

# Stewart 衍生型六维加速度传感器的工作频带研究\*

王林康<sup>1</sup>, 尤晶晶<sup>1,2</sup>, 李成刚<sup>2,3</sup>, 仇鑫<sup>1</sup>, 叶鹏达<sup>1</sup>

(1. 南京林业大学机械电子工程学院 南京, 210037) (2. 江苏省精密与微细制造技术重点实验室 南京, 210016)  
(3. 南京航空航天大学机电学院 南京, 210016)

**摘要** 六维加速度传感器的工作频带是一项重要的动态性能评价指标, 由于目前市场上还没有能够完全满足标定要求的试验平台, 这项性能的理论模型目前尚未建立。针对该现状, 以一种 Stewart 衍生型六维加速度传感器为例, 通过推导基频及其与工作频带上限之间的关系, 建立了其工作频带的数学模型。首先, 通过将四元数引入系统的第 2 类 Lagrange 方程, 推导出动、势能函数的二次型表达式, 通过矩阵迭代法求解得到具体的基频值, 验算结果表明, 所设计算法的迭代次数不超过 19, 计算误差小于 0.000 1%; 其次, 基于正交试验理论以及 ADAMS 动力学仿真软件, 设计了 256 组搜索可行工作频率的虚拟试验, 结果表明, 工作频带上限始终介于基频的 1/35~1/32, 且测量数据的不确定度仅为 0.004 1; 然后, 运用空间模型理论研究了传感器的工作频带性能指标与结构参数的分布规律, 绘制了全域性能图谱, 为后续结构拓展提供参考; 最后, 加工制作了六维加速度传感器的实物样机, 并在其工作频带内进行了试验, 相对误差小于 0.53%, 进一步验证了频带模型的有效性和可行性。

**关键词** 六维加速度传感器; 并联机构; 固有频率; 工作频带; 性能图谱  
**中图分类号** TH825

## 引言

通过测量精密微细切削振动的动态特征, 可进一步研究切削过程对加工工件表面质量的影响规律, 揭示微细切削的加工机理。目前, 工业领域一般借助一维加速度计测量上述信号<sup>[1-3]</sup>, 然而, 待测物体的实际运动轨迹比较复杂, 其振动加速度对应于三维线加速度和三维角加速度, 合称“六维加速度”。因此, 此类场合若使用六维加速度传感器, 可以使测量信息更完整, 有利于后续的振动补偿、性能预测和机理分析等<sup>[4]</sup>。此外, 机器人<sup>[5]</sup>、故障诊断<sup>[6]</sup>和生物医疗等<sup>[7]</sup>领域均离不开六维加速度信息的测量。Sun 等<sup>[8]</sup>提出一种基于 6-6 Stewart 并联机构的六维加速度传感器, 具有尺寸效应误差小、灵敏度高的优点, 但存在量程小、各向同性差等缺陷。Zou 等<sup>[9]</sup>基于 8 个线加速度计, 提出一种新的空间几何构型, 具有尺寸小、可靠性高和集成度高的优点, 然而多个加速度计安装位置和方向的微小偏差会对载体角速度的计算精度产生较大影响, 因此其工程实现比较困难。文献<sup>[10]</sup>提出一种 Stewart 衍生型并联机构, 可用于充当六维加速度传感器的弹性体,

该方案具有实时性好和测量精度高的优点。

除了精度、效率之外, 频率带宽也是六维加速度传感器的重要性能指标, 且决定了传感器的用途与适用环境。对于传统一维压电式加速度传感器而言, 其工作频带下限由电荷放大器的下限截止频率决定, 一般可低至 0.3 Hz<sup>[11]</sup>。为了避免在传感器共振区附近灵敏度的急剧增加, 其工作频带上限一般选取基频的 1/5~1/3<sup>[12]</sup>。但是, 由于运动模式和耦合特性的不同, 该结论并不适用于六维加速度传感器。于春战等<sup>[13]</sup>基于 Kane 方法建立六维加速度传感器的动力学模型及其解析解方程, 分析了传感器的动态特性。孙治博等<sup>[14]</sup>采用并联机构的守恒转换方法求解传感器的刚度矩阵, 建立了六维加速度传感器系统的无阻尼自由振动模型, 获得传感器固有频率求解的理论表达式。LIU 等<sup>[15]</sup>基于 ANSYS 软件的模态分析、谐波分析等方法, 估计六维加速度传感器的固有频率。以上工作研究了六维加速度传感器的固有频率等特性。

笔者通过引入四元数建立 Stewart 衍生型六维加速度传感器的基频模型, 对其工作频带进行研究。基于第 2 类 Lagrange 方程, 建立传感器的微分运动

\* 国家自然科学基金资助项目(51405237); 国家留学基金资助项目(201908320035); 江苏省精密与微细制造技术重点实验室开放基金资助项目

收稿日期: 2019-10-03; 修回日期: 2020-01-12

方程,计算传感器的固有频率。基于ADAMS参数化建模功能,建立不同结构参数的虚拟样机,揭示传感器工作频率和固有频率的关系,据此来定义工作频带上限指标。基于空间模型理论,分析基频与结构参数的关系,绘制了性能图谱。最后,在传感器的工作频带内进行了测试,试验结果验证了该方案的可行性。

### 1 机构描述与运动学方程的建立

Stewart衍生型六维加速度传感器的结构模型如图1所示。该传感器由壳状外壳、边长为 $2n$ ,质量为 $m$ 的立方体质量块和12条初始长度为 $L$ 的球面副、移动副和球面副(spherical pair, prismatic pair and spherical pair,简称SPS)支链组成。其中,压电陶瓷同时充当敏感元件和并联机构中的移动副。将传感器固定在待测物体上,当有加速度作用在外壳上时,在惯性力的作用下,质量块的位姿会相对于外壳发生变化,此时串联在12条支链上的压电陶瓷会产生电荷。通过对每条支链上的电荷量进行分析,得到在惯性系下的加速度信息。文献[10]建立了该类传感器的系统解耦算法,并验证了算法的有效性。

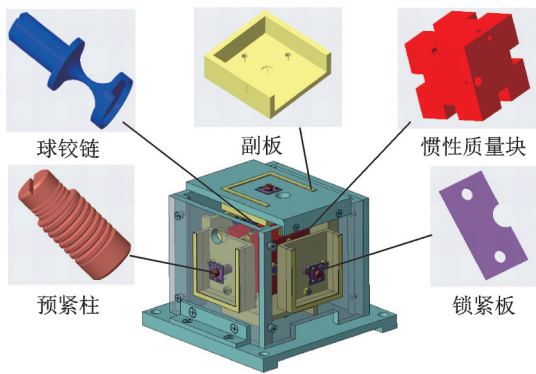


图1 Stewart衍生型六维加速度传感器的结构模型  
Fig.1 Structure model of Stewart-derived six-axis accelerometer

传感器的机构简图如图2所示。图中: $b_i(i=1,2,\dots,6)$ 为与质量块固连的球铰链; $B_{ij}(i=1,2,\dots,6;j=1,2)$ 为与外壳固连的球铰链; $P_{ij}(i=1,2,\dots,6;j=1,2)$ 为各个支链上的移动副。在地面、外壳和质量块上分别建立坐标系 $O_0\{x_0, y_0, z_0\}$ ,  $O_1\{x_1, y_1, z_1\}$ 和 $O_2\{x_2, y_2, z_2\}$ ,并分别记为 $\{O_0\}$ ,  $\{O_1\}$ 和 $\{O_2\}$ 。3个坐标系的坐标原点及其坐标轴在初始状态分别重合,如图2所示。坐标系原点 $O$ 位于质量块质心, $x, y$ 轴分别沿移动副 $P_{42}, P_{52}$ 方向, $z$ 轴满足右手定则。

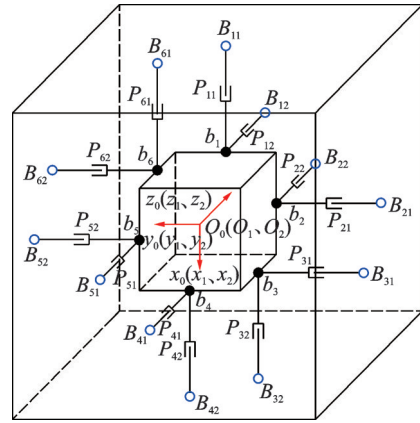


图2 Stewart衍生型六维加速度传感器的机构简图  
Fig.2 Mechanism sketch of Stewart-derived six-axis accelerometer

在坐标系 $\{O_2\}$ 与 $\{O_1\}$ 上分别表示出质量块上6个球铰链和外壳上12个球铰链的坐标,分别记为 $b_{i,2}(i=1,2,\dots,6), B_{ij,1}(i=1,2,\dots,6;j=1,2)$ ,矩阵形式分别为

$$(b_{1,2}, b_{2,2}, b_{3,2}, b_{4,2}, b_{5,2}, b_{6,2}) = \begin{bmatrix} -n & 0 & n & n & 0 & -n \\ 0 & -n & -n & 0 & n & n \\ n & n & 0 & -n & -n & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$(B_{11,1}, B_{12,1}, B_{21,1}, B_{22,1}, B_{31,1}, B_{32,1}, B_{41,1}, B_{42,1}, B_{51,1}, B_{52,1}, B_{61,1}, B_{62,1}) =$$

$$\begin{bmatrix} -n-L & -n & 0 & 0 & n & n+L \\ 0 & 0 & -n-L & -n & -n-L & -n \\ n & n+L & n & n+L & 0 & 0 \\ n & n+L & 0 & 0 & -n-L & -n \\ 0 & 0 & n & n+L & n & n+L \\ -n-L & -n & -n-L & -n & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

将球铰链 $b_i$ 在 $\{O_1\}$ 中的坐标记为 $b_{i,1}$ ,其与在 $\{O_2\}$ 中表示的坐标 $b_{i,2}$ 之间满足

$$b_{i,1} = P + R_{12}b_{i,2} \quad (3)$$

其中: $P=(x, y, z)^T$ 为 $\{O_2\}$ 原点在 $\{O_1\}$ 中的坐标值; $R_{12}$ 为 $\{O_2\}$ 相对于 $\{O_1\}$ 的旋转矩阵。

方向余弦、欧拉角和四元数是描述刚体旋转最主要的3种坐标形式,逐个代入后发现,只有使用四元数来描述 $\{O_2\}$ 相对于 $\{O_1\}$ 的旋转运动时,旋转矩阵中的每个元素才能够都表示为关于姿态参量的二次型,如式(4)所示。这为振型方程的求解提供了有利条件。

$$R_{12} = \begin{bmatrix} 2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_2^2) - 1 & 2(\lambda_2\lambda_2 + \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_2 - \lambda_0\lambda_1) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为四元数的虚部元素; $\lambda_0$ 为四元数的实部元素。

传感器支链的运动学方程为

$$L_{ij}e_{ij} = B_{ij,1} - b_{i,1} = B_{ij,1} - [P + R_{12}b_{i,2}] \quad (i=1, 2, \dots, 6; j=1, 2) \quad (5)$$

其中: $L_{ij}$ 为球铰链 $B_{ij}$ 所在支链的实时长度,通过测量压电陶瓷产生的电荷量并运用压电理论计算得到<sup>[10]</sup>; $e_{ij}$ 为球铰链 $B_{ij}$ 所在支链的单位方向向量。

## 2 系统运动微分方程的建立与求解

研究表明,压电式加速度传感器弹性单元的运动速度极小<sup>[8]</sup>。因此,在建立传感器系统的运动微分方程时可以忽略支链的阻尼。为简化计算,笔者在建立动力学模型时,将各支链的刚度视为相同,记为 $k$ 。由于支链的刚度很大,传感器的质量块相对于外壳做微幅振动,计算中涉及到的三阶及以上高阶无穷小量将忽略不计。

### 2.1 系统运动微分方程的建立

传感器系统的动能包括平动动能和转动动能2个部分,势能为支链的弹性势能。文献[16]通过分析传感器弹性体的拓扑构型,证明了传感器的自由度为6,故本系统有6个广义坐标,这里选取描述 $\{O_2\}$ 相对于 $\{O_1\}$ 位置的3个坐标以及姿态的四元数中的3个虚部元素作为系统的广义坐标,用 $q$ 来表示,即其元素分别为 $q_1=x, q_2=y, q_3=z, q_4=\lambda_1, q_5=\lambda_2, q_6=\lambda_3$ 。运用第2类Lagrange方程建立传感器系统的无阻尼自由振动方程为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, 6) \quad (6)$$

其中: $E_k$ 为质量块的动能函数; $E_p$ 为支链的势能函数。

质量块的动能函数为

$$E_k = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_{12}^T \mathbf{v}_{12}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{12}^T \mathbf{R}_{12} \mathbf{I}_2 \mathbf{R}_{12}^T \boldsymbol{\omega}_{12} \quad (7)$$

其中: $\mathbf{v}_{12}$ 为 $\{O_2\}$ 的原点相对于 $\{O_1\}$ 运动的线速度矢量; $\mathbf{I}_2$ 为在 $\{O_2\}$ 中描述质量块的惯性矩阵,且 $\mathbf{I}_2 = \text{diag}(2mn^2/3, 2mn^2/3, 2mn^2/3)$ ; $\boldsymbol{\omega}_{12}$ 为 $\{O_2\}$ 相对于

$$\mathbf{Q}_A^+ = \begin{bmatrix} \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 \end{bmatrix}; \mathbf{Q}_A^- = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 \end{bmatrix}; \mathbf{D}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & (B_{ij,1} + b_{i,2})_z & -(B_{ij,1} + b_{i,2})_y & -(B_{ij,1} - b_{i,2})_x \\ -(B_{ij,1} + b_{i,2})_z & 0 & (B_{ij,1} + b_{i,2})_x & -(B_{ij,1} - b_{i,2})_y \\ (B_{ij,1} + b_{i,2})_y & -(B_{ij,1} + b_{i,2})_x & 0 & -(B_{ij,1} - b_{i,2})_z \\ (B_{ij,1} - b_{i,2})_x & (B_{ij,1} - b_{i,2})_y & (B_{ij,1} - b_{i,2})_z & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{D}_{ij}$ 中矢量 $(\cdot)$ 的下标 $x, y, z$ 表示该矢量在对应坐标轴上的投影。

$\{O_1\}$ 转动的角速度矢量。

为便于振型方程的求解,笔者采用四元数及其导数来表示 $\boldsymbol{\omega}_{12}$ ,其表达式为

$$\boldsymbol{\omega}_{12} = 2 \begin{bmatrix} \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\lambda}} \quad (8)$$

其中: $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = [\dot{\lambda}_1 \ \dot{\lambda}_2 \ \dot{\lambda}_3 \ \dot{\lambda}_0]^T$ 。

将广义坐标、惯性矩阵、式(4),(8)代入式(7),得到动能函数关于广义速度的二次型为

$$E_k \approx m \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} \quad (9)$$

其中: $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6]^T$ ; $\mathbf{H} = \text{diag}(1/2, 1/2, 1/2, 4n^2/3, 4n^2/3, 4n^2/3)$ 。

由式(5)可得每根支链的长度为

$$L_{ij} = \sqrt{[L_{ij}e_{ij}]^T [L_{ij}e_{ij}]} \quad (10)$$

利用泰勒公式将式(10)展开,可得

$$L_{ij} \approx L + \frac{1}{2L} ([L_{ij}e_{ij}]^T [L_{ij}e_{ij}] - L^2) \quad (11)$$

支链的势能函数为

$$E_p = \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^2 (L_{ij} - L)^2 \approx \frac{k}{8L^2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^2 ([L_{ij}e_{ij}]^T [L_{ij}e_{ij}] - L^2)^2 \quad (12)$$

将式(12)扩展到四维空间,同时左乘后置四元数矩阵 $\mathbf{Q}_A^-$ ,得到势能函数关于广义坐标的二次型表达式为

$$E_p = \frac{k}{8L^2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^2 \left( \left[ \mathbf{Q}_A^- \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{Q}_A^+ \begin{bmatrix} b_{i,2} \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{Q}_A^- \begin{bmatrix} B_{ij,1} \\ 0 \end{bmatrix} \right]^T \times \left[ \mathbf{Q}_A^- \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{Q}_A^+ \begin{bmatrix} b_{i,1} \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{Q}_A^- \begin{bmatrix} B_{ij,1} \\ 0 \end{bmatrix} \right] - L^2 \right)^2 = \frac{k}{8L^2} \times \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^2 \left( \left[ \mathbf{Q}_A^- \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{D}_{ij} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} \right]^T \left[ \mathbf{Q}_A^- \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{D}_{ij} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} \right] - L^2 \right)^2 \approx 2kq^T \mathbf{B} q \quad (13)$$

其中: $k$ 为球铰链和压电陶瓷串联组成的支链刚度;

$\mathbf{B} = \text{diag}(1, 1, 1, 4n^2, 4n^2, 4n^2)$ ;

$$\mathbf{B} = \text{diag}(1, 1, 1, 4n^2, 4n^2, 4n^2);$$

需要注意的是,由于构型对称,动能函数及势能函数的二次型为标准型,这为振型方程的高效求解

提供了保障。将式(9),(13)代入式(6),得到传感器系统的无阻尼自由振动方程的矩阵形式为

$$M\ddot{q} + Kq = 0_6 \quad (14)$$

其中: $M$ 为六维加速度传感器系统的惯性矩阵, $M = \text{diag}(m, m, m, 8mn^2/3, 8mn^2/3, 8mn^2/3)$ ;  $K$ 为六维加速度传感器系统的刚度矩阵, $K = \text{diag}(4k, 4k, 4k, 16n^2k, 16n^2k, 16n^2k)$ ;  $0_6$ 为6阶零矢量; $\ddot{q}$ 为系统的广义加速度。

根据式(14)可以看出,传感器的固有频率与重力及支链的预紧力均无关。

## 2.2 支链刚度分析

传感器的支链如图3所示。图中: $ab$ 和 $cd$ 段为球铰链; $bc$ 段为压电陶瓷。在图3(a)中,传感器支链为压电陶瓷及其两端连接的半圆形球铰链组成的部分。如图3(b)所示,左端球铰链的外侧固定在传感器的副板中,右端球铰链的外侧固定在质量块中。文献[17]研究表明,当采用这种特殊形状的柔性铰链时,若最薄处的直径不大于2 mm,球铰链上其他刚度对传感器动态性能的影响可忽略。

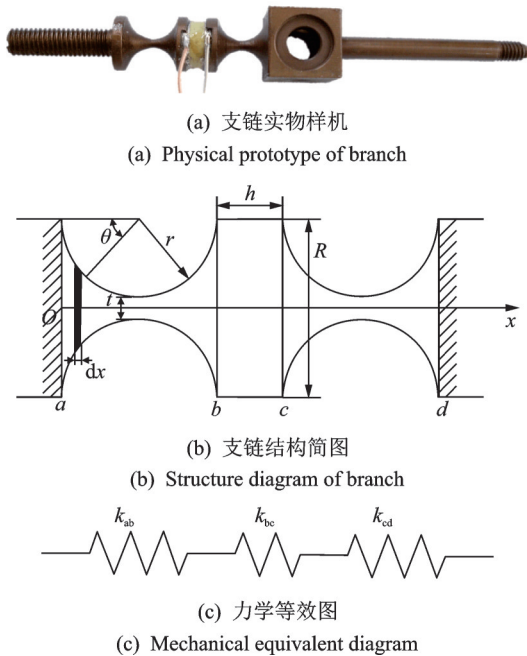


图3 Stewart衍生型六维加速度传感器的支链

Fig.3 Branch chain of Stewart-derived six-axis accelerometer

$ab$ 段刚度 $k_{ab}$ 的计算公式为

$$k_{ab} = \frac{1}{\int_0^{2r} \frac{4}{E\pi(R-(R-t)\sin(\arccos(1-2x/(R-t))))^2} dx} \quad (15)$$

其中: $E$ 为球铰链材料的弹性模量; $R$ 为压电陶瓷的直径; $t$ 为球铰链最薄处厚度。

$bc$ 段压电陶瓷的等效刚度 $k_{bc}$ 的计算公式为

$$k_{bc} = \pi R^2 / 4hS_{33} \quad (16)$$

其中: $h$ 为压电陶瓷的厚度; $S_{33}$ 为压电陶瓷的弹性柔顺系数。

$cd$ 段刚度与 $ab$ 相同,根据图3(c)可以看出,支链刚度由 $ab$ 、 $bc$ 和 $cd$ 3部分串联而成。因此,支链等效刚度 $k$ 的公式为

$$k = \frac{1}{2/k_{ab} + 1/k_{bc}} \quad (17)$$

## 2.3 基频的求解与算例验证

假设系统的广义坐标均以相同的频率和相位作简谐运动,表示为

$$W = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (18)$$

其中: $A$ 为与时间无关的振幅向量,反映主振动的形态,也称主振型; $\omega$ 为系统的固有圆频率(其与固有频率 $f_0$ 的关系为 $\omega = 2\pi f_0$ ); $\varphi$ 为简谐振动的零相位。

将式(18)代入式(14),得到系统的振型方程为

$$(K - \omega^2 M)A = 0 \quad (19)$$

将式(19)的特征方程展开得到一个关于 $\omega$ 的 $n$ 次多项式方程,通过求解该一元高次方程得到系统的固有频率。对于多自由度系统,运用该方法计算固有频率是一项繁琐的工作。因此,笔者采用矩阵迭代法求解传感器系统的基频。将式(19)整理得到

$$DA = \alpha A \quad (20)$$

其中: $D$ 为传感器弹性体的动力矩阵, $D = K^{-1}M$ ;  $\alpha$ 为系统的固有频率相对应的特征值, $\alpha = 1/\omega^2$ 。

假定任一主振型向量 $P_0$ ,代入式(20)等号左端,可得一确定的向量 $DP_0$ ,将其最大的一个分量归一化可得

$$DP_0 = \beta_1 P_1 \quad (21)$$

其中: $P_1$ 为归一化处理后的振型向量; $\beta_1$ 为对应的归一化因子, $\beta_1 = 1/\max\{DP_0\}$ 。

若 $P_1$ 等于 $P_0$ , $P_1$ 即为系统的主振型矢量。否则,将式(21)得到的振型向量 $P_1$ 代替假定的振型向量 $P_0$ ,重复式(21),经过 $\tau$ 次迭代运算以及归一化处理,得到振型向量 $P_\tau$ ,即

$$DP_{\tau-1} = \beta_\tau P_\tau \quad (22)$$

当相邻两次的迭代结果相近,满足 $P_{\tau-1} = P_\tau$ 或者 $P_{\tau-1}$ 与 $P_\tau$ 的谱范数之差的绝对值小于指定精度时,停止迭代。基频的计算流程如图4所示。

传感器的基频 $f_0$ 表示为

$$f_0 = 1/2\pi\sqrt{\beta_\tau} \quad (23)$$

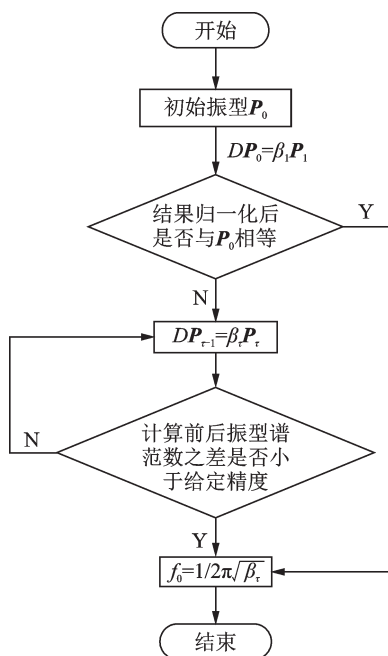


图 4 基频的计算流程

Fig.4 Flow chart of fundamental frequency calculation

通过式(14), (17), (20)~(23), 得到传感器的基频与  $m, R, h$  和  $t$  有关。不失一般性, 随机选取一组结构参数 ( $m=0.499 \text{ kg}, R=8 \text{ mm}, h=3.2 \text{ mm}, t=2 \text{ mm}$ ) 进行验证。振型精度与迭代次数的关系如图 5 所示, 不超过 19 次迭代, 计算得到系统的固有频率及振型, 且误差小于 0.000 1%, 由此计算出的系统基频为 6 372.573 5 Hz。

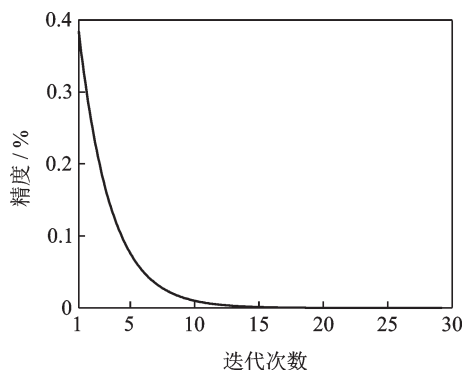


图 5 振型精度与迭代次数

Fig.5 Precision and iteration number

在 Adams 中建立传感器的虚拟样机, 如图 6 所示。用无质量的弹簧代替二力杆特征的支链, 两端通过球铰链分别与外壳和质量块相连接。经过虚拟样机模态分析显示, 传感器的基频为 6 372.573 5 Hz, 验证了基频数学模型的准确性。

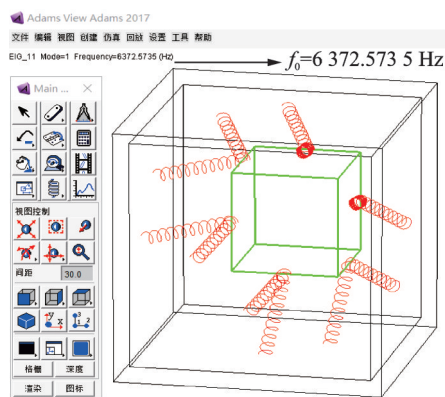


图 6 Stewart 衍生型六维加速度传感器的虚拟样机

Fig.6 Virtual prototype of Stewart-derived six-axis accelerometer

### 3 工作频带研究

六维加速度传感器正常工作的前提是杜绝或者减少系统出现共振现象, 即当输出信号发生相位失真或幅值失真时, 传感器不能正常工作<sup>[18]</sup>。为了确定传感器在不同工作频率下输出信号的情况, 基于影响虚拟样机基频的 2 个因素(质量块的边长与支链的刚度), 随机建立 3 组具有不同基频的虚拟样机, 参数设置如表 1 所示。

表 1 模型参数设置及基频

Tab.1 Model parameters setting and fundamental frequency

组号	$m/\text{kg}$	$n/\text{mm}$	$k/(\text{kN}\cdot\text{mm}^{-1})$	$f_0/\text{kHz}$
A	0.499	20	200	6.37
B	0.499	20	100	4.50
C	1.685	30	150	3.00

根据 ADAMS 动力学的内核算法要求, 在外界驱动频率为  $f$  时, 将仿真步长设置为  $1/(200f)$ 。将传感器输出信号的综合引用误差定义为

$$\mu = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} \left| \frac{\bar{f}_i - f_i}{f_i} \right| \times 100\% \quad (24)$$

其中:  $\bar{f}_i, f_i$  分别为第  $i$  条支链轴向力的试验值和理论值。

传感器输出信号的综合引用误差与工作频率、基频比值的关系如图 7 所示。可见, 当传感器的工作频率接近于基频的 1/33 左右时, 输出信号开始不再稳定。为进一步研究工作频率与基频之间的关系, 并挖掘传感器的可行工作频率, 根据 Taguchi 正交试验理论, 将影响虚拟样机基频的 2 个参数各设置 16 个影响值进行 256 组全因子试验。此外, 为了研究重力及支链预紧力对工作频带的影响, 对质量块质量

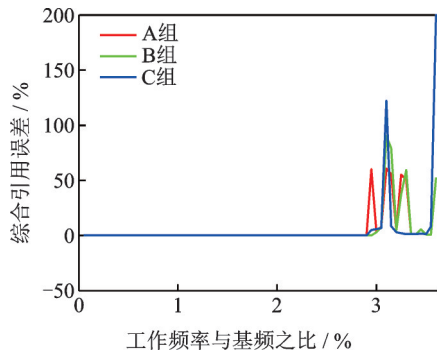


图7 不同工作频率的综合引用误差

Fig.7 Comprehensive reference error corresponding to different working frequencies

为0.062 kg和0.499 kg的2组试验分别施加重力及预紧力。限于篇幅,此处仅给出其中的63组试验数据,模型参数设置及工作频带上限如表2所示。

表2 模型参数设置及工作频带上限

Tab.2 Model Parameters Setting and the maximum working frequency

$m/\text{kg}$	$k/(\text{kN}\cdot\text{mm}^{-1})$						Hz
	50	100	150	200	250	300	
0.062	257	364	445	514	575	630	681
0.122	187	263	324	374	418	458	493
0.211	143	203	246	287	321	352	380
0.334	112	159	195	225	252	278	298
0.499	93	132	161	186	208	228	244
0.711	78	109	135	156	173	189	205
0.975	66	93	114	132	148	163	176
1.298	57	81	100	114	127	140	151
1.685	52	76	87	102	117	127	143

定义工作频带上限指标  $s$  为

$$s = f^*/f_0 \times 100\% \quad (25)$$

其中:  $f^*$  为试验测量频带对应的工作频带上限;  $f_0$  为传感器对应的基频。

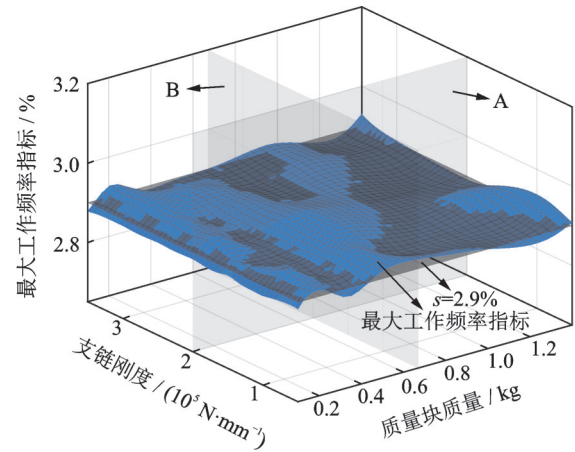
将试验结果代入式(25), 得到  $s$  介于  $1/35 \sim 1/32$  之间。六维加速度传感器的工作频带定义为

$$B[f] = [f_{\min}, sf_0] \quad (26)$$

其中:  $f_{\min}$  为传感器工作频带的下限, 由电荷放大器的下限截止频率决定。

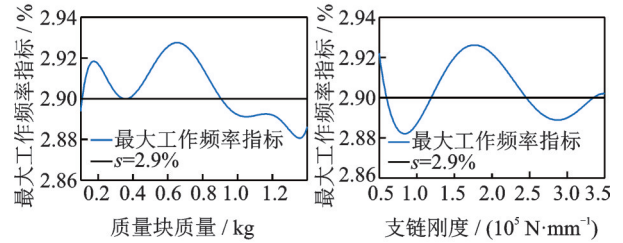
为了更加直观显示传感器工作频带上限与基频之间的关系, 在 Matlab 中绘制工作频带上限指标  $s$  与  $m$  及  $k$  的关系, 如图8所示。

为了评价上述试验数据的可靠程度, 基于测量数据的不确定度评定, 采用肖维勒准则剔除试验的异常值, 得出样机试验测得值的不确定度<sup>[19]</sup>接近于



(a) 三维视图

(a) Three-dimensional view



(b) A界面视图

(b) View of interface A

(c) B界面视图

(c) View of interface B

图8 工作频带上限指标与质量块质量及支链刚度的关系  
Fig.8 The Relationship between the index of max working frequency and side length of mass block, branch stiffness

0(等于0.004 1), 验证了试验结果的可靠性。

值得注意的是, 上述结论是在同时施加6个加速度分量的情况下得到的; 当传感器在一维线加速度、一维角加速度、三维线加速度和三维角加速度等加速度维数小于6的工况时, 上述结论同样适用。另外, 试验结果还显示, 重力以及传感器支链的预紧力不影响传感器的测量频率带宽。

## 4 关于工作频带的性能图谱

通过分析发现, 传感器的基频越大, 则传感器的工作频带越宽。因此, 可将传感器的基频作为传感器的工作频带性能指标。影响传感器系统基频的主要结构参数有4个, 分别为  $m, t, R$  及  $h$ 。在基于基频这一性能指标设计传感器时, 仅通过式(23)很难整体把握参数变化对传感器基频的影响。另外, 基于笛卡尔坐标系的曲线、曲面图最多只能展示性能指标和2个参数之间的关系, 4个参数的情况则无法展示。因此, 笔者采用空间模型技术, 计算传感器系统的基频与上述4个参数之间的映射关系。

根据空间模型理论<sup>[20-21]</sup>,随机选取 3 组质量参数(0.6 kg, 0.8 kg, 1.0 kg),研究基频指标随其他 3 个参数连续变化时的情况。

将结构参数  $t, R$  和  $h$  进行无量纲化,令

$$\begin{cases} r = (t + R + h) / 3 \\ r_1 = t / r \\ r_2 = R / r \\ r_3 = h / r \end{cases} \quad (27)$$

考虑到传感器结构限制和加工工艺的要求,以上参数之间还需满足以下条件: $r_1 + r_2 + r_3 = 3$ ;  $0 < r_1 < r_2 < 3$ ;  $0 < r_3 < 3$ 。

将满足该条件的结构参数用几何空间模型图表示,空间模型图投影到  $xy$  系,用 2 个无量纲参数来表示 3 个无量纲参数,其坐标变换关系为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

图 9 为传感器弹性体的空间模型及平面映射。满足传感器弹性体 Stewart 衍生型并联机构结构要求的参数组合区域如图 9 中阴影部分所示。利用 Matlab 计算各组参数下对应的全域性能指标,得到传感器工作频带的全域性能图谱,如图 10 所示。

比较图 10 中相同无量纲参数区域的基频,得到工作频带性能指标与质量块质量成反比关系。此外,图谱也揭示了工作频带性能指标与其他 3 个参数之间的分布规律。实际操作时,需要先基于性能图谱找到一组最优的无量纲参数,再结合工程的实际需要确定具体结构参数。为了验证其正确性,在最优尺寸区域(黄色区域)内任意选取 2 组离最优解不同距离的 2 组尺寸参数: $x=2.12, y=0.29$  和  $x=2.24, y=0.36$ , 在最优尺寸区域外按不同质量块质量分别选取一组尺寸参数  $x=2, y=0.4$ 。计算各结

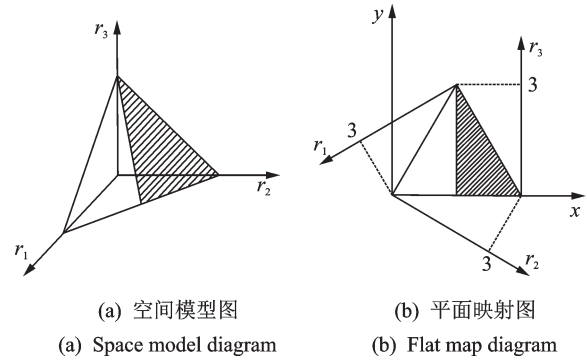


图 9 传感器弹性体的空间模型及平面映射  
Fig.9 Geometric space and planar mapping of 12-6 SPS parallel mechanism

构参数下的性能指标,如表 3 所示。第 1, 2, 3 组质量块质量相同,但是与最优尺寸区域之间的距离逐渐变大,因此其对应基频越来越小。第 3, 4 组的无量纲参数相同,但是第 3 组质量块质量较小,因此其基频较大,与图 10 表现一致。

表 3 各结构参数下的性能指标

Tab.3 Comprehensive performance index of structural parameters

组号	$x$	$y$	$m/\text{kg}$	$t/\text{mm}$	$R/\text{mm}$	$h/\text{mm}$	$f_0/\text{kHz}$
1	2.12	0.29	0.6	4.2	7.0	1.2	8.9
2	2.24	0.36	0.6	3.7	7.4	1.5	8.4
3	2.00	0.40	0.6	4.5	6.4	1.7	8.2
4	2.00	0.40	1.0	4.5	6.4	1.7	6.4

### 5 实物样机试验

为了验证频带模型及检测方案的可行性,加工了传感器的实物样机,质量块的质量为 1.45 kg、压电陶瓷直径为 8 mm、压电陶瓷厚度为 3 mm、球铰链

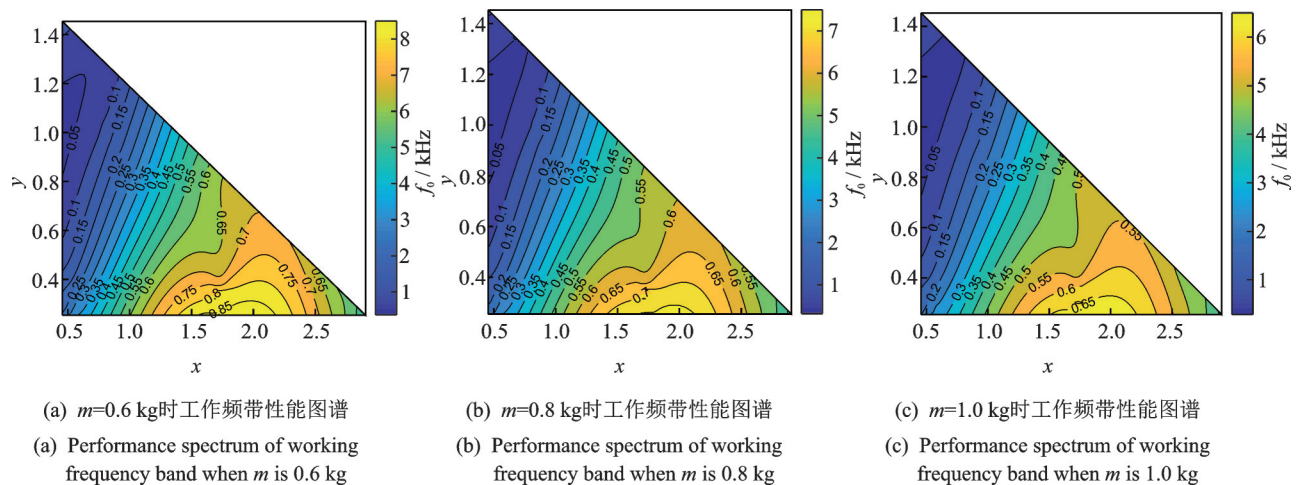


图 10 传感器工作频带的全域性能图谱

Fig.10 Global performance atlases of fundamental frequency

最薄处的厚度为 1.5 mm。基于理论模型计算出实物样机的基频为 3 236.22 Hz,得到传感器的工作频带上限为 92.46~101.13 Hz。

搭建实物样机实验台,包括 220 V 电源、5V 直流电源、惯性测量单元、信号发生器、功率放大器、激振器、电荷放大器、数据采集卡和课题组自行开发的虚拟仪器客户端,试验方案如图 11 所示。

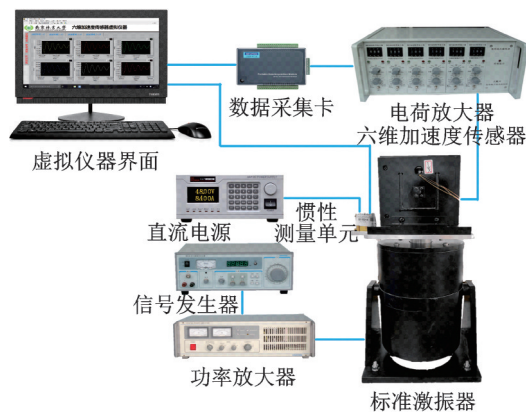


图 11 试验方案

Fig.11 Experimental scheme

在传感器的工作频带内,通过标准激振器对其施加加速度,结合惯性测量单元对比设备,计算出传感器输出信号的综合引用误差。考虑到激振器的性能限制(最大允许激励频率为 40 Hz),设置了 5 组试验,表 4 为试验频率及其误差。

表 4 试验频率及其误差

Tab.4 Test frequency and its corresponding error

激励频率/Hz	5	10	20	30	40
综合引用误差/%	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53

任意选择一组激励,对输出信号进行分析,其综合引用误差如图 12 所示。滤波后的试验误差不超过 0.53%,且没有出现随时间累积的现象。运用文献[22]提出的半闭环结构的误差自补偿算法,可以将该误差进行补偿,保证加速度解耦的精度。

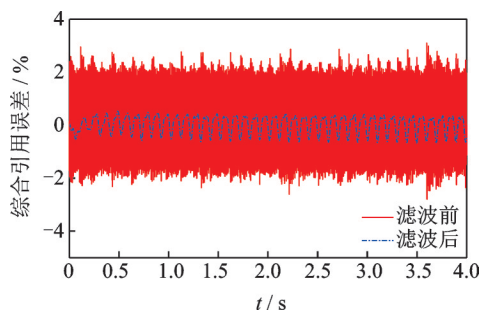


图 12 试验输出信号的综合引用误差

Fig.12 Comprehensive reference error of test output signal

## 6 结论

1) 运用第 2 类 Lagrange 方程,建立 Stewart 衍生型六维加速度传感器系统的运动微分方程。使用四元数描述系统中的旋转矩阵和角速度矢量,求解动、势能的二次型函数,进而给出基频的计算模型。算例显示,迭代次数不超过 19,算法即可收敛。该模型同样适用于不对称构型,只不过其振型方程求解的迭代步数可能会更多。

2) 给出传感器工作频带的定义式,其下限由电荷放大器的下限截止频率决定,上限由固有频率决定。通过虚拟试验,研究了传感器工作频率与固有频率之间的关系,推导出工作频带上限为基频的 1/35~1/32。该思路同样适用于其他种类的六维加速度传感器以及六维力/力矩传感器等多输入、输出耦合系统。

3) 将基频定义为传感器的工作频带性能指标,利用空间模型理论对其结构参数的分布规律进行分析,绘制基频的全域性能图谱。可见,工作频带指标与质量块的质量成反比,且无量纲参数  $x$  在 1.8 左右, $y$  在 0.2 左右对应的区域为最优参数区域。

4) 在工作频率带宽内,采用一定频率加速度荷载进行试验。结果显示,试验测试输出信号的综合引用误差不超过 0.53%,验证了工作频带模型的可行性。

## 参 考 文 献

- [1] LIU C Q, LI Y G, ZHOU G Y, et al. A sensor fusion and support vector machine based approach for recognition of complex machining conditions [J]. Journal of Intelligent Manufacturing, 2018, 29 (8) : 1739-1752.
- [2] 李艳生,张延恒,孙汉旭,等. 机床自动换刀机构振动源确定及分析[J]. 振动、测试与诊断, 2014, 34(1): 141-146.  
LI Yansheng, ZHANG Yanheng, SUN Hanxu, et al. Blind source separation of single-channel cylinder-head vibration signal based on order filtering [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2014, 34(1) : 141-146. (in Chinese)
- [3] 代月帮,李宏坤,魏兆成. 考虑模态耦合的球头铣刀颤振稳定域建模方法[J]. 振动、测试与诊断, 2019, 39(3): 525-530.  
DAI Yuebang, LI Hongkun, WEI Zhaocheng. Modeling method for chatter stability lobes of ball-end mill based on precise integration [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2019, 39(3) : 525-530. (in Chinese)
- [4] 倪风雷,林鹏飞,邹添. 基于六维加速度传感器的大型机械臂柔性关节振动抑制[J]. 空间控制技术与应用, 2018, 44(5): 7-13.



- NI Fenglei, LIN Pengfei, ZOU Tian, et al. Vibration suppression strategy for flexible joint of large manipulator based on a six dimensional accelerometer[J]. *Aerospace Control and Application*, 2018, 44(5): 7-13. (in Chinese)
- [5] STAUFER P, GATTRINGER H. State estimation on flexible robots using accelerometers and angular rate sensors[J]. *Mechatronics*, 2012, 22(8): 1043-1049.
- [6] 鄢小安, 贾民平. 自适应多尺度开闭平均-hat变换及在轴承故障诊断中的应用[J]. *东南大学学报(自然科学版)*, 2019, 49(5): 826-832.  
YAN Xiaolan, JIA Minping. Adaptive multi-scale opening and closing average-hat transform and its application in bearing fault diagnosis[J]. *Journal of Southeast University (Natural Science Edition)*, 2019, 49(5): 826-832. (in Chinese)
- [7] WU H H, LEMAIRE E D, BADDOUR N. Activity change-of-state identification using a blackberry smartphone [J]. *Journal of Medical and Biological Engineering*, 2012, 32(4): 265-272.
- [8] SUN Z B, LIU J H, YU C Z, et al. A small range six-axis accelerometer designed with high sensitivity DCB elastic element[J]. *Sensors*, 2016, 16(9): 1552-1569.
- [9] ZOU T, NI F L, GUO C Q, et al. A 6-DOF acceleration sensor with cylindrical configuration [J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2016, 251: 167-178.
- [10] YOU J, WANG L, XI F, et al. Decoupling algorithm and maximum operation frequency of a novel parallel type six-axis accelerometer[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2020, 20(21): 12637-12651.
- [11] 刘迎春. 传感器原理、设计与应用[M]. 5版. 北京: 国防工业出版社, 2016: 119-136.
- [12] LI D, DUAN K. 1-3 Piezocomposite for vibration accelerometer applications [J]. *Ferroelectrics*, 2014, 466(1): 86-91.
- [13] 于春战, 刘晋浩, 孙治博. 基于Kane方法的并联式六维加速度传感器动态特性研究[J]. *仪器仪表学报*, 2015, 36(7): 1612-1617.  
YU Chunzhan, LIU Jinhao, SUN Zhibo. Research on the dynamic characteristics of parallel six-axis accelerometer based on Kane's method[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2015, 36(7): 1612-1617. (in Chinese)
- [14] 孙治博, 刘晋浩, 于春战. 一种六维加速度传感器的测量属性分析[J]. *仪器仪表学报*, 2016, 37(2): 467-473.  
SUN Zhibo, LIU Jinhao, YU Chunzhan. Research on measuring characteristic for a six-axis accelerometer[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2016, 37(2): 467-473. (in Chinese)
- [15] LIU J, LI M, QIN L, et al. Principle research on a single mass piezoelectric six-degrees-of-freedom accelerometer [J]. *Sensors*, 2013, 13(8): 10844-10855.
- [16] 尤晶晶, 符周舟, 吴洪涛, 等. 12-6台体型Stewart冗余并联机构的正向运动学研究[J]. *农业机械学报*, 2017, 48(12): 395-402.  
YOU Jingjing, FU Zhouzhou, WU Hongtao, et al. Forward kinematics of general 12-6 Stewart redundant parallel mechanism[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery*, 2017, 48(12): 395-402. (in Chinese)
- [17] 尤晶晶. 基于冗余并联机构的压电式六维加速度传感器研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2013.
- [18] ZINE G, SAAD S, RABAH B. Resonance effect decrease and accuracy increase of piezoelectric accelerometer measurement by appropriate choice of frequency range[J]. *Shock and Vibration*, 2018, 2018: 1-8.
- [19] KUMAR P T K. Deciphering robust reactor kinetic data using mutual information [J]. *Annals of Nuclear Energy*, 2007, 34(3): 201-206.
- [20] YUE Y, GAO F, ZHAO X C, et al. Relationship among input-force, payload, stiffness and displacement of a 3-DOF perpendicular parallel micro-manipulator [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2010, 45(5): 756-771.
- [21] 李研彪, 郑航, 徐梦茹, 等. 5-PSS/UPU并联机构的多目标性能参数优化[J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2019, 53(4): 654-663.  
LI Yanbiao, ZHENG Hang, XU Mengru, et al. Multi-target parameters of performance optimization for 5-PSS/UPU parallel mechanism [J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2019, 53(4): 654-663. (in Chinese)
- [22] 尤晶晶, 李成刚, 吴洪涛, 等. 并联式六维加速度传感器的混合解耦及误差自补偿算法[J]. *仪器仪表学报*, 2015, 36(10): 2249-2257.  
YOU Jingjing, LI Chenggang, WU Hongtao, et al. Hybrid decoupling algorithm and error auto-compensation algorithm of the parallel type six-axis accelerometer [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2015, 36(10): 2249-2257. (in Chinese)



**第一作者简介:**王林康,男,1995年7月生,硕士生。主要研究方向为六维加速度传感器及并联机构。曾发表《Forward and inverse dynamics of a six-axis accelerometer based on a parallel mechanism》(《Sensors》2021, No.1)等论文。  
E-mail: wlk0710@njfu.edu.cn

**通信作者简介:**尤晶晶,男,1985年7月生,博士、副教授、硕士生导师。主要研究方向为机器人机构学及六维传感器。  
E-mail: youjingjing251010@njfu.edu.cn