为 3 kr/min，定值侧隙 $b_0=6\times10^{-5}$ m，D=1.1，1.5 和 1.9 的动态侧隙，考虑时变啮合刚度和偏心等因素，利用 4 阶 Runge-Kutta 求解，其他参数如表 1 所示。

表 1　系统参数

Tab. 1　Parameters of system

参数	数值
齿数（z_1，z_2）	30，20
模数/mm	4
齿轮质量（m_1，m_2）/kg	1.9，0.8
偏心量（ρ_1，ρ_2）/m	3×10^{-5}，2×10^{-5}
转动惯量（J_1，J_2）/（kg・m）	1.75×10^{-3}，6.22×10^{-4}
传动误差（e_0，e_r）/m	2×10^{-5}，3×10^{-5}
轴的阻尼比 $\xi_{s,t}$	0.07，0.07
轴承游隙（γ_1，γ_2）/m	3×10^{-6}，2×10^{-6}
轴承外圈半径（R_1，R_2）/m	0.031，0.021
轴承内圈半径（r_1，r_2）/m	0.020，0.015
接触刚度（K_{b1}，K_{b2}）/（$\mathrm{Nm}^{-\frac{3}{2}}$）	13.34×10^9，10.34×10^9
滚动体数目（N_1，N_2）	14，18

2.1　定侧隙下系统的响应

主动轮在 y，θ 方向上的时域图、频谱、相图及 Poincaré 截面图见图 7。Poincaré 图显示，系统为稳定的单周期运动。FFT 谱中，在 y，θ 方向上的频率成分包括：齿轮的啮合频率 f_m（$f_m=n_1z_1/60=1\ 500$ Hz）；倍频 $2f_m$ 和 $3f_m$；转动频率 f_{r1}（$f_{r1}=n_1/60=50$ Hz），f_{r2}（$f_{r2}=n_2/60=75$ Hz）；轴承 1 和 2 的变刚度频率 f_{b1}（$f_{b1}=N_1r_1n_1/60(R_1+r_1)=274.3$ Hz），轴承 3 和 4 的通过频率 f_{b2}（$f_{b2}=N_2r_2n_2/60(R_2+r_2)=563.4$ Hz）；复合频率 f_m-f_{b2}。啮合频率的振幅是最高的，并且可以看出两个方向的频率成分基本一样，但是 θ 方向的振幅比 y 方向的大许多。

与文献[2]所做的结果进行对比，本研究仿真结果的时域、频域的峰值均在合理范围内，验证了仿真理论和方法的正确性。

2.2　动态侧隙对系统响应的影响

以分形理论为基础，控制式(6)中的变量，得到峰值波动逐步变化的动态侧隙曲线。为研究齿轮系统振动状态，经计算得到系统的分岔图。

图 6 为主动轮在 y，θ 方向上的分岔图，可以看出：分形维数较低时 $D\in[1,\ 1.66]$，系统表现为准周期运动；当分形维数进一步增加，$D\in[1.66,\ 2]$，图中的点呈现出离散状态，系统的振动状态更加复杂，系统趋近于混沌运动。这是分形维数的增加，动态侧隙的复杂程度增加所导致的。

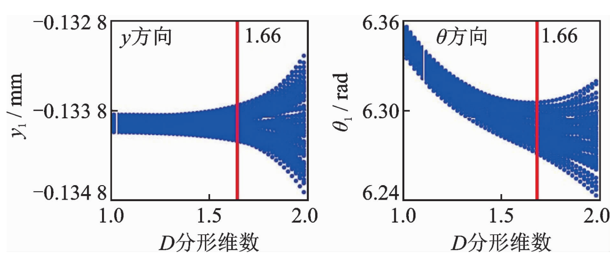


图 6　y，θ 方向分岔图

Fig. 6　Bifurcation diagram in the y，θ direction

在图 8～图 10 中，相应的 Poincaré 图显示，随分形维数的增加，图中点的离散程度增加。当 D=1.1 时，Poincaré 图中的点显示为点团；D=1.5，Poincaré 图中的点团离散程度较小；D=1.9，图中的点离散程度大，且分布较广。Poincaré 截面上点逐渐由集中变为分散，系统由准周期运动逐步变为

混沌运动。

如图 11 所示，$D=1.1$，$D=1.5$，$D=1.7$ 及 $D=1.9$ 的相平面轨迹进行对比，D 由 1.1 增加至 1.9 过程中，系统在 y 方向的响应，相平面轨迹微小变宽。在扭转方向上，D 由 1.1 到 1.7，相图轨迹逐渐收缩；D 由 1.7 到 1.9，其相图轨迹逐渐变宽。$b_h(t)$ 的 STD 值由 $D\in[1.1,\ 1.7]$ 逐渐减小，动态侧隙的峰值波动性变小；$D\in[1.7,\ 1.9]$ 区间内其 STD 值逐渐增大，动态侧隙的峰值波动性变大。波动性的变化导致了相平面的缩放现象，但对系统的振动状态影响不大。

系统响应的局部 FFT 谱中，在 y，θ 方向上，系统的特征频率幅值变化不大，$13f_{r1}$ 幅值激增。在 θ 方向上，在 0～200 Hz 上明显出现了噪声频率，且噪声频率的幅值随动态侧隙曲线的复杂程度的增加而增大。当 $D=1.9$ 时，噪声频率将覆盖系统的转频，这显示了在 y，θ 方向上不同的振动特性。

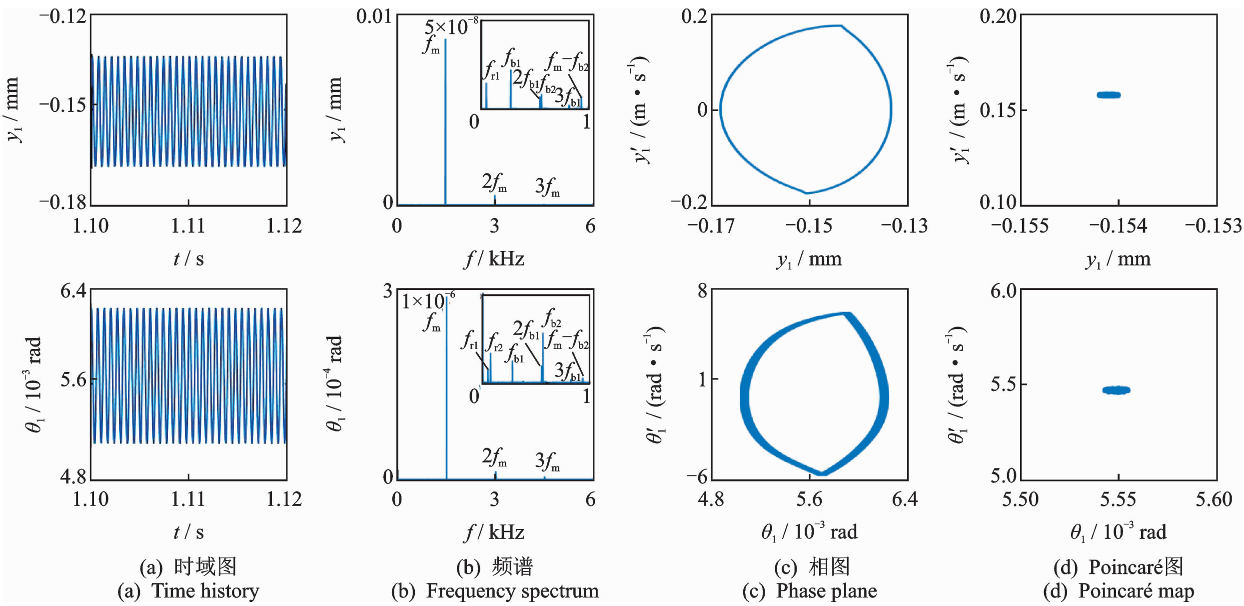


图 7 定侧隙的振动响应

Fig. 7 Vibration response for fixed backlash

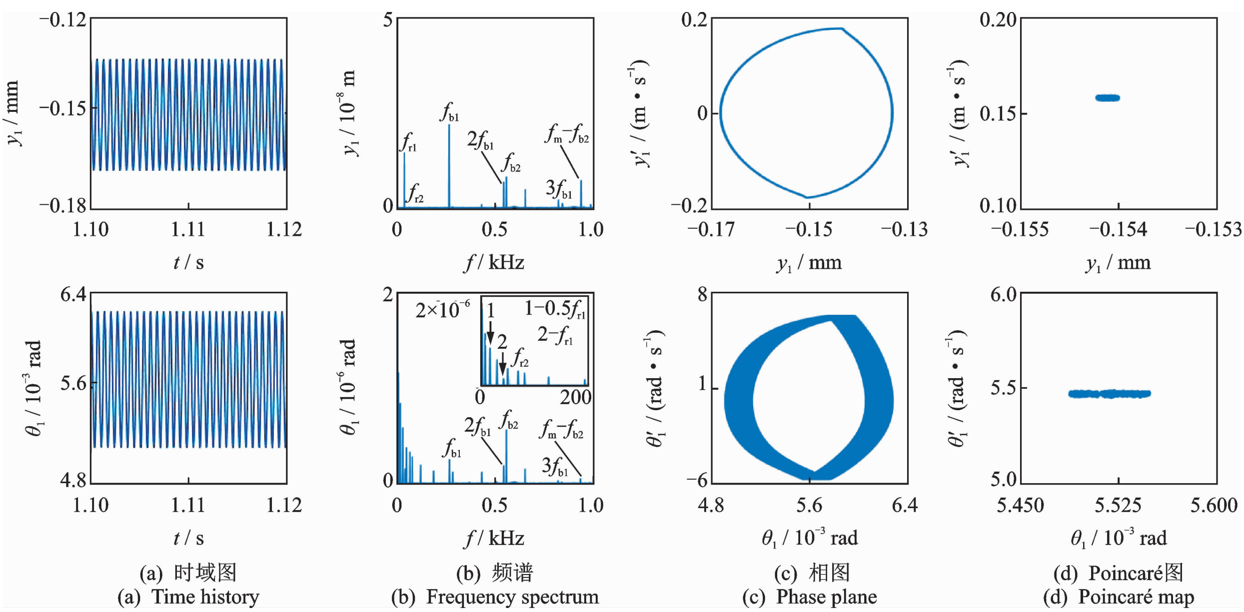
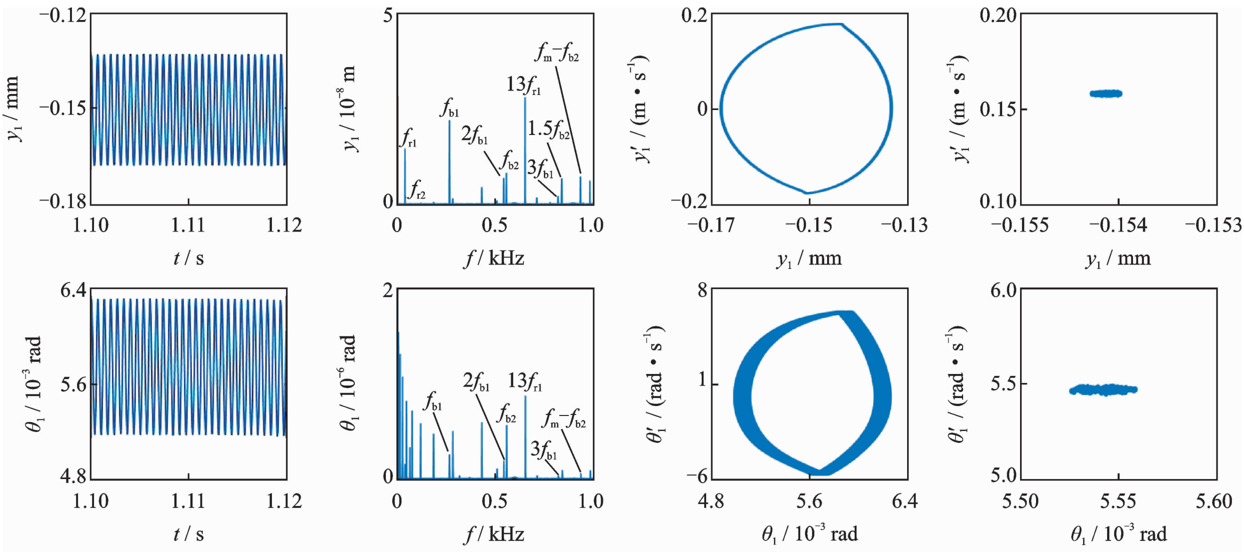


图 8 $D=1.1$ 时的振动响应

Fig. 8 Vibration response for $D=1.1$



(a) 时域图
(a) Time history

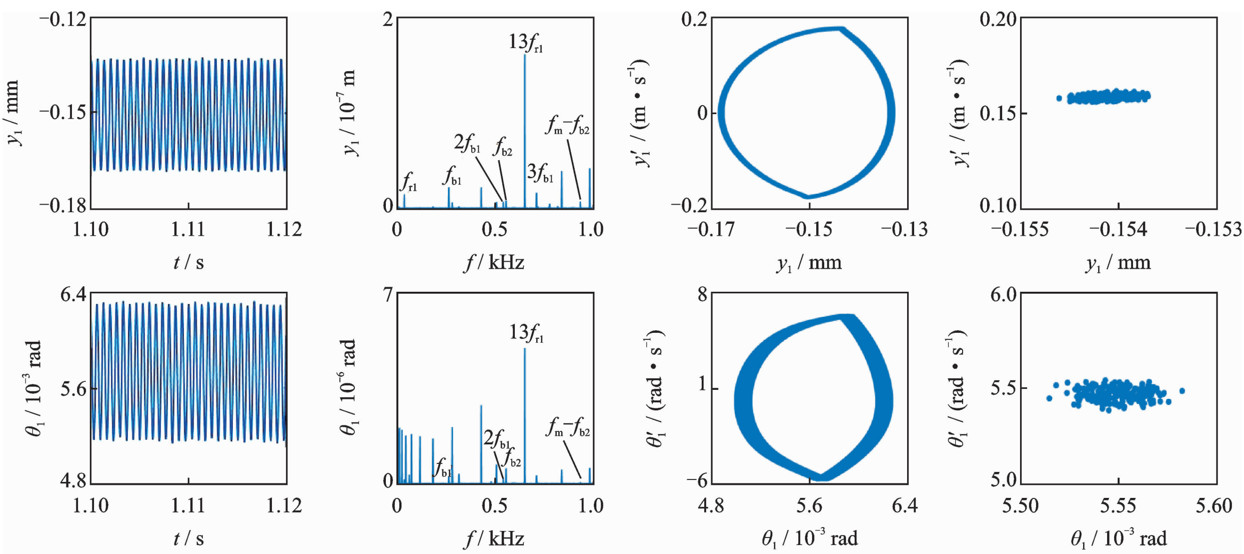
(b) 频谱
(b) Frequency spectrum

(c) 相图
(c) Phase plane

(d) Poincaré图
(d) Poincaré map

图 9　$D=1.5$ 时的振动响应

Fig. 9　Vibration response for $D=1.5$



(a) 时域图
(a) Time history

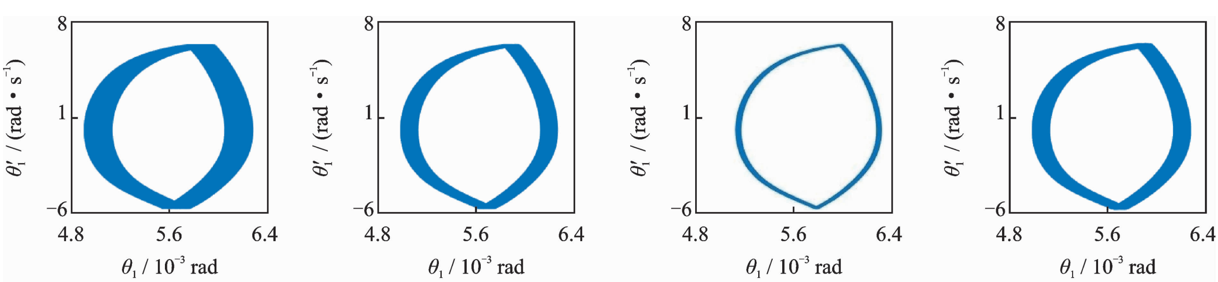
(b) 频谱
(b) Frequency spectrum

(c) 相图
(c) Phase plane

(d) Poincaré图
(d) Poincaré map

图 10　$D=1.9$ 时的振动响应

Fig. 10　Vibration response for $D=1.9$



(a) D=1.1　(b) D=1.5　(c) D=1.7　(d) D=1.9

图 11　扭转方向上相图轨迹比较

Fig. 11　Comparison of trajectories in phase diagrams in θ direction

3 结 论

1）动态侧隙峰值的波动性影响系统响应的相平面轨迹和时域波形，$b_h(t)$ 的 STD 值越大，相图轨迹范围越大，时域振幅波动越大。

2）动态侧隙曲线的复杂程度影响齿轮传动系统的运动状态，D 值逐步增加，其复杂程度随之增加，系统的运动状态变化非常明显，Poincaré 截面上的点逐渐发散，动态侧隙系统由准周期运动最后变为混沌运动。

3）当动态侧隙曲线的复杂程度增加时，y 和 θ 方向上 FFT 谱中 $13f_{r1}$ 幅值激增 10 倍，系统的特征频率幅值变化不大。θ 方向上的 FFT 谱显示，随着复杂程度的增加，谱图中的频数随之增加，且噪声频率的幅值增大，齿轮振动响应变得复杂。

参 考 文 献

[1] KAHRAMAN A, SINGH R. Interactions between time varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system [J]. Journal of Sound & Vibration, 1991,146(1):135-156.

[2] ZHOU S H, SONG G, SUN M, et al. Nonlinear dynamic response analysis on gear-rotor-bearing transmission system [J]. Journal of Vibration and Control, 2016,24(9):1-20.

[3] FARSHIDIANFAR A, SAGHAFI A. Bifurcation and chaos prediction in nonlinear gear systems [J]. Shock and Vibration, 2014,2:1-8.

[4] WANG J, LIM T, LI M. Dynamics of a hypoid gear pair considering the effects of time-varying mesh parameters and backlash nonlinearity [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007,308:302-329.

[5] XIANG L, GAO N. Coupled torsion-bending dynamic analysis of gear-rotor-bearing system with eccentricity fluctuation [J]. Applied Mathematical Modelling, 2017,50:569-584.

[6] 向玲，贾轶，高雪媛，等. 间隙对齿轮-转子-轴承系统弯扭耦合振动的影响分析[J]. 振动与冲击，2016，35(21):1-8.

XIANG Ling, JIA Yi, GAO Xueyuan, et al. Effects of backlash on bending-torsion coupled vibration of a gear-rotor bearing system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2016,35(21):1-8.(in Chinese)

[7] CHEN S, TANG J, LUO C, et al. Nonlinear dynamic characteristics of geared rotor bearing systems with dynamic backlash and friction [J]. Mechanism and Machine Theory, 2011,46:466-478.

[8] CHEN Q, MA Y, HUANG S, et al. Research on gears′ dynamic performance influenced by gear backlash based on fractal theory[J]. Applied Surface Science, 2014,313:325-332.

[9] WALHA L, FAKHFAKH T, HADDAR M. Nonlinear dynamic of a two-state gear system with mesh stiffness fluctuation bearing flexibility and backlash [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44: 1058-1069.

[10] MAJUMDAR A, TIEN C. Fractal characterization and simulation of rough surfaces [J]. Wear, 1990, 136(2): 313-327.

[11] WANG S, KOMVOPOULOS K. A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime part I elastic contact and heat transfer analysis [J]. Journal of Tribology, 1994, 116: 812-822.

第一作者简介：刘杰，女，1980 年 2 月生，博士、副教授。主要研究方向为齿轮传动系统非线性动力学。曾发表《Nonlinear dynamic characteristic of gear system with the eccentricity》(《Journal of Vibroengineering》2015, Vol. 17, No. 5)等论文。

E-mail:liuj@sut.edu.cn