

不同齿根裂纹深度的啮合刚度与振动响应分析*

刘 杰, 孙玉凤, 李环宇

(沈阳工业大学机械工程学院 沈阳, 110870)

摘要 针对裂纹对啮合刚度的影响,首先,利用裂纹尖端到单齿中线的距离(h_{c1}, h_{c2})与1/2齿顶圆齿厚(h_r)的关系把齿根裂纹模型分为3种情况,利用能量法原理分析啮合刚度随着裂纹深度增大的变化趋势;其次,通过有限元法分析不同深度的齿根裂纹齿轮啮合刚度,进而验证了模型的有效性;最后在啮合刚度的基础上,建立齿轮系统动力学模型,分析含不同齿根裂纹深度的齿轮系统振动响应。研究表明,啮合刚度随着裂纹深度的增大而减小,且减小幅度逐步增大,当裂纹深度大于50%时减小幅度加剧;振动响应随裂纹深度的增大而加剧且出现周期性冲击,啮合频率附近产生微小杂频,相位图和庞加莱图中轨迹和离散点聚集区逐步增大。

关键词 啮合刚度; 齿根裂纹; 能量法; 有限元法; 振动响应

中图分类号 TH132

引 言

齿轮啮合刚度的周期性变化是齿轮系统产生振动的主要内部激励。啮合刚度会随轮齿的变形而改变,从而导致系统产生振动和噪声等问题,影响机械设备的正常工作。吴家腾等^[1]利用解析有限元法分析了不同裂纹深度下的啮合刚度并研究了其对振动响应的影响。Wu等^[2]通过能量法计算出不同裂纹模型下的齿轮啮合刚度,同时分析了含裂纹故障的齿轮系统振动响应的变化。万志国等^[3-4]分析了齿根裂纹扩展及不同深度的齿根裂纹对时变啮合刚度的影响。王旭等^[5]考虑齿轮的时变啮合刚度、传动误差和轴承支撑刚度的影响,分析了故障齿轮系统的信号特征。文献[6-7]在分析齿轮时变啮合刚度时,考虑较为真实的过渡曲线,对现有的能量法计算齿轮啮合刚度作了进一步修正。胡信鹏^[8]利用能量法推导出齿根裂纹深度不超过半齿厚时的啮合刚度计算公式,分析了含齿根裂纹故障的齿轮啮合刚度。杨文广等^[9]将行星齿轮的太阳轮断齿故障等效到时变啮合刚度中,对其正常和断齿状态下的动力学模型进行求解。刘杰等^[10]将轮齿简化为悬臂梁分析齿轮的刚度计算方法,研究了太阳轮齿根裂纹对系统响应的影响。Wang等^[11]提出了一种计算齿轮副时变啮合刚度的解析模型,分析了齿轮啮合刚

度与振动特征在时域和频域的关系。Shao等^[12]建立了行星轮系的动力学模型,分析了齿根裂纹对系统振动响应的影响。Rezaei等^[13]提出了一种用来检测斜齿轮中含多裂纹位置的方法。Yu等^[14]分析了含齿根裂纹故障的齿轮对系统动态特性的影响。Jin等^[15]利用小波原理去噪,再利用经验模态分解特性,分析裂纹齿对系统动态响应的影响。崔玲丽等^[16]利用能量法与有限元法,研究了齿轮啮合刚度,但没有根据裂纹深度的不同对齿根裂纹模型分类细化。国内外许多著名学者都对含裂纹故障的齿轮啮合刚度进行了大量的研究,但是对于划分出不同深度的裂纹模型所对应的弯曲刚度与剪切刚度原理的研究相对较少。

笔者把齿根裂纹划分为3种情况,即根据裂纹尖端到单齿中线的距离(h_{c1}, h_{c2})与1/2齿顶圆齿厚(h_r)的关系分为: $h_{c1} \geq h_r, h_{c1} \leq h_r, h_{c2} \leq h_r$ 裂纹深度 $q > q_{max}$ 时。利用能量法原理及不同齿根裂纹模型下的弯曲刚度、剪切刚度公式,分析了齿轮啮合刚度随裂纹深度增大的变化。同时,利用ANSYS有限元软件,建立齿轮系统有限元模型,计算出不同齿根裂纹模型的齿轮啮合刚度,从而验证了把齿根裂纹模型分为3种情况所计算出的啮合刚度的准确性。在啮合刚度的基础上,建立多自由度齿轮系统动力学模型分析了裂纹对齿轮系统振动响应的影响。

* 国家自然科学基金资助项目(51675350);辽宁省教育厅科学研究资助项目(LQGD2020016)

收稿日期:2019-03-05;修回日期:2019-05-07

1 齿轮副啮合刚度计算原理

1.1 健康齿轮啮合刚度计算

能量法计算齿轮的啮合刚度是一种较为精确的计算方法,在直齿圆柱齿轮上可以把每个轮齿当作一个变截面的悬臂梁。轮齿的啮合刚度为齿面法向作用力与变形量之比,因而齿轮啮合刚度可以看作是法向力与悬臂梁在作用力下的变形之比。齿轮中所存储的能量主要包括赫兹能量、弯曲能量、压缩能量及剪切能量,与各能量相对应的为赫兹刚度、弯曲刚度、压缩刚度及剪切刚度,各啮合刚度的串联为总啮合刚度。

各能量公式为

$$\begin{cases} U_h = \frac{F^2}{2k_h} \\ U_b = \frac{F^2}{2k_b} \\ U_a = \frac{F^2}{2k_a} \\ U_s = \frac{F^2}{2k_s} \end{cases} \quad (1)$$

其中: U_h 为赫兹能量; U_b 为弯曲能量; U_a 为压缩能量; U_s 为剪切能量; F 为啮合点处的作用力; k_h 为赫兹接触刚度; k_b 为弯曲刚度; k_a 为压缩刚度; k_s 为剪切刚度。

根据赫兹定理可知,赫兹刚度与接触位置无关。赫兹接触刚度^[17]可表示为

$$k_h = \frac{\pi EL}{4(1-\nu^2)} \quad (2)$$

其中: E 为弹性模量; L 为齿轮宽度; ν 为泊松比。

根据材料力学悬臂梁理论并结合图 1 可知,弯曲能量、压缩能量和剪切能量公式可表示为

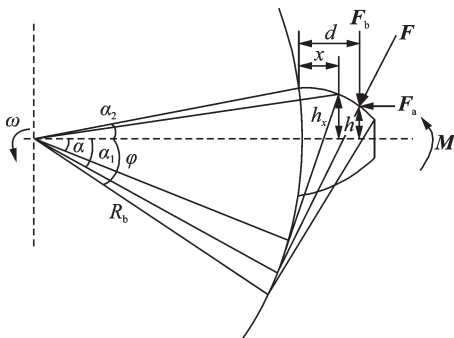


图 1 齿轮受力示意图

Fig.1 Force diagram of gear

$$\begin{cases} U_b = \int_0^d \frac{[F_b(d-x) - M]^2}{2EI_x} dx \\ U_a = \int_0^d \frac{F_a^2}{2EA_x} dx \\ U_s = \int_0^d \frac{1.2F_b^2}{2GA_x} dx \end{cases} \quad (3)$$

其中: I_x 为距离齿根 x 处的截面面积惯性矩; M 为弯矩; $A_x=2h_xL$ 为横截面积; G 为剪切模量; F_a 为啮合力沿水平方向的分力; F_b 为啮合力沿垂直线方向的分力; d 为啮合点到齿根的距离; x 为啮合区任意点到齿根圆的距离。

由式(1),(3)可以推导出弯曲刚度、压缩刚度、剪切刚度

$$\frac{1}{k_b} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{3\{1+\cos\alpha_1[(\alpha_2-\alpha)\sin\alpha-\cos\alpha]\}^2(\alpha_2-\alpha)\cos\alpha}{2EL[\sin\alpha+(\alpha_2-\alpha)\cos\alpha]^3} d\alpha \quad (4)$$

$$\frac{1}{k_a} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(\alpha_2-\alpha)\cos\alpha \sin^2\alpha_1}{2EL[\sin\alpha+(\alpha_2-\alpha)\cos\alpha]} d\alpha \quad (5)$$

$$\frac{1}{k_s} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1.2(1+\nu)(\alpha_2-\alpha)\cos\alpha \cos^2\alpha_1}{EL[\sin\alpha+(\alpha_2-\alpha)\cos\alpha]} d\alpha \quad (6)$$

其中: α 为距离基圆位置 x 处啮合压力角; α_1 为啮合力和竖直线的夹角,等于啮合压力角; α_2 为基圆半齿厚所对的中心角。

由于没有考虑齿轮基体的柔性变形,使得以上方法计算出的啮合刚度值偏大。为了使得计算值更加准确,文献[18]考虑了基体变形对啮合刚度的影响,基体变形所引起的刚度公式为

$$\frac{1}{k_f} = \frac{\cos^2\alpha}{EL} \left\{ L^* \left(\frac{u_f}{s_f} \right)^2 + M^* \left(\frac{u_f}{s_f} \right) + P^* (1 + Q^* \tan^2\alpha) \right\} \quad (7)$$

其中:各参数详见文献[18]。

齿轮的啮合刚度,即为赫兹刚度、弯曲刚度、压缩刚度及剪切刚度和基体变形引起的刚度的串联形式。因此,齿轮啮合刚度公式由式(8),(9)所示。

当一对齿轮啮合时啮合刚度为

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{a2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{f2}}} \quad (8)$$

其中:下角标 1,2 表示主动轮、从动轮。

当两对齿轮啮合时啮合刚度^[16]为

$$k = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{\frac{1}{k_{h,i}} + \frac{1}{k_{b1,i}} + \frac{1}{k_{a1,i}} + \frac{1}{k_{s1,i}} + \frac{1}{k_{l1,i}}} + \frac{1}{\frac{1}{k_{b2,i}} + \frac{1}{k_{a2,i}} + \frac{1}{k_{s2,i}} + \frac{1}{k_{l2,i}}} \right) \quad (9)$$

其中: $i=1$ 时为第1对齿轮啮合; $i=2$ 时为第2对齿轮啮合。

1.2 裂纹齿轮啮合刚度计算

当齿轮产生裂纹时,弯曲刚度和剪切刚度会随着裂纹的产生而变化,赫兹接触刚度、压缩刚度及基体刚度不变。因此,当齿轮产生裂纹时只需对弯曲刚度、剪切刚度进行相应的调整即可。根据本研究实际模型,假设裂纹沿着A到B再到C的路径逐次扩展,当裂纹深度 q 为2.95 mm时达到最大值,裂纹扩展角 β 为 45° ,如图2(a)所示,而在实际建模时裂纹的增长趋势如图2(b)所示。结合文献[2]所述,本模型中含齿根裂纹的弯曲刚度、剪切刚度可分为3种情况,如图3~5所示。

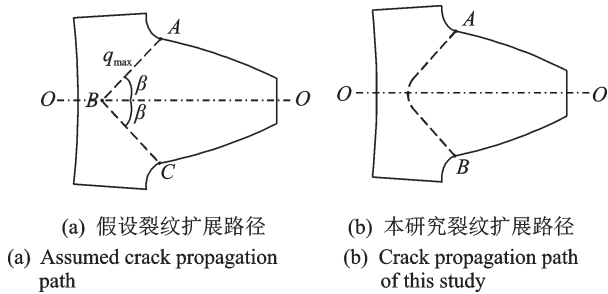


图2 齿根裂纹
Fig.2 Root crack

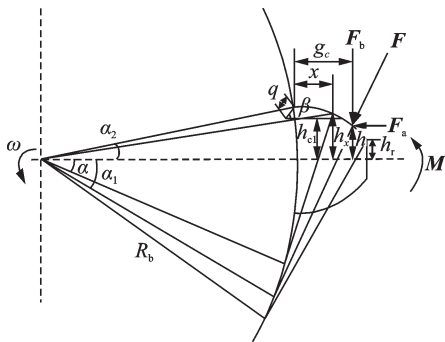


图3 齿根裂纹模型1
Fig.3 Root crack model 1

齿根产生裂纹时,有效截面惯性矩和横截面积会发生改变。当裂纹深度 $q < q_{max}$ 时,有效截面惯性矩和横截面积可表示为

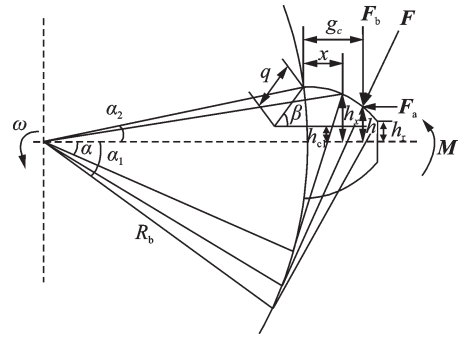


图4 齿根裂纹模型2
Fig.4 Root crack model 2

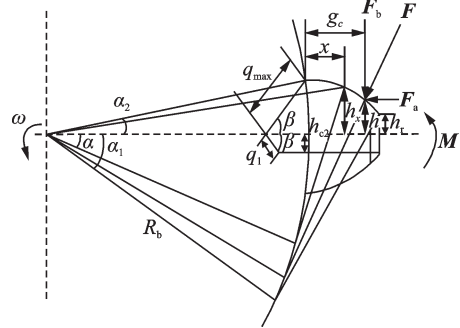


图5 齿根裂纹模型3
Fig.5 Root crack model 3

$$I_x = \begin{cases} \frac{1}{12} (h_{c1} + h_x)^3 L & (0 \leq x \leq g_c) \\ \frac{1}{12} (2h_x)^3 L & (x > g_c) \end{cases} \quad (10)$$

$$A_x = \begin{cases} (h_{c1} + h_x) L & (0 \leq x \leq g_c) \\ (2h_x) L & (x > g_c) \end{cases} \quad (11)$$

其中: h_x 为啮合区内任意一点到齿根圆的距离; g_c 为啮合点到齿根处的距离。

第1种情况:当 $h_{c1} \geq h_r, \alpha_1 < 90^\circ$ 时,此时裂纹深度 q 较小(文中模型 $q \leq 1.84$ mm),如图3所示,含裂纹齿的弯曲刚度和剪切刚度可表示为

$$\frac{1}{k_{bc}} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{12 \{1 + \cos \alpha_1 [(\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha}{EL [\sin \alpha_2 - (q/R_b) \sin \nu + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]^3} d\alpha + \int_{-\pi/2}^{\alpha_1} \frac{3 \{1 + \cos \alpha_1 [(\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha}{2EL [\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]^3} d\alpha \quad (12)$$

$$\frac{1}{k_{sc}} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{2.4(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha_1}{EL [\sin \alpha_2 - (q/R_b) \sin \nu + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]} d\alpha + \int_{-\pi/2}^{\alpha_1} \frac{1.2(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha_1}{EL [\sin \alpha_2 - (q/R_b) \sin \nu + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]} d\alpha \quad (13)$$

第 2 种情况:当 $h_{c1} < h_r, \alpha_1 > 90^\circ$ 时,此时裂纹深度 q 增大, $q \leq q_{max}$ (文中模型 $1.84 \text{ mm} < q \leq q_{max}$), 如图 4 所示,含裂纹齿的弯曲刚度和剪切刚度可表示为

$$\frac{1}{k_{bc}} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{12 \{1 + \cos \alpha_1 [(\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha}{EL [\sin \alpha_2 - (q/R_b) \sin \nu + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]^3} d\alpha \quad (14)$$

$$\frac{1}{k_{sc}} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{2.4(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha_1}{EL [\sin \alpha_2 - (q/R_b) \sin \nu + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]} d\alpha \quad (15)$$

第 3 种情况:当 $h_{c2} < h_r, \alpha_1 > 90^\circ$ 时,裂纹深度 $q > q_{max}$, 如图 5 所示,含裂纹齿的弯曲刚度和剪切刚度可表示为

$$\frac{1}{k_{bc}} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{12 \{1 + \cos \alpha_1 [(\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha}{EL [\sin \alpha_2 - (q_1/R_b) \sin \nu + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]^3} d\alpha \quad (16)$$

$$\frac{1}{k_{sc}} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{2.4(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha_1}{EL [\sin \alpha_2 - (q_1/R_b) \sin \nu + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]} d\alpha \quad (17)$$

根据不同模型下的裂纹齿轮弯曲刚度和剪切刚度原理,并结合齿轮综合啮合刚度公式(8)、公式(9)及表 1 中的齿轮系统基本参数,在裂纹深度 q 为 10%, 30%, 50%, 70% 的情况下(q 为所占 $2q_{max}$ 的百分比),建立模型分析含齿根裂纹齿轮的啮合刚度。当 $q=10\%$, 30% 时,运用公式(12), (13); 当 $q=50\%$ 时,运用公式(14), (15); 当 $q=70\%$ 时,运用公式(16), (17), 不同模型下的裂纹齿轮啮合刚度分析结果如图 6 所示。

由图 6 可知,当裂纹产生时齿轮副的啮合刚度减小。当裂纹深度 $q=10\%$ 时,啮合刚度相较于健康齿轮啮合刚度减小 3.50%; 当裂纹深度 $q=30\%$

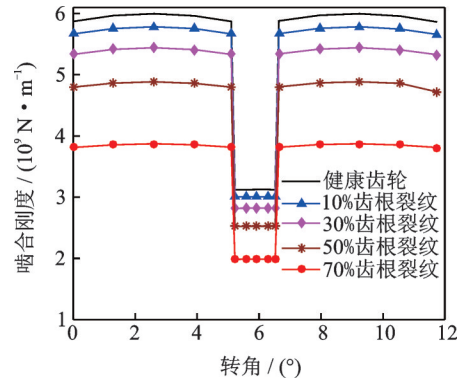


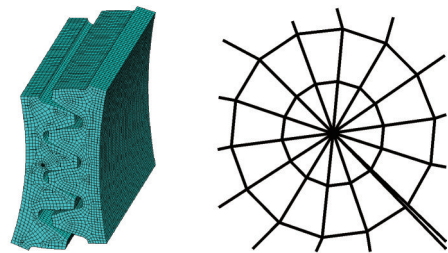
图 6 能量法不同深度的裂纹齿轮啮合刚度

Fig.6 Meshing stiffness of cracked gear with different depth by energy method

时,啮合刚度相较于 $q=10\%$ 时裂纹齿轮啮合刚度减小 5.86%; 当裂纹深度 $q=50\%$ 时,齿轮副啮合刚度相较于 $q=30\%$ 时裂纹齿轮啮合刚度减小 10.06%; 当裂纹深度 $q=70\%$ 时,齿轮副啮合刚度相较于 $q=50\%$ 时裂纹齿轮啮合刚度减小 20.50%。由此可知,随着裂纹深度的增大,齿轮啮合刚度的减小幅度逐步增大,当大于 $q=50\%$ 后啮合刚度的减小幅度加剧。

2 有限元法计算裂纹齿轮啮合刚度

建立齿根裂纹有限元模型如图 7 所示,裂纹深度 q 为 10%, 30%, 50%, 70%, 裂纹扩展角 $\beta=45^\circ$, 裂纹深度 q 为 10% 时的齿轮模型如图 7(a) 所示。由于裂纹尖端附近的应力应变具有奇异性,采用 1/4 节点位移法把裂纹尖端附近设置为奇异单元,如图 7(b) 所示。



(a) 裂纹齿模型 (b) 裂纹尖端网格模型
(a) Crack tooth model (b) Crack tip mesh model

图 7 齿根裂纹模型

Fig.7 Root crack model

齿轮单双齿交替啮合产生的周期性变形是引起齿轮刚度激励的原因,轮齿变形的大小直接影响齿轮的啮合刚度。

啮合刚度公式为

$$k = F_n / \delta \quad (18)$$

表 1 齿轮副基本参数

Tab.1 Basic parameters of gear pair

参 数	主齿轮	从齿轮
模数/mm	2	2
齿宽/mm	20	20
压力角/(°)	20	20
齿数	55	75
弹性模量/GPa	212	212
泊松比	0.289	0.289

扭转啮合刚度公式为

$$k_t = T/\Delta\theta \quad (19)$$

扭转啮合刚度与啮合刚度的关系为

$$k_t = \frac{T}{\Delta\theta} = \frac{F_n r_b}{\delta/r_b} = \frac{F_n}{\delta} r_b^2 = k r_b^2 \quad (20)$$

因此齿轮啮合刚度公式为

$$k = T/(\Delta\theta r_b^2) \quad (21)$$

其中: T 为齿轮转矩; $\Delta\theta$ 为齿轮转角变形值; r_b 为基圆半径。

根据有限元法啮合刚度计算理论及表 1 中的参数, 计算出不同深度的裂纹齿轮啮合刚度如图 8 所示。

由图 8 可知, 当齿轮产生裂纹时其啮合刚度会随之减小。当裂纹深度 q 为 10% 时, 啮合刚度相较于健康齿轮啮合刚度减小 3.47%; 当裂纹深度 q 为 30% 时, 啮合刚度相较于 q 为 10% 时啮合刚度减小 5.87%; 当裂纹深度 q 为 50% 时, 啮合刚度相较于 q 为 30% 时减小 10.44%; 当裂纹深度 q 为 70% 时, 啮合刚度相较于 q 为 50% 时减小 16.52%。随着裂纹

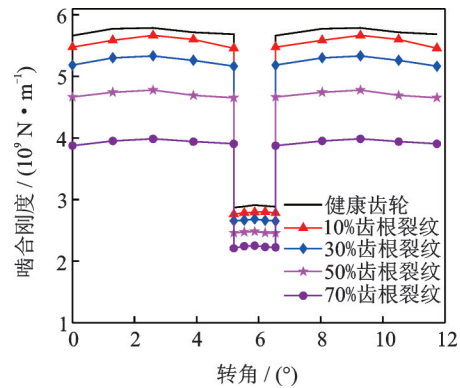


图 8 有限元法不同深度的裂纹齿轮啮合刚度

Fig.8 Meshing stiffness of cracked gear with different depth by finite element method

深度的增大, 啮合刚度的减小幅度逐步增大。

ISO6336-1:2006 规定了齿轮啮合刚度均值与单齿啮合刚度最大值的求解方法, 与能量法和有限元法计算出的结果相比较, 如表 2 所示。

表 2 啮合刚度计算误差比较

Tab.2 Comparison of calculation errors of meshing stiffness

计算方法	齿轮啮合刚度均值/ ($10^8 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$)	与 ISO 标准的相对 误差/%	单齿啮合刚度最大值/ ($10^8 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$)	与 ISO 标准的相对 误差/%
ISO 标准	4.77	0	2.99	0
能量法	5.01	5.03	3.13	4.68
有限元法	4.51	-5.45	2.84	-5.02

由表 2 可知, 能量法与 ISO 标准计算出的齿轮啮合刚度均值相差 5.03%, 与单齿啮合刚度最大值相差 4.68%; 有限元法与 ISO 标准值计算出的齿轮啮合刚度均值相差 -5.45%, 与单齿啮合刚度最大值相差 -5.02%。由此可知, 能量法更精确。

3 含齿根裂纹故障的齿轮系统振动响应分析

为了分析含齿根裂纹故障的齿轮啮合刚度对系统振动响应的影响, 建立 6 自由度齿轮系统动力学模型^[5], 如图 9 所示。采用集中参数法, 假设齿轮啮

合无误差, 在不考虑齿轮间的摩擦力和齿轮箱体共振的情况下, 把轴的质量和惯性集中到齿轮上, 分析不同裂纹深度的齿轮啮合刚度的振动响应。

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + C_{p1} \dot{x}_1 + K_{p1} x_1 = -F_m \sin\alpha \\ m_1 \ddot{y}_1 + C_{p1} \dot{y}_1 + K_{p1} y_1 = -m_1 g + F_m \cos\alpha \\ J_1 \ddot{\theta}_1 = T_1 - F_m r_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + C_{p2} \dot{x}_2 + K_{p2} x_2 = F_m \sin\alpha \\ m_2 \ddot{y}_2 + C_{p2} \dot{y}_2 + K_{p2} y_2 = -m_2 g - F_m \cos\alpha \\ J_2 \ddot{\theta}_2 = T_2 - F_m r_2 \end{cases} \quad (22)$$

其中: m_1, m_2 分别为主、从动轮质量; J_1, J_2 分别为主、从动轮转动惯量; K_{p1}, K_{p2} 为轴承支撑刚度; C_{p1}, C_{p2} 为阻尼系数; T_1, T_2 为主、从动轮转矩; α 为压力角; θ_1, θ_2 分别为主、从动轮 x 方向、 y 方向的转角位移。

齿轮系统的时变啮合力 F_m 可表示为

$$F_m(t) = c_m \dot{\delta} + k_m(t) f(\delta) \quad (23)$$

其中: c_m 为齿轮啮合阻尼; $k_m(t)$ 为时变啮合刚度; δ 为沿啮合线齿轮相对位移, 可表示为

$$\delta = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha + r_1 \theta_1 - x_2 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha + r_2 \theta_2 + e(t) \quad (24)$$

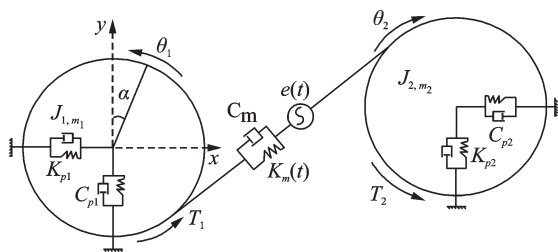


图 9 齿轮系统动力学模型

Fig.9 Gear system dynamic model

其中： $e(t)$ 为传递误差。

$f(\delta)$ 为间隙非线性函数，其可以表示为

$$f(\delta) = \begin{cases} \delta - b_n & (\delta > b_n) \\ 0 & (-b_n \leq \delta \leq b_n) \\ \delta + b_n & (\delta < -b_n) \end{cases} \quad (25)$$

其中： b 为齿轮间隙。

根据表1、表3及动力学理论，采用能量法计算出的啮合刚度和Runge-Kutta迭代方式求解齿轮动力学方程。设主动轮转速 $\Omega_1=1\ 000\text{ r/min}$ ，在求出不同深度的齿根裂纹齿轮啮合刚度的基础上，分析不同裂纹深度下齿轮系统在 y 方向的振动位移、频谱图、相位图及庞加莱截面图，如图10所示。

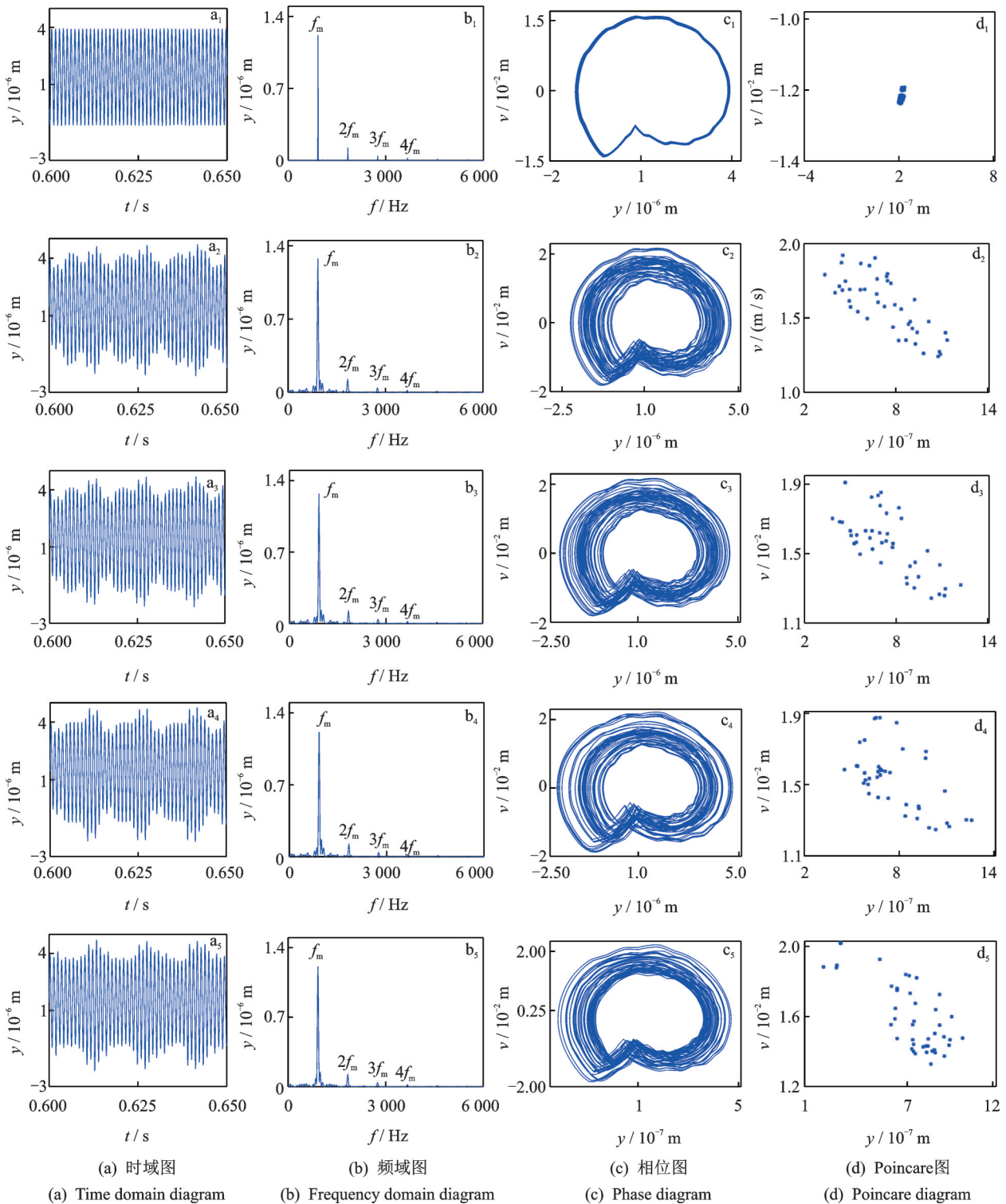


图10 不同裂纹深度的齿轮系统振动响应

Fig.10 Vibration response of gear system with different crack depth

表3 齿轮系统动力学模型参数
Tab.3 Dynamic model parameters of gear system

参数	转动惯量/ (kg·m ²)	质量/kg	轴的扭转刚度/ (N·m ⁻¹)	轴承阻尼/ (N·S·m ⁻¹)	啮合阻尼/ (N·S·m ⁻¹)	间隙值/m
主动轮	0.041	1.53	2×10 ⁸	1 800	2 000	1×10 ⁻⁵
从动轮	0.079	3.01	2×10 ⁸	1 800		

图10中: a_1, b_1, c_1, d_1 为健康齿轮的振动响应; a_2, b_2, c_2, d_2 为齿根裂纹 $q=10\%$ 时的振动响应; a_3, b_3, c_3, d_3 为齿根裂纹 $q=30\%$ 时的振动响应; a_4, b_4, c_4, d_4 为齿根裂纹 $q=50\%$ 时的振动响应; a_5, b_5, c_5, d_5 为齿根裂纹 $q=70\%$ 时的振动响应。

由图10($a_1\sim a_5$)可知,健康齿轮的振动幅度比较平稳,位移在 $-1.1\times 10^{-6}\sim 3.9\times 10^{-6}$ m之间,当产生裂纹并随着裂纹深度的增加,振动位移会随之递增,由图(a_2)中的 $-2.016\times 10^{-6}\sim 4.564\times 10^{-6}$ m增大到图(a_5)中的 $-2.185\times 10^{-6}\sim 4.705\times 10^{-6}$ m且振动响应发生不平稳现象。由图10($b_1\sim b_5$)可知,在健康齿轮中啮合频率 f_m 为主导响应且存在 $2f_m, 3f_m, 4f_m$,当裂纹产生并随着裂纹深度的增加,在 f_m 和 $2f_m$ 的附近产生微小的杂频并随着裂纹的增长杂频随之增加。由图10($c_1\sim c_5$)可知,健康齿轮的轨迹较为规则,当裂纹产生时轨迹宽度变大,并随着裂纹的增大轨迹宽度随之增大且出现交叉轨迹。由图10($d_1\sim d_5$)可知,庞加莱图中健康齿轮系统的所有离散点聚集在一个区域,当齿轮产生裂纹并随着裂纹的增加所有离散点聚集区域逐步增大。

4 结论

1) 根据裂纹尖端到单齿中线的距离(h_{c1}, h_{c2})与 $1/2$ 齿顶圆齿厚(h_t)的关系把齿根裂纹模型分为3种情况,利用裂纹啮合刚度理论计算出含裂纹齿轮啮合刚度更加精确。随着裂纹的增长啮合刚度随之减小,啮合刚度的减小幅度随裂纹的增长而逐步加剧。

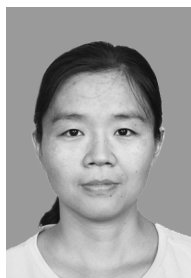
2) 有限元法计算出的啮合刚度与能量法计算出的啮合刚度值较为接近,在健康齿轮情况下,能量法计算出的单齿啮合刚度最大值为 3.13×10^8 N/m,啮合刚度均值为 5.01×10^8 N/m而有限元法计算出的单齿啮合刚度最大值为 2.84×10^8 N/m,啮合刚度均值为 4.51×10^8 N/m,单齿最大值相差 10% ,啮合刚度均值相差 9% 。与ISO标准相比,能量法更为精确。

3) 通过对含裂纹故障齿轮系统动力学分析可知,在裂纹齿参与啮合时由于啮合刚度减小引起振动冲击。随着裂纹深度的增长,振动的幅值会随之增大,在频域图中杂频逐步增加,在相位图中轨迹宽度逐步增大并产生交叉轨迹,庞加莱图中的离散点聚集区域逐步增大,为进一步故障诊断奠定基础。

参 考 文 献

- [1] 吴家腾,杨宇,程军圣. 基于解析有限元的齿根裂纹时变啮合刚度计算方法[J]. 机械工程学报, 2018, 54(23):56-62.
WU Jiateng, YANG Yu, CHENG Junsheng. The time-varying mesh stiffness calculation for gear tooth crack based on analytical-finite element method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(23):56-62.(in Chinese)
- [2] WU S, ZUO M J, PAREY A. Simulation of spur gear dynamics and estimation of fault growth[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 317:608-624.
- [3] 万志国,訾艳阳,曹宏瑞. 直齿圆柱齿轮齿根裂纹扩展仿真及齿轮时变啮合刚度分析[J]. 应用数学和力学, 2015, 36(S):14-20.
WAN Zhiguo, ZI Yanyang, CAO Hongrui. Gear crack propagation simulation and analysis of mesh stiffness [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2015, 36(S):14-20.(in Chinese)
- [4] 万志国,訾艳阳,曹宏瑞,等. 时变啮合刚度算法修正与齿根裂纹动力学建模[J]. 机械工程学报, 2013, 49(11):153-160.
WAN Zhiguo, ZI Yanyang, CAO Hongrui, et al. Time-varying mesh stiffness algorithm correction and tooth crack dynamic modeling[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(11):153-160.(in Chinese)
- [5] 王旭,伍星,肖正明,等. 含裂纹故障的齿轮系统动力学特性研究及其故障特征分析[J]. 振动与冲击, 2017, 36(9):74-79.
WANG Xu, WU Xing, XIAO Zhengming, et al. Dynamic characteristics of a gear system with crack fault

- and its fault feature analysis [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(9):74-79.(in Chinese)
- [6] 马辉,逢旭,宋荣泽,等. 基于改进能量法的直齿轮时变啮合刚度计算[J]. *东北大学学报*, 2014, 35(6): 863-884.
MA Hui, PANG Xu, SONG Rongze, et al. Time-varying mesh stiffness calculation of spur gear based on improved energy method[J]. *Journal of Northeastern University*, 2014, 35(6):863-884.(in Chinese)
- [7] LI Z W, MA H, FENG M J, et al. Meshing characteristics of spur gear pair under different crack types [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2017, 80: 123-140.
- [8] 胡信鹏. 含齿根裂纹缺陷的齿轮系统动态特性分析[D]. 长春:吉林大学, 2015.
- [9] 杨文广,蒋东翔. 行星齿轮典型断齿故障的动力学仿真[J]. *振动、测试与诊断*, 2017, 37(4):756-762.
YANG Wenguang, JIANG Dongxiang. Study of the dynamics of the planetary gear with typical tooth break faults[J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2017, 37(4):756-762.(in Chinese)
- [10] 刘杰,张磊,赵思雨,等. 包含齿根裂纹的风电行星齿轮动力学特性分析[J]. *太阳能学报*, 2019, 40(1): 192-198.
LIU Jie, ZHANG Lie, ZHAO Siyu, et al. Dynamic characteristic of wind turbine planetary set with crack in sun gear[J]. *Acta Energiæ Solaris Sinica*, 2019, 40(1): 192-198.(in Chinese)
- [11] WANG L, SHAO Y. Fault mode analysis and detection for gear tooth crack during its propagating process based on dynamic simulation method [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2017, 71:166-178.
- [12] SHAO Y, CHEN Z. Dynamic features of planetary gear set with tooth plastic inclination deformation due to tooth root crack [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 74 (4):1253-1266.
- [13] REZAEI M, POURSIINA M, JAZI S H, et al. Multi crack detection in helical gear teeth using transmission error ratio [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2019, 33(3):1115-1121.
- [14] YU W, MECHEFSKE C K, TIMUSK M. Effects of tooth plastic inclination deformation due to spatial cracks on the dynamic features of a gear system [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 87(4):2643-2659.
- [15] JIN S, KIM J S, LEE S K. Sensitive method for detecting tooth faults in gearboxes based on wavelet denoising and empirical mode decomposition[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2015, 29(8): 3165-3173.
- [16] 崔玲丽,张飞斌,康晨晖,等. 故障齿轮啮合刚度综合计算方法[J]. *北京工业大学学报*, 2013, 39(3): 353-358.
CUI Lingli, ZHANG Feibin, KANG Chenhui, et al. Calculation method of fault gear meshing stiffness [J]. *Journal of Beijing of University of Technology*, 2013, 39(3):353-358.(in Chinese)
- [17] YANG D C H, SUN Z S. A rotary model for spur gear dynamics[J]. *Journal of Mechanical Design*, 1985, 107 (4):529-535.
- [18] CHAARI F, FAKHFAKH T, HADDAR M. Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gear mesh stiffness [J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2009, 28(3):461-468.



第一作者简介:刘杰,女,1980年2月生,博士、副教授。主要研究方向为齿轮传动系统非线性动力学。曾发表《Nonlinear dynamic characteristic of gear system with the eccentricity》(《*Journal of Vibration Engineering*》2015, Vol.17, No.5)等论文。E-mail:starliujie@126.com.