

# 低频振动钻削钛合金板的非线性分析与应用\*

侯书军, 裴腾飞, 李 慨, 曲云霞, 李 坤, 李 凯

(河北工业大学机械工程学院 天津, 300130)

**摘要** 钛合金具有比强度高、比刚度且塑性强等优异特性,这些特点为高精度的制孔作业带来了很大挑战。针对此问题,搭建了振动钻孔试验台,通过对钛合金的振动钻孔动力学试验发现该系统具有明显的硬弹簧特性的非线性振动特征;通过动力学建模与实验参数估计获得了该系统的关键动力学参数和动力学模型;对该动力学模型进行了近共振情况下的非线性平均分析,求得平均方程并得到幅频特性与实测结果定性一致,证明了所建动力学模型的正确性;利用该系统的非线性特性,近共振运行,在较低激励下获得了较大幅度的稳态振动,实现了稳定高效的振动断屑和钻孔作业。结果表明,通过恰当的动力学设计,巧妙利用切削过程的非线性可以使振动钻孔过程更平稳、功耗更低而且孔质量更好。

**关键词** 振动钻孔;非线性振动;断屑;轴向钻削力;钻削动力学

**中图分类号** TH161; TH142.2

## 引 言

由于钛合金在比强度、比刚度等方面的诸多优势,使其在航空制造领域得到了日益广泛的应用<sup>[1]</sup>,如波音 787 机身结构材料的 15% 都采用了钛合金<sup>[2]</sup>。钛合金常与碳纤维组成复合材料叠层并通过铆接形成结构,该类复合材料的高精度制孔是保证连接强度与结构性能的主要因素之一<sup>[3]</sup>。而钛合金在机械性能方面的优势,加之其导热率低,给本就切削效率较低的钻孔作业带来了很大挑战。比如在用普通钻进行钛合金板钻孔时极易产生高温螺旋长屑,不仅划伤自身孔面也灼伤碳纤维层,从而影响孔加工表面的质量<sup>[4]</sup>。因此,如何有效断屑成为该技术研究的核心课题。

近年来,有人借助超声振动进行改善钛合金断屑的研究。邵振宇等<sup>[5]</sup>应用超声辅助钻削技术进行了钛合金钻削试验,说明了超声钻削可以降低钻削力,提高刀具切削能力,获得良好的断屑与排屑效果。但也有研究认为超声振动虽然可以降低切削力,但却会引起切削温度的升高<sup>[6]</sup>。从材料特性的角度看,钛合金属于塑性极强的高强度材料,而振动的目的就在于破坏切屑的连续性,此时低频较大振幅的振动应该更加合适。在此方面,法国的“mitis”系统获得了成功,国内已有多家引进,国内外诸多学

者对其进行了研究。Pecat 等<sup>[7]</sup>对比了低频振动(振幅为 0.01~0.20 mm,频率为 1.5/rev)辅助钻孔和普通钻孔(conventional drilling,简称 CD)。试验发现:合理的振幅、进给速度与主轴转速,轴向低频振动辅助钻孔(low frequency vibration assisted drilling,简称 LFVAD)不仅可以有效断屑,同时还可将钛合金钻孔温度降低 40% 以上,使 CFRP/Ti 叠层板的孔质量有了显著的提高。文献[8-9]将其刀具振动曲线假设为完全正弦曲线,对低频辅助钻削过程的几何断屑<sup>[10]</sup>机理做了一定的解释。Bisu 等<sup>[11]</sup>提出一种计算振动钻削设备特性的试验方法,从而有效预测最佳钻削参数,并对振动钻孔过程的冲击动力学进行了分析。

在前期研究中,本课题组研发了高低频复合振动钻孔样机,对普通、旋转超声和低频振动等 3 种方式钻削叠层板的对比分析发现:超声钻削虽能降低轴向力,改善断屑与排屑性能,但其在钻削过程并不能实现完全断屑,更多的是降低切屑的强度而获得的机械断屑。低频振动辅助钻孔机构在断屑、钻孔温度和钻孔质量等方面有明显优势<sup>[12]</sup>,因此低频振动钻削或许是更好的发展路径。但是在研究中也发现低频振动钻孔过程中存在有明显的非线性动力学特性。非线性的主要来源是在振动钻削过程中轴向

\* 河北省“军民两用超低噪声破拆机器人”科技项目及国家重点研发项目“便携式复合振动破拆工具”基金资助项目(2017YFC0806605-02)

收稿日期:2019-01-02;修回日期:2019-05-25

切削力的非线性。Chang等<sup>[13]</sup>提出了一种新的预测 6061-T6 铝振动钻削时的轴向切削力模型,在 4 kHz~12 kHz 的范围内发现预测值与试验值的误差由改进前的 20% 下降到 7%。

在非线性的利用方面,文献[14-16]都进行了很好的工作,发展了非线性共振筛的理论,做出了很好的技术产品,为非线性的利用提供了思路。

本研究将在动力学试验的基础上,首先进行动力学建模与试验参数估计,然后进行非线性振动分析,并试图解决振动钻孔系统的稳定性与振动利用的问题。

### 1 振动钻孔系统的动力学试验

振动钻孔过程是一个动力学特性十分突出的过程。为了实现稳定的钻孔作业,必须对其动力学特性进行先期研究,为此先搭建了试验台并对其动力学特性进行了试验。

#### 1.1 振动钻孔试验台

试验设备为自主研发的低频振动辅助钻孔设备,如图 1 所示。该设备主轴转速可调,最高为 3 000 r/min;激振力频率和幅值可调,最高频率约为 50 Hz;可以实现轴向力与轴向进给的实时监控与反馈。

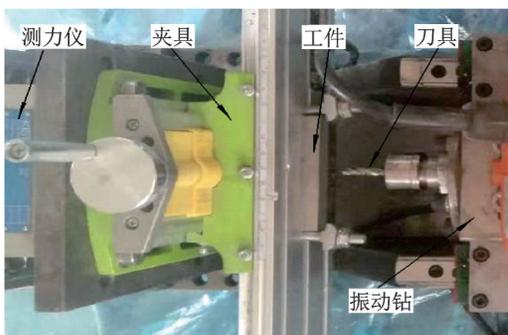


图 1 振动钻孔试验台

Fig.1 Equipment of vibration assisted drilling

#### 1.2 动力学测试分析系统

试验所用测量系统如图 2 所示。主要包括: KISTLER 9129A 测力系统,用于测量钻削过程的钻削力与扭矩;Polytec 非接触单点式激光测振系统,进行钻头位移信号的测试;LMS 振动测试分析系统,用于振动加速度信号的测试分析。

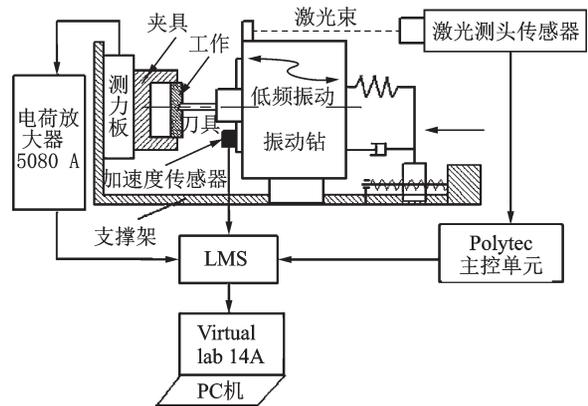


图 2 试验测量系统示意图

Fig.2 The schematic diagram of test measurement system

#### 1.3 振动钻孔系统动力学试验参数

为了研究该系统的动力学特性,在空载条件和表 1 所示的参数下,通过改变激振频率,进行了正向(20→50 Hz)和反向(50→35 Hz)扫频试验。在该试验过程中工件材料为 Ti6Al4V,其主要性能参数如表 2 所示。

表 1 扫频试验参数表

Tab.1 Parameters of swept frequency test

参 数	数 值
主轴转速 $n/(r \cdot \min^{-1})$	600
进给速度 $f/(mm \cdot \min^{-1})$	12
激振频率 $\omega/Hz$	正扫频 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50
	反扫频 50, 47, 44, 41, 38, 35, 32, 29, 26, 23, 20

表 2 钛合金主要性能参数

Tab.2 Major properties of titanium alloy

参 数	数 值
密度 $(g \cdot cm^{-3})$	4.44
弹性模量/GPa	108
泊松比	0.33
延伸率/%	10
屈服强度/MPa	860
导热率 $(W \cdot m^{-1} \cdot k^{-1})$	7.5(20 °C)

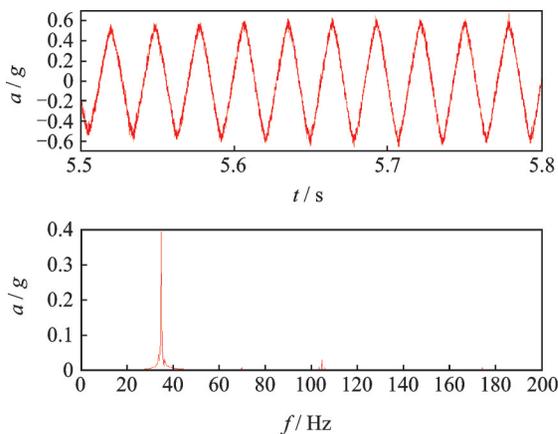
#### 1.4 振动钻孔系统的动力学试验分析

为了研究切削过程对于系统的特性的影响,本研究通过采集振动钻的加速度信号来反映整个振动钻的轴向振动状态。图 3(a)和(b)分别展示了系统在激振频率为 35 Hz、激振力幅值为 180 N 条件下,分

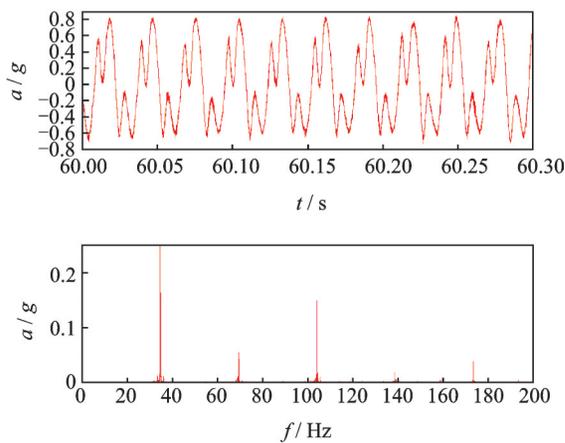
别在空载与切削状态下运行时加速度信号(纵坐标物理量纲为重力加速度  $g$ )的时域与频域特征对比。

由图 3(a)中看出,当系统空载运行时,钻头不与工件发生接触,系统的时域与频域特征表明系统此时主要以线性振动特征为主。虽然在 35 Hz 的主频成分之外也存在的 3 倍频和 5 倍频成分,应该是由相对运动件之间的滚动摩擦引发,幅值很小可以忽略。

一旦系统进入钻削状态,则由图 3(b)可以发现,除了主频成分外还会出现一定幅值的倍频成分,特别是 3 倍频幅值较大。从振动切削的过程来看,钻头除了自身匀速旋转外,又在进给方向施加了简谐激振力,致使切削厚度周期变化并形成断屑。此时钻头与工件之间的切削力具有了非光滑的特质。这样的反作用力施加于振动系统使其具有了非光滑



(a) 空载状态  
(a) Unloaded state



(b) 钻削状态  
(b) Drilling state

图 3 振动加速度的时域与频域特征

Fig.3 Characteristics of vibration acceleration in Time-domain and Frequency-domain

和非线性的特征。

为进一步研究系统的非线性特征,进行了扫频试验,得到了图 4 所示的幅频特性曲线。从图 4 可以看出:①空载情况下,该系统具有明显的偏心激励下的单自由度线性振动系统的特征,固有频率为 25 Hz,共振幅值为 0.28 mm;②当系统进入钻削状态后,通过正向与反向扫频试验发现系统存在滞后和跳跃等非线性现象,说明系统具有了硬特性弹簧力非线性特性<sup>[14]</sup>,初步分析认为这是由于钻头相对于工件发生轴向振动情况下,钻头与工件发生斜碰撞切削运动导致系统的弹性力出现了显著的分段非线性特征;③共振区的振动位移幅值由空载时的 0.28 mm 下降到振动钻孔时的 0.13 mm,说明系统的切削过程耗能强烈,致使系统具有了较强的阻尼特性。考虑到切削过程的非线性,此阻尼力也应具有非线性特征。

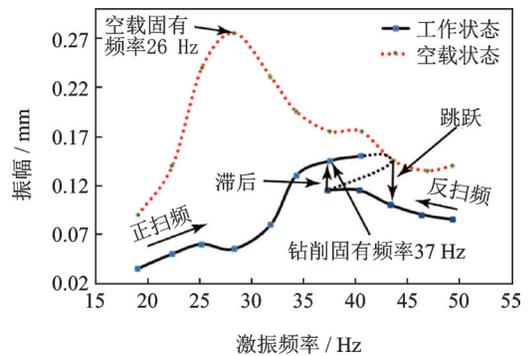


图 4 振动钻孔系统的幅频特性曲线

Fig.4 Amplitude frequency characteristic curve of vibration drilling system

显然,从理论上进一步搞清楚该系统的非线性特性与规律,无论是对于设计优化振动钻孔系统,还是进行钻孔过程的动力学与工艺参数优化都具有重要意义。

笔者对该类强耦合非线性动力学系统的研究策略如图 5 所示。首先,对振动切削过程给系统带来的

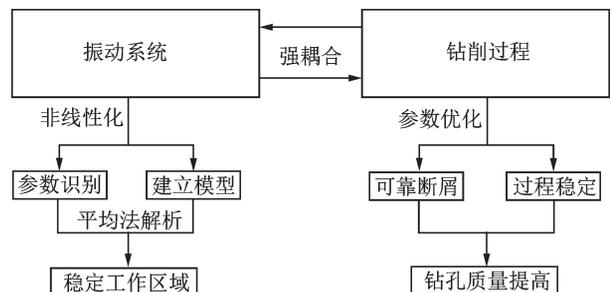


图 5 研究策略示意图

Fig.5 Schematic diagram of research strategy

非线性力进行等效化处理,获得振动系统的非线性力的表达式与参数,从而对其动力学特性进行定性研究并找到系统的稳定工作参数域;其次,在此动力学参数下初步研究影响该类材料钻孔质量的振动断屑问题。

## 2 振动钻孔过程建模与参数估计

进行非线性动力学分析的前提就是要确定系统的基本模型并通过试验测试分析,进行动力学参数估计。考虑到本系统存在的固有频率增大和共振振幅显著减小的特点,拟先采用分段线性的刚度与比例阻尼来把切削过程的非线性力等效化。

理想化后的物理模型如图 6 所示。图中: $m_1$ 为振动体质量; $m_0$ 为惯性块质量; $C_1$ 为空载状态阻尼系数; $K_1$ 为空载状态刚度系数; $K_2$ 为钻削附加刚度系数; $C_2$ 为钻削附加阻尼系数; $\delta$ 为平衡位置与切削表面距离; $r$ 为惯性块驱动半径; $\nu$ 为惯性块角速度; $x$ 为  $m$  的位移。

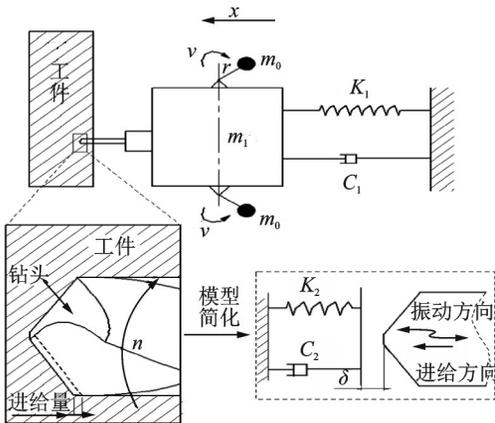


图 6 振动钻孔系统的理想化模型

Fig.6 The idealized model of vibration drilling system

根据图 6 以钻尖所在平衡位置为零点,设进给方向为正,建立坐标系。系统在振动钻削过程中,钻头与工件接触前后的振动微分方程分别为

$$\begin{cases} m\ddot{x} + Kx = \\ -(K_1 - K)x - C_1\dot{x} + P_1 \sin \omega t \quad (x < \delta) \\ m\ddot{x} + Kx = \\ -(K_1 - K)\delta - C\dot{x} + P_1 \sin \omega t \quad (x \geq \delta) \end{cases} \quad (1)$$

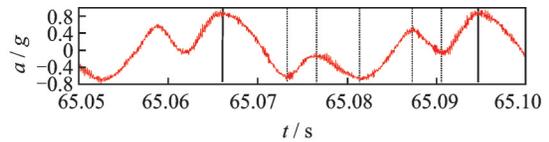
其中: $C=C_1+C_2$ ; $K=K_1+K_2$ ; $m=m_1+2m_0$ ; $P_1=mr\nu^2$ ; $C$ 为钻削状态阻尼系数; $K$ 为钻削状态刚度系数。

在空载状态下,线性系统的动力学参数为:系统

刚度  $K_1=4 \times 10^5$  N/m;阻尼系数  $C_1=1\ 000$  kg·s/m。

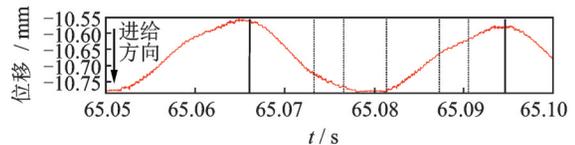
现在的主要问题就是如何对切削过程中的等效刚度与等效阻尼进行参数估计。为此将振动系统在一个周期内所测得的位移、加速度和轴向力进行了对比分析。

图 7 为激振频率 35 Hz 时加速度-位移-轴向力在同一时间坐标下的时间历程对照图,时间长度为 0.05 s。通过比对钻头的振动加速度、位移以及轴向切削力,可以确定从  $t_1 \sim t_7$  为一个切削周期,其中从  $t_2 \sim t_4$  为刀刃进入切削区的过程即切削过程。在钻尖向下运动过程中,一旦接触到工件表面,就会引起系统加速度与轴向切削力出现极值或者折点,如图中  $t_2$  时刻;而后进入切削状态,直至钻尖脱离切削区,再次引发振动加速度与轴向切削力的突变,如图中  $t_6$  时刻。



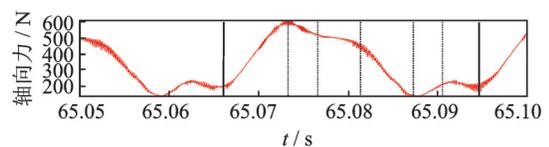
(a) 单个振动周期内加速度信号图

(a) Diagram of acceleration signals within a single vibration period



(b) 单个振动周期内位移信号图

(b) Displacement signal diagram in a single vibration period



(c) 单个振动周期内轴向力信号图

(c) Axial force signal diagram within a single vibration period

图 7 单个振动周期内的动力学信号对照

Fig.7 Comparison of dynamic signals within a single vibration period

通过观察多个周期,得到在切削过程中的平均切削力  $F_d \approx 500$  N,平均切削距离  $L \approx 0.1$  mm,平衡位置与切削表面距离  $\delta \approx 0.05$  mm,振幅  $B=0.1$  mm。

根据阻尼理论<sup>[17]</sup>

$$\begin{cases} W = aB^2 = FL \\ C = a/\pi\omega \end{cases} \quad (2)$$

$$P = \sqrt{K/m} \quad (3)$$

其中： $W$ 为钻削过程所做的功； $a$ 为常数； $\omega$ 为激振频率； $P$ 为钻削状态固有频率。

可以得出切削过程的等效阻尼与刚度参数为： $C = 8 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{s}/\text{m}$ ； $K = 1 \times 10^6 \text{ N}/\text{m}$ 。

### 3 振动钻孔系统的非线性平均法分析

由于该系统是在近共振状态下工作的，所以为了便于进行非线性分析，采用共振情况的平均法进行分析。将式(1)中的两式合并，并在非线性弹性力部分、阻尼和干扰力前标以小参数  $\epsilon$  后，其控制方程变为

$$m\ddot{x} + Kx = -\epsilon f_1(x) - \epsilon f_2(\dot{x}) + \epsilon P_1 \sin vt \quad (4)$$

其中：非线性弹性力  $f_1(x) = \begin{cases} (K_1 - K)x & (x < \delta) \\ (K_1 - K)\delta & (x \geq \delta) \end{cases}$ ，

如图8所示。

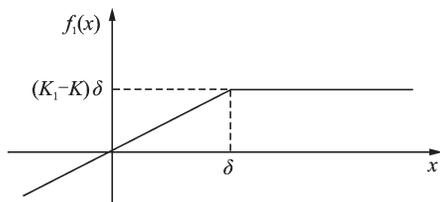


图8 非线性弹性力示意图

Fig.8 Diagram of nonlinear elastic forces

阻尼函数  $f_2(\dot{x}) = \begin{cases} C_1 \dot{x} & (x < \delta) \\ C \dot{x} & (x \geq \delta) \end{cases}$ ，如图9所示。

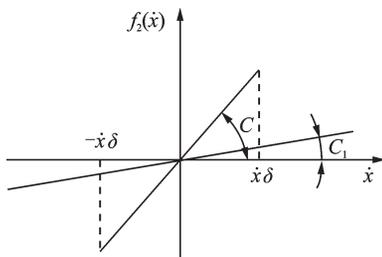


图9 阻尼示意图

Fig.9 Damping diagram

应用平均法<sup>[15]</sup>得出系统的稳态幅频响应方程

$$y = \frac{P_1}{m \sqrt{(U^2 - v^2)^2 + 4v^2 V^2}} \quad (5)$$

其中

$$U = \frac{1}{2\pi m} \cdot \left[ C_1 \left( \phi_0 + \frac{1}{2} \sin 2\phi_0 \right) + C \left( \pi - \phi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\phi_0 \right) \right] \quad (6)$$

$$V = \omega_0 + \frac{K_1 - K}{2\pi m \omega_0} \left[ \phi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\phi_0 \right] \quad (7)$$

其中： $\phi_0 = \sin^{-1}(\delta/y)$ 。

由式(5)知，它和线性系统强迫振动的解的表达式形式上完全相同， $U$ 和 $V$ 都是振幅 $y$ 的函数。将 $v$ 解出

$$v = \frac{\sqrt{U^2 - 2V^2 \pm \sqrt{(U^2 - 2V^2)^2 - (1 - \lambda^2)U^4}}}{1 - \lambda^2} \quad (8)$$

其中： $\lambda = m_0 r / m y$ 。

代入系统相应参数，由式(8)可画出一组参数的  $y-v$  曲线——幅频特性曲线(如图10所示)， $A-B-C$ 为振动频率正向增加时的稳定工作区域， $C-D$ 为不稳定工作区域，不可实现，而 $D-E$ 为振动系统从高频降速时的稳定工作曲线。显然本系统应该选择在 $B-C$ 区域并靠近 $C$ 点的区域工作。在该区域不仅振幅较大而且当外界条件变化时，振幅变化较小，设备运行更加平稳。

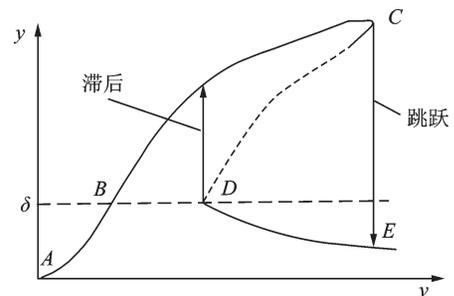


图10 幅频特性曲线

Fig.10 Amplitude-frequency curve

## 4 钛合金振动钻孔试验

### 4.1 钛合金板振动钻孔的试验方案设计

以主轴转速为 $n$ 和进给速度 $f$ 进行钛合金工件钻削试验。试验激振频率为35 Hz，分别进行普通钻削与振动钻削。低频振动激振装置在加工前开启，等待振动稳定后再进行钻孔过程，具体参数见表3。试验重复4次，每组试验结束更换钻头，获得平均值与误差分布。

表3 钻削试验参数表

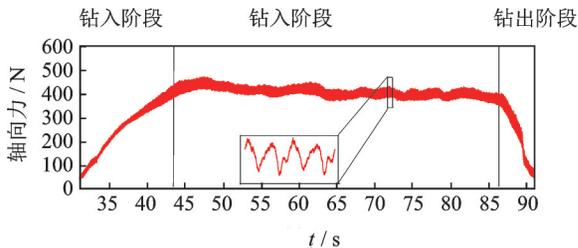
Tab.3 Drilling test parameters

参数	数值
主轴转速 $n/(\text{r}\cdot\text{min}^{-1})$	600
进给速度 $f/(\text{mm}\cdot\text{min}^{-1})$	12
激振频率/Hz	35
加工方式	普通钻削、振动钻削

### 4.2 振动钻孔过程试验

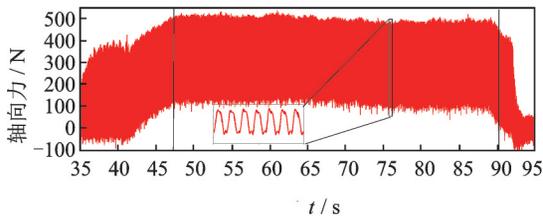
切削中的切削力是切削效率的直接反映。而对于钻孔而言,钻孔的轴向力的大小不仅能反映钻孔的切削效率,更能直接反映断屑效果和钻孔质量。尤其是对于钛合金这类强度高、塑性强、导热率低的航空材料板材,钻孔过程的中轴向力更是重要的控制指标。

钻孔过程一般分为:钻入阶段、中间稳定钻削阶段和钻出阶段等3个阶段。文中通过采集所加工的工件所承受的轴向力来反应钻削过程的切削力,如图11(a)(b)分别为普通钻削和低频振动钻削时,轴向力随时间变化的时间历程。图12为中间稳定钻削阶段的轴向切削力平均值的对比。



(a) 普通钻削实时力

(a) Ordinary drilling real-time forces



(b) 振动钻削实时力

(b) Vibration drilling real-time force

图 11 轴向力随时间变化

Fig.11 Thrust force changes with time

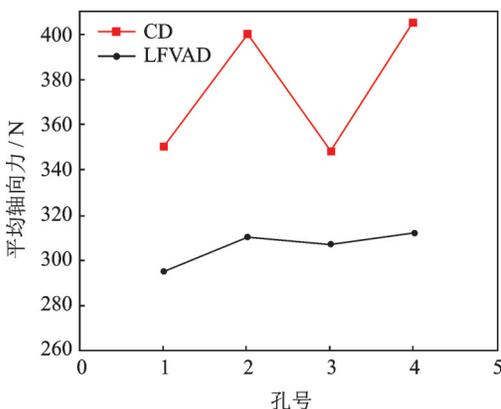
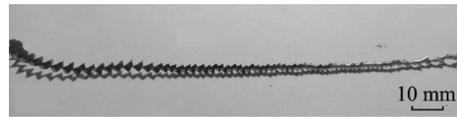


图 12 普通钻削与振动钻削平均轴向钻削力

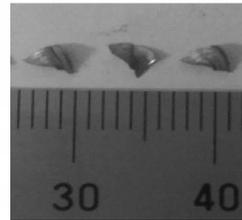
Fig.12 The mean value of CD and LfVAD

图13为普通钻孔与振动钻孔的切屑情况对比。钛合金的韧性高,钻削过程易出现连续切屑,影响制孔质量,因此钻削过程断屑至关重要。普通钻削过程中排出的钛合金切屑为螺旋状连续切屑,如图13(a)所示;在低频振动引入后,原来的螺旋长屑被切断为独立的扇形,如图13(b)所示。



(a) 普通钻削的切屑

(a) The chip of CD



(b) 低频振动辅助钻削的切屑

(b) The chip of LfVAD

图 13 钛合金切屑形态

Fig.13 The chip morphology of Ti6AlV

由此可以看出:普通钻削状态下切屑为螺旋形连续长屑,而轴向力幅值的波动较小,平均值较大且平均力在每次钻孔过程中出现较大幅度的离散性;反观引入轴向振动后,不仅切屑由螺旋长屑变成了断屑,其轴向切削力虽然因为碰撞的发生而使得其最大值增大,但平均值却显著降低而且更加平稳。这说明低频振动的引入提高了钻头的切削能力同时实现可靠断屑从而改善排屑,使得钻削过程更加稳定。

## 5 结束语

笔者搭建了振动钻孔试验台,通过对钛合金的振动钻孔动力学试验发现,该系统存在明显的硬弹簧特性的非线性振动特征,会出现滞后与跳跃等非线性动力学现象。通过动力学建模与试验参数估计,获得了本试验台的关键动力学参数,建立了该系统的动力学模型。对该动力学模型进行了近共振情况下的平均分析,获得的幅频特性曲线与实测结果定性一致,为后续的深入研究奠定了基础。利用该系统在所选定的振动与工艺参数下对钛合金进行了钻孔试验说明:通过恰当的动力学设计,巧妙利用切削过程的非线性可以使振动钻孔过程更平稳、功耗更低而且孔质量更好。

## 参 考 文 献

- [1] 李亚江,刘坤.钛合金在航空领域的应用及其先进连接技术[J].航空制造技术,2015,58(16):34-37.  
LI Yajiang, LIU Kun. Application and advanced connection technology of Ti6Al4V in aviation[J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2015, 58(16): 34-37. (in Chinese)
- [2] HINCHCLIFFE M. Characterisation of bond line porosity[D]. Sydney: University of New South Wales, 2008.
- [3] 刘振旺,秦旭达,田利成,等.碳纤维增强复合材料与钛合金钻孔技术研究进展[J].航空制造技术,2016,59(17):71-76.  
LIU Zhenwang, QIN Xuda, TIAN Licheng, et al. Research progress of drilling technology of carbon fiber reinforced plastic(CFRP) and titanium alloy[J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2016, 59(17): 71-76. (in Chinese)
- [4] 南成根,吴丹,马信国,等.碳纤维复合材料/钛合金叠层钻孔质量研究[J].机械工程学报,2016,52(11):177-185.  
NAN Chenggen, WU Dan, MA Xinguo, et al. Study on the drilling quality of carbon fiber reinforced plastic and titanium stacks[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(11): 177-185. (in Chinese)
- [5] 邵振宇,李哲,张德远,等.钛合金旋转超声辅助钻削的钻削力和切屑研究[J].机械工程学报,2017,53(19):66-72.  
SHAO Zhenyu, LI Zhe, ZHANG Deyuan, et al. Research on drilling force and chip cutting of titanium alloy rotary ultrasonic assisted drilling [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(19): 66-72. (in Chinese)
- [6] PUJANA J, RIVERO A, CELAYA A, et al. Analysis of ultrasonic-assisted drilling of Ti6Al4V[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2009, 49(6):500-508.
- [7] PECAT O, BRINKSMEIER E. Low damage drilling of CFRP/titanium compound materials for fastening [J]. Procedia CIRP, 2014, 13:1-7.
- [8] 杨浩骏,陈燕,徐九华,等.Ti/Al叠层.结构低频振动钻孔试验研究[J].航空制造技术,2017,60(1/2):16-21.  
YANG Haojun, CHEN Yan, XU Jiuhua, et al. Experimental research on low frequency vibration-assisted hole making of Ti/Al stacked structure [J] Aeronautical Manufacturing Technology, 2017, 60(1/2): 16-21. (in Chinese)
- [9] 姚琦威,陈燕,杨浩骏,等.振幅对低频振动钻削CFRP/钛合金叠层材料的影响[J].航空制造技术,2018,61(6):64-69.  
YAO Qiwei, CHEN Yan, YANG Haojun, et al. Influence of amplitude on low frequency vibration drilling CFRP/Titanium alloy stack materials [J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2018, 61(6): 64-69. (in Chinese)
- [10] 马利杰,刘贯军,王贵成.轴向振动钻削的断屑机理研究[J].机械设计与制造,2009(2):228-230.  
MA Lijie, LIU Guanjun, WANG Guncheng. Study on mechanism of breaking chip of axial vibration drilling[J]. Machinery Design & Manufacture, 2009(2): 228-230. (in Chinese)
- [11] BISU C, CHERIF M, KNEVEZ J Y. Dynamic analysis of the forced vibration drilling process [J]. Procedia CIRP, 2018, 67:290-295.
- [12] 侯书军,高晓星,李慨,等.碳纤维复合材料/钛合金叠层板振动辅助钻孔技术[J].南京航空航天大学学报,2018,50(3):295-301.  
HOU Shujun, GAO Xiaoxing, LI Kai, et al. Vibration assisted drilling of carbon fiber reinforced plastic and titanium stacks[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2018, 50(3): 295-301. (in Chinese)
- [13] CHANG S S F, BONE G M. Thrust force model for vibration-assisted drilling of aluminum 6061-T6 [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2009, 49(14):1070-1076.
- [14] 陈予恕.非线性振动[M].北京:高等教育出版社,2002:150-160.
- [15] 陈予恕.非线性共振筛振动理论与计算[J].天津大学学报,1980,51(1):93-111.  
CHEN Yushu. Theoretical analysis and calculation of nonlinear resonance sieve vibration [J]. Journal of Tianjin University, 1980, 51(1): 93-111. (in Chinese)
- [16] 闻邦椿,共振输送机与共振筛的动力学特性及改善其工作性能的措施[J].起重运输机械,1975(Z1):17-31.  
WEN Bangchun. Dynamic characteristics of resonance conveyor and resonance screen and measures to improve their working performance [J]. Lifting and Transportation Machinery, 1975(Z1): 17-31. (in Chinese)
- [17] 郑兆昌.机械振动(上册)[M].北京:机械工业出版社,1986:89-100.



**第一作者简介:**侯书军,男,1963年7月生,博士、教授、博士生导师。主要研究方向为振动冲击的利用与控制。曾发表《碳纤维复合材料/钛合金叠层板振动辅助钻孔技术》《南京航空航天大学学报》2018年第50卷第3期)等论文。  
E-mail: Shujun.hou@hebut.edu.cn