

# 基于激光测振的转动自由度模态识别方法<sup>\*</sup>

杨陈云, 臧朝平, 黄梓

(南京航空航天大学能源与动力学院 南京, 210016)

**摘要** 提出了一种基于多普勒激光测振技术的转动自由度模态振型测试与识别方法。首先,利用多普勒激光测振技术测量试验结构上各测点及其相邻点的平动自由度同步时域响应;其次,通过差分法计算测点转动自由度时域响应以得到频响函数;最后,对平动与转动自由度频响函数进行模态分析,即可获取各测点的平动与转动振型。通过对平板的试验分析,验证了基于多普勒激光测振技术进行转动自由度模态振型识别的可行性和准确性,为转动自由度模态振型的测试与识别提供了一种有效的解决方案。

**关键词** 多普勒激光测振;转动自由度;平动自由度;差分法

**中图分类号** TB53;TN249

## 引言

传统的模态试验技术只关注结构的平动自由度,但是很多问题往往也与转动自由度相关。在动力学修正<sup>[1]</sup>研究领域,针对结构转动惯量或刚度修正时,需要测量转动自由度进行模型修正。在基于模态应变能的损伤识别研究中,转动自由度的测试对试验结构模态应变能的计算至关重要。此外,在动力学缩减以及动态子结构法<sup>[2]</sup>与结构声源特性表征<sup>[3]</sup>等研究领域中,需要获取全自由度(平动和转动)的频响函数,以建立完整的动力学响应模型。因此,实现转动自由度的测量在动力学各研究领域中十分重要。

目前,对转动自由度的测量方法主要有模态扩展法、纯弯矩激励法以及差分法。模态扩展法<sup>[4-6]</sup>主要是利用包含主节点自由度的测量数据,从节点自由度的常数值混合向量对不完备的测试模态振型进行模态扩展,不依赖于试验技术。纯弯矩激励法是通过结构施加纯弯矩,利用角度传感器获取结构的转动自由度。该方法的难点在于如何对结构施加纯弯矩,并测量弯矩大小。目前施加纯弯矩的方式主要有:双摇杆装置<sup>[7]</sup>、T形块<sup>[1,8]</sup>及同步力锤<sup>[9]</sup>。在实际测试中,上述装置需要安装在测试结构上以产生纯弯矩激励,在安装使用上存在一定的局限性。差分法是通过空间数值微分获取转动自由度,不需

要纯弯矩激励,被认为是最实际可行的测试方法之一。Duarte 等<sup>[10]</sup>对不同差分步长进行了试验对比分析,发现步长的提高将会降低测试噪声的干扰,但同时会使高阶模态测试效果变差。汪凤泉等<sup>[11]</sup>基于差动式原理,利用传统的传感器,对梁结构进行转动自由度的测量。20 世纪 90 年代以来,激光多普勒测振技术(laser Doppler vibrometer,简称 LDV)<sup>[12]</sup>作为一种非接触测振方式,其测试时间短,测试振型分辨率高,并且克服了传统加速度传感器附加质量的影响,被广泛应用于结构模态测试。Stanbridge 等<sup>[13]</sup>采用激光多普勒测振对测点周围 4 个离散点进行正弦扫描,通过分析测点频响函数边带谱测量转动自由度。激光测振技术的发展,使差分法得以进一步发展。

笔者提出了一种基于多普勒激光测振技术的转动自由度模态振型测试识别方法,可同时获取试验结构全局测点的平动与转动自由度模态振型,效率高、可操作性强。由于转动自由度模态测试不满足互异性定理,试验采用单点激励、多点响应的测试方案,因此需移动传感器布点依次测量各测点及其相邻点的平动自由度同步时域响应,再由差分法得到测点转动自由度时域响应。实际测试结构测点众多,通过传统的接触式传感器难以实现,非接触式的激光测振技术为该测试方案提供了可行性。由试验测得平动与转动自由度时域响应以计算其频响函数,最后通过模态分析即可得到测试结构全局测点

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金委员会与中国工程物理研究院联合基金资助项目(U1730129)

收稿日期:2018-11-06;修回日期:2019-01-10

的平动与转动自由度模态振型。

## 1 转动自由度测试及模态识别

### 1.1 转动自由度模态分析理论

由多自由度系统的振动方程可知,对由  $n$  个平动自由度和  $m$  个转动自由度组成的系统,当受到激振力后的受迫振动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}e^{i\omega t} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{M}$  为由  $n$  个平动自由度的惯性质量和  $m$  个转动自由度的转动惯量以及它们构成的耦合项组成的  $(n+m) \times (n+m)$  的质量矩阵; $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  分别为  $(n+m) \times (n+m)$  的阻尼和刚度矩阵; $\mathbf{X}$  由  $n$  个平动自由度和  $m$  个转动自由度构成。

设式(1)中阻尼可以解耦,利用振型矩阵  $\boldsymbol{\varphi}$  对其进行解耦

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{F}e^{i\omega t} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^T & \boldsymbol{\varphi}^R \\ \boldsymbol{\varphi}^T & \boldsymbol{\varphi}^R \end{bmatrix} \quad (3)$$

该系统是转动与平动耦合的系统,存在力激励、弯矩激励两种激励方式。在振型矩阵  $\boldsymbol{\varphi}$  中: $\boldsymbol{\varphi}^T$ ,  $\boldsymbol{\varphi}^R$  为力激励下产生的平动和转动自由度振型; $\boldsymbol{\varphi}^T$ ,  $\boldsymbol{\varphi}^R$  为弯矩激励下产生的转动和平动自由度振型。

假设在  $P$  点激励,利用坐标变化  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{q}$ , 可得  $L$  点响应

$$\mathbf{X}_{LP} = \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\mathbf{F}\boldsymbol{\varphi}_{Lr}\boldsymbol{\varphi}_{Pr}e^{i\omega t}}{m_r[(\omega_r^2 - \omega^2) + 2j\xi_r\omega_r\omega]} \quad (4)$$

因此,  $L$  点的频响函数为

$$H_{LP}(\omega) = \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\boldsymbol{\varphi}_{Lr}\boldsymbol{\varphi}_{Pr}}{m_r[(\omega_r^2 - \omega^2) + 2j\xi_r\omega_r\omega]} \quad (5)$$

试验存在力激励与弯矩激励两种激励方式,本研究采用的激励方式为力激励。振型矩阵  $\boldsymbol{\varphi}$  中仅存在  $\boldsymbol{\varphi}^T$  和  $\boldsymbol{\varphi}^R$ , 因此系统的频响函数为

$$H_{LP}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\boldsymbol{\varphi}_{Lr}^T \boldsymbol{\varphi}_{Pr}^T}{m_r[(\omega_r^2 - \omega^2) + 2j\xi_r\omega_r\omega]} + \sum_{r=n+1}^{n+m} \frac{\boldsymbol{\varphi}_{Lr}^R \boldsymbol{\varphi}_{Pr}^R}{m_r[(\omega_r^2 - \omega^2) + 2j\xi_r\omega_r\omega]} \quad (6)$$

显然,平动与转动耦合的系统在力激励下的系统频响函数包含平动与转动自由度两个部分。基于目前的模态测试技术,各测点平动自由度的频响函数可以通过加速度传感器测得,而转动自由度频响函数尚缺少有效的测试方法。

### 1.2 转动自由度测试原理

笔者利用差分法,测量各测点平动与转动自由

度时域响应,计算频响函数。在板壳单元中,每个结点具有 3 个平动以及 3 个转动自由度  $(u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$ , 如图 1 所示。

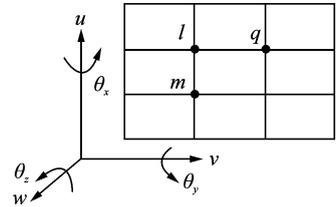


图 1 壳单元自由度示意图

Fig. 1 Freedom of shell

本研究对象为平板结构,根据经典板壳理论<sup>[14]</sup>,其主要是垂直于单元平面的平动  $w$  以及绕  $x, y$  轴的转动  $\theta_x, \theta_y$  这 3 个自由度的振动,板壳单元任意结点的转动自由度振型是平动的一阶微分

$$\begin{cases} \theta_x = -\partial w / \partial y \\ \theta_y = \partial w / \partial x \end{cases} \quad (7)$$

通过激光传感器,获取测点  $l$  以及其相邻点  $q, m$  的平动自由度  $w$  的同步时域响应  $f(x_l, y_l)$ ,  $f(x_q, y_q)$  和  $f(x_m, y_m)$ , 此时测点  $l$  的转动自由度  $\theta_x, \theta_y$  的时域响应(即差分公式)为

$$\begin{cases} \theta_x \approx \frac{f(x_l, y_l) - f(x_q, y_q)}{y_q - y_l} \\ \theta_y \approx \frac{f(x_l, y_l) - f(x_m, y_m)}{x_l - x_m} \end{cases} \quad (8)$$

因此,平板结构上任意测点  $l$  的平动与转动自由度  $(w, \theta_x, \theta_y)$  的时域响应均可由试验测得。对测点的平动与转动频响函数进行模态分析,即可得到结构的平动与转动自由度的模态振型。

## 2 平板试验验证

### 2.1 平板转动自由度测试

为了验证转动自由度测试方法的有效性,对平板进行试验验证。平板试验装置与激光测振仪如图 2 所示,试验平板一端固支,共布置 171 个测点。

激光测试方案如图 3 所示,非接触式的激光测



图 2 平板试验装置与激光测振仪

Fig. 2 Plate experimental device and LDV

振仪无需固定在测试结构上,布置测点快捷,极大地缩减了全局测点的测试周期,更避免了附加质量的不良影响。试验采用力锤在固定点激励,利用3个激光传感器依次测量各测点以及其相邻两点的平动自由度  $w$  的同步时域响应,再通过差分法获得测点转动自由度时域响应,选取139号测点平动与转动自由度时域响应,如图4所示。

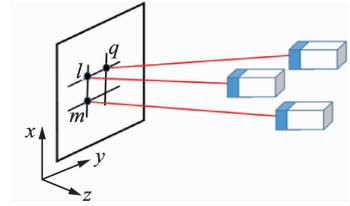


图3 转动自由度测试方案

Fig. 3 Rotational degree-of-freedom test program

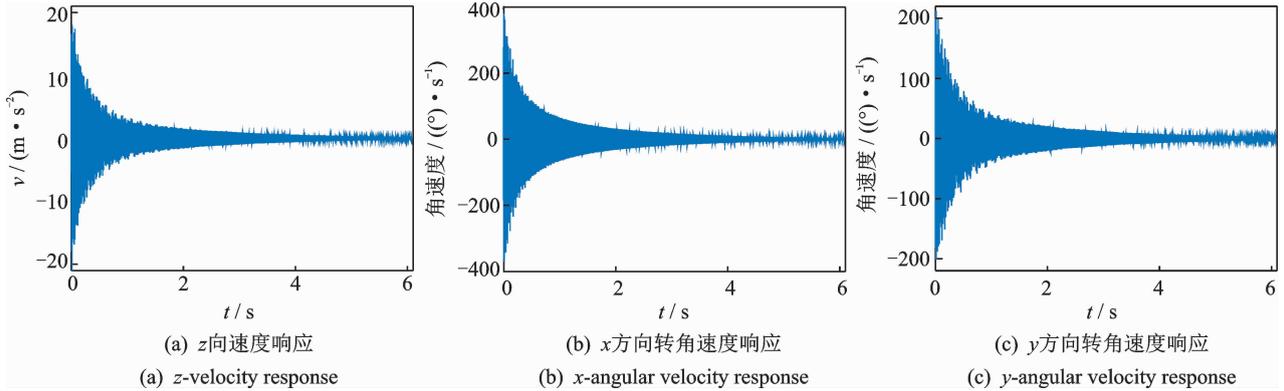


图4 139号测点时域响应图

Fig. 4 Time domain response of test point 139

## 2.2 结果对比

时域响应,计算得到各测点平动与转动频响函数,选取原点与跨点频响函数如图5、图6所示。有限元模型与试验得到的平动与转动频响函数振幅、相位

试验由多普勒激光测振仪获得各点平动与转动

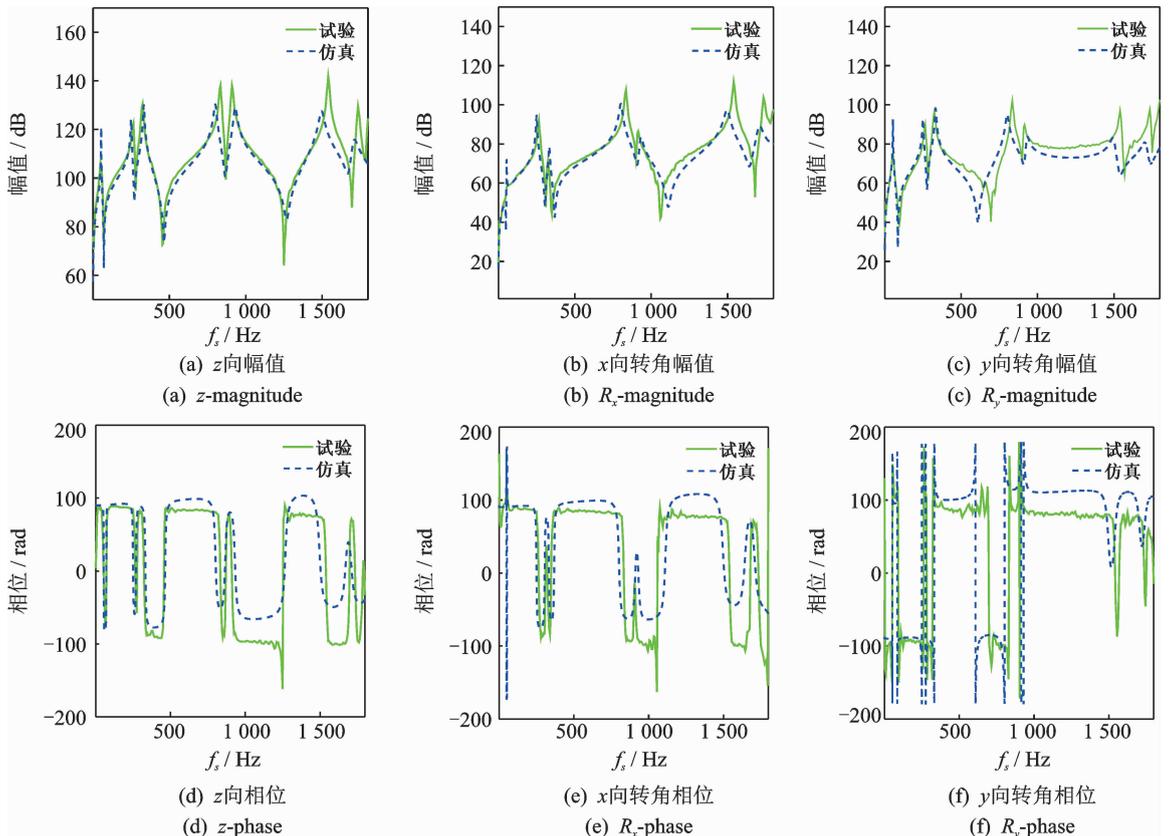


图5 原点频响函数仿真与试验对比

Fig. 5 Comparison of origin frequency response function from test and simulation

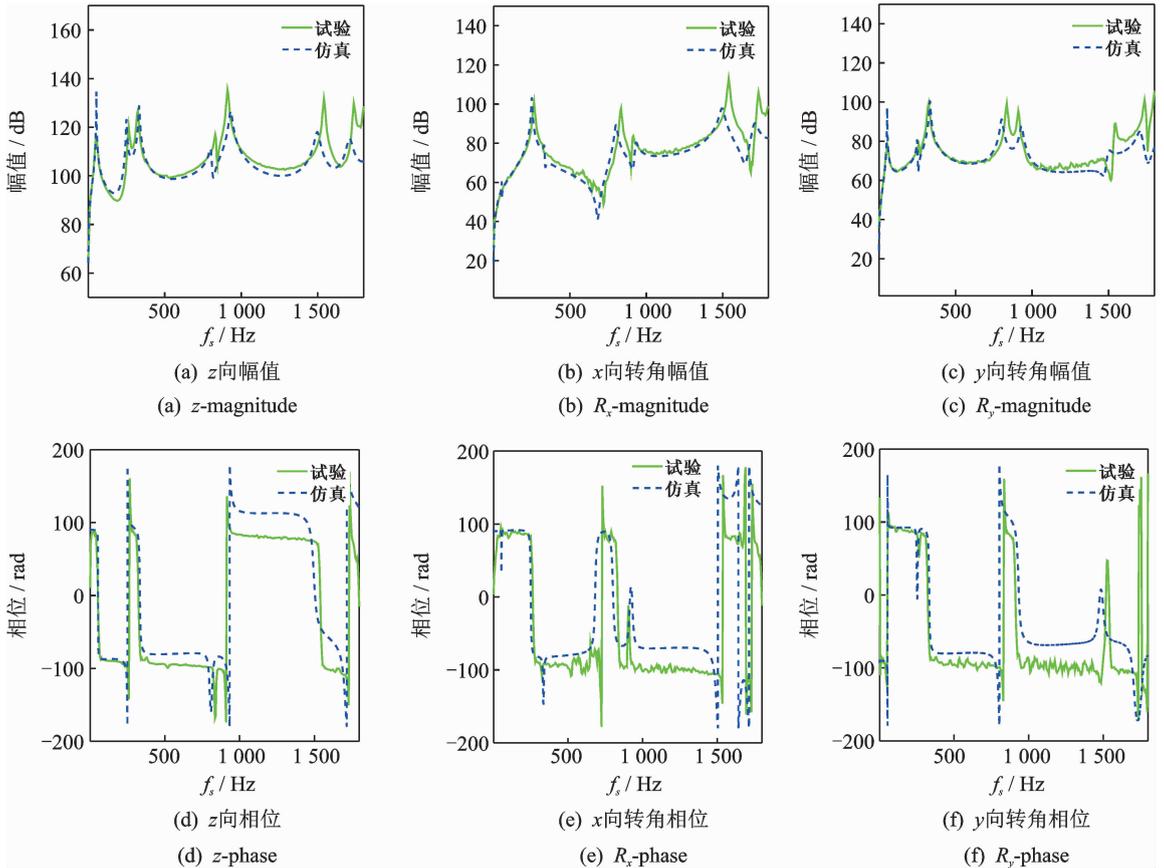


图 6 跨点频响函数(139 点激励,70 点响应)仿真与试验对比

Fig. 6 Comparison of cross frequency response function(exciting at point 139 and measured at point 70) from test and simulation

吻合度较高,验证了利用差分法测量转动自由度频响函数的有效性。

对平板各测点平动与转动频响函数进行模态分析,得到其平动与转动自由度振型。平板试验与有限元模型仿真的前 6 阶模态振型相关性如表 1 所示。其中,平动自由度  $w$  是平板主要的振动方向,各阶相关性均较好,模态置信准则(modal assurance criteria,简称 MAC)在 0.98 以上,其仿真与试验振型对比如图 7 所示。第 2,3,5 阶模态主要是  $z$  向的

表 1 试验与有限元模型仿真 MAC

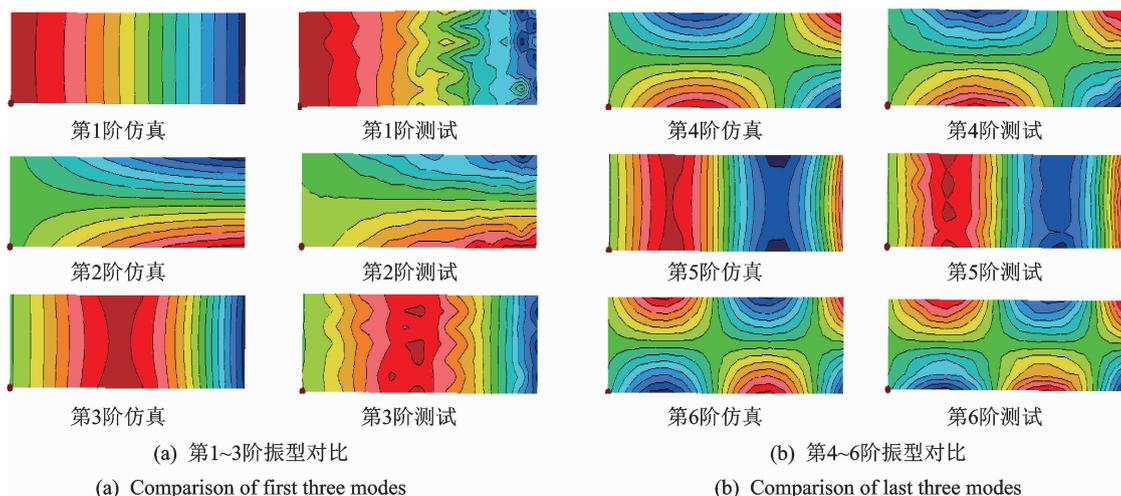
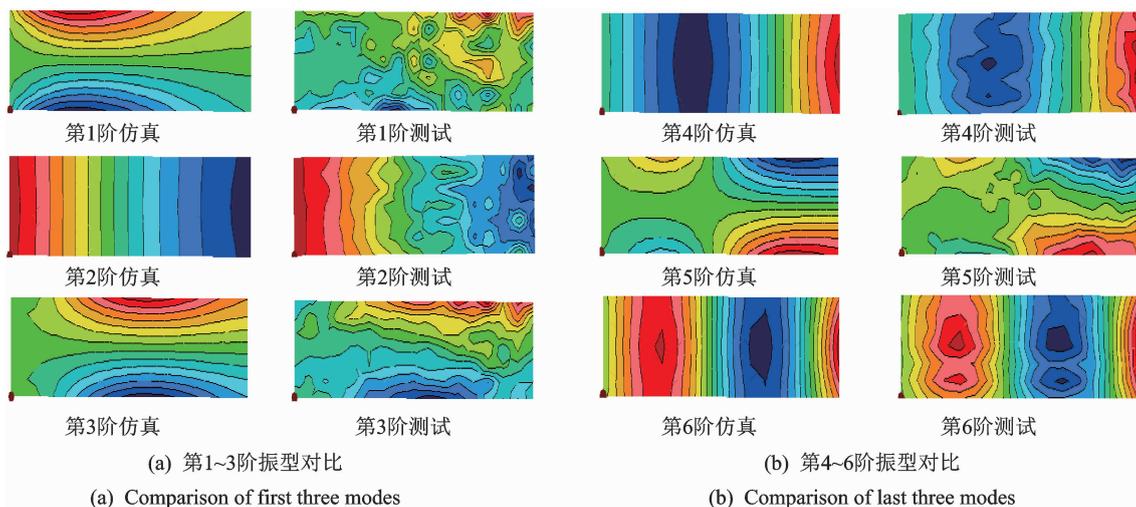
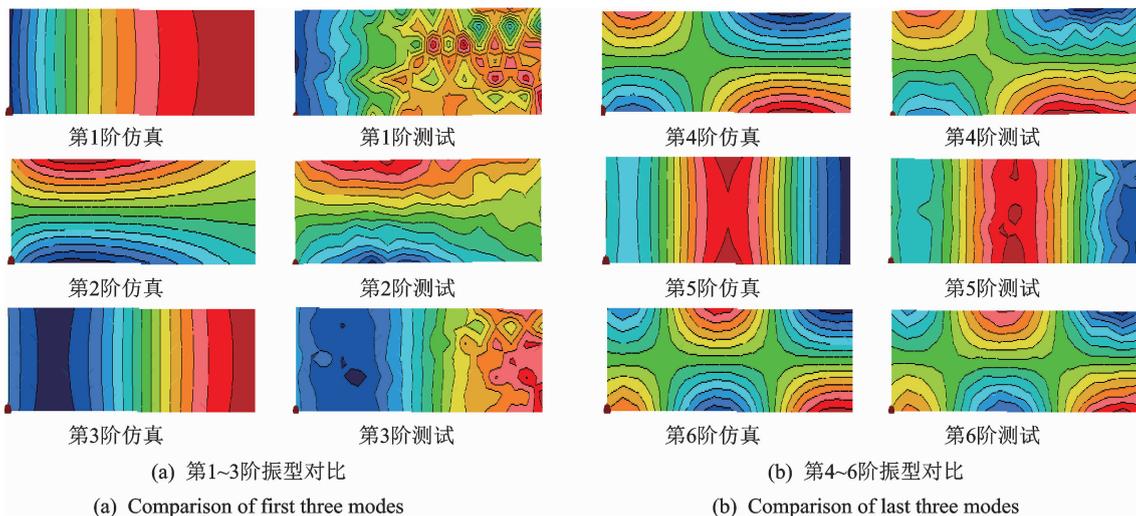
Tab. 1 MAC of test and simulation

阶次	试验	仿真	频率误差/%	MAC		
	频率/Hz	频率/Hz		$w$	$\theta_x$	$\theta_y$
1	52.1	54.1	3.8	0.98	0.29	0.97
2	264.0	253.0	-4.2	0.99	0.99	0.97
3	323.0	336.4	4.1	0.99	0.85	0.98
4	834.2	810.8	-2.8	0.99	0.99	0.98
5	911.1	940.3	3.2	0.99	0.93	0.99
6	1 541.2	1 514.8	-1.7	0.99	0.98	0.99

平动与绕  $y$  轴的转动,绕  $x$  轴的转动较小,因此  $\theta_x$  测试振型不理想,MAC 较低,  $\theta_x$  仿真与试验振型对比如图 8 所示。在前 6 阶模态中,平板绕  $y$  轴的转动明显,因此  $\theta_y$  测试振型理想,且优于  $\theta_x$  测试结果,  $\theta_y$  仿真与试验振型对比如图 9 所示。此外,平板转动自由度  $\theta_x, \theta_y$  在测试频率内高阶的相关性优于低阶,这是因为转动自由度在高频表现明显,不易受噪声干扰。从图中还可看出,在平板边缘区域振幅较大,激光测量时域响应时,激光实际测量位置存在偏移,导致时域响应数据测量不够理想,从而影响了转动自由度的测试分析结果。

### 3 结束语

本研究基于非接触式的多普勒激光测振技术,利用差分法进行转动自由度模态振型试验,并利用平板结构进行试验验证。测试结果表明,该方法可有效获取试验结构全局测点的平动与转动自由度频响函数和模态振型。但是,利用激光测振仪测量振

图7 仿真与试验平动自由度振型( $w$ )对比Fig. 7 Translational shapes ( $w$ ) comparison of simulation and test图8 仿真与试验转动自由度振型( $\theta_x$ )对比Fig. 8 Rotational shapes ( $\theta_x$ ) comparison of simulation and test图9 仿真与试验转动自由度振型( $\theta_y$ )对比Fig. 9 Rotational shapes ( $\theta_y$ ) comparison of simulation and test

动响应,比传统的传感器更容易受到噪声的影响。由于试验噪声的影响,平板低阶模态以及边缘区域存在较多振型畸点。当模态阶次增高时,转动自由度在模态振型中表现越明显,分析结果精度越高。

## 参 考 文 献

- [1] MOTTERSHEAD J E, KYPRIANOU A, OUYANG H. Structural modification, part 1: rotational receptances [J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2005, 284(1):249-265.
- [2] DROZG A, ĆEPON G, BOLTEZAR M. Full-degrees-of-freedom frequency based substructuring [J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2018, 98: 570-579.
- [3] ELLIOTT A, MOORHOUSE A T. Characterisation of structure borne sound sources from measurement in-situ [J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2008, 123(5):1477-1482.
- [4] O'CALLAHAN J C. System equivalent reduction expansion process [C] // *Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference*. Las Vegas, Kissimmee: Union College, 1989:29-37.
- [5] CHEN H P. Mode shape expansion using perturbed force approach [J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2010, 329(8):1177-1190.
- [6] LIU F, LI H. A two-step mode shape expansion method for offshore jacket structures with physical meaningful modelling errors [J]. *Ocean Engineering*, 2013, 63(5):26-34.
- [7] SANDERSON M A. Direct measurement of moment mobility, part II: an experimental study [J]. *Journal of Sound & Vibration*, 1995, 179(4):685-696.
- [8] CHENG L, QU Y C. Rotational compliance measurements of a flexible plane structure using an attached-beam-like tip, part 1: analysis and numerical simulation [J]. *Journal of Vibration & Acoustics*, 1997, 119(4):596-602.
- [9] CHAMPOUX Y, COTONI V, PAILLARD B, et al. Moment excitation of structures using two synchronized impact hammers [J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2003, 263(3):515-533.
- [10] DUARTE M L M, EWINS D J. Rotational degrees of freedom for structural coupling analysis via finite-difference technique with residual compensation [J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2000, 14(2):205-227.
- [11] 汪凤泉, 王敏. 转角振型的全模态试验识别 [J]. *振动、测试与诊断*, 1993, 13(1):12-20.  
WANG Fengquan, WANG Min. A method of rotational normal mode for all modal experiment [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 1993, 13(1):12-20. (in Chinese)
- [12] CASTELLINI P, REVEL G M, TOMASINI E P. Laser Doppler vibrometry: a review of advances and applications [J]. *Shock & Vibration Digest*, 1998, 30(6):443-456.
- [13] STANBRIDGE A B, EWINS D J. Measurement of translational and angular vibration using a scanning laser Doppler vibrometer [J]. *Vibration Measurements*, 1994, 2358(2):37-47.
- [14] 王勣成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法 [M]. 2版. 北京:清华大学出版社, 1997:398-399.



第一作者简介:杨陈云,女,1994年7月生,硕士生。主要研究方向为动力学建模及模型修正技术。

E-mail: yangchenyun0212@163.com

通信作者简介:臧朝平,男,1963年5月生,教授、博士生导师。主要研究方向为航空发动机结构动力学建模、仿真与测试。

E-mail: c. zang@nuaa.edu.cn