

# 基于频响函数的稳健有限元模型修正<sup>\*</sup>

范新亮, 王 彤, 夏遵平

(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室 南京, 210016)

**摘要** 传统的基于频响函数(frequency response function, 简称 FRF)的模型修正方法在测试噪声较大、初始分析频响与测试频响残差较大、待修正参数较多等情况下不易收敛,为此提出了一种采用移频技术的极大似然估计有限元模型修正方法。首先,利用“先验”的频响函数方差信息,构造极大似然估计器,迭代求得最优的待修正参数估计;其次,在迭代方程中引入移频方法,采用总体最小二乘平差方法计算方程的解,以提高参数识别的收敛性和稳定性;最后,根据频率点的筛选准则剔除数据,采用一种高精度的频响扩充方法以减小扩充所带来的额外误差。列车转向架构架仿真算例和三角机翼飞机测试模型的修正结果表明,该方法抗噪性较强,在复杂情况下仍可以得到较好的修正结果。

**关键词** 模型修正; 频响函数; 极大似然估计; 移频方法; 抗噪性

**中图分类号** TH113.1; O327

## 引 言

有限元模型修正技术首先在航空领域中提出,用于飞行器预测响应与载荷、颤振分析以及振动控制。近年来,在机械设计、土木桥梁和汽车等领域均得到了成功应用。自 20 世纪 80 年代以来,经过学者们的研究与完善,有限元模型修正已基本形成了一套完善的理论框架<sup>[1]</sup>。

目前,应用最广泛的模型修正方法按照用于修正的不同试验数据,分为基于模态的方法、基于频响函数的方法<sup>[1]</sup>以及基于时域动响应的方法。Modak 等<sup>[2]</sup>通过数值仿真,对比了基于模态与基于频响函数的方法的差异及收敛性。基于模态参数的方法<sup>[3-5]</sup>简单有效,在多数情况下能给出较满意的修正结果,但也存在一些缺陷:如模态参数提取过程引入了误差及不确定性<sup>[6]</sup>,待修正参数数目受到测试模态数量的限制。基于频响函数的方法则避免了提取模态参数带来的误差,且具有大量数据可修正,对解决待修正参数众多的问题具有优势。同时,频响函数对于结构参数的敏感性使得模型修正算法更容易准确识别待修正参数<sup>[7]</sup>。频响函数的模型修正方法可分为基于参数一阶灵敏度<sup>[8-11]</sup>和基于矩阵变换的方法<sup>[12-14]</sup>。后者解决初始分析频响与测试频响残差较大问题的能力优于前者,但前者的抗噪性更强。

为了提高矩阵变换方法的收敛性,Pascual 等<sup>[15]</sup>基于频响相关性准则,提出在矩阵变换方法中引入移频技术,利用分析频响和测试频响相匹配的频率点处的数据进行模型修正<sup>[16]</sup>,提高了频响函数残差初始值较大及待修正参数数目较多时的收敛性。Gang 等<sup>[17]</sup>在该方法的基础上提出伪自由度的概念来增加测试自由度数目较少时的算法收敛性。但是,基于矩阵变换方法的本身特点决定了其抗噪性的不足,若在基于参数一阶灵敏度的方法中引入移频技术,则能在提高收敛性的同时改善抗噪性。

笔者提出了一种采用移频技术的极大似然估计有限元模型修正方法。在极大似然估计方法的基础上引入移频方法,得到移频格式的频响函数残差关于参数的一阶灵敏度矩阵,将原先基于测试频率点处的频响函数残差最小化改进为基于所匹配的频率点处的频响函数残差最小化。同时,引入总体最小二乘平差方法,提高系统矩阵求解的抗干扰能力。给出了频率点的筛选准则,包括频带的选择及参与修正的频率点的选择,剔除较差的试验数据,提高算法的收敛能力。基于模态展开式推导了精度较高的频响扩充方法,减小扩充误差对修正过程的影响。本研究方法与引入移频的矩阵变换方法的对比结果说明其抗噪性的改进,通过不同噪声水平的仿真算例与试验,验证了本方法的有效性。

<sup>\*</sup> 航空科学基金资助项目(20161352011);江苏高校优势学科建设工程资助项目  
收稿日期:2019-12-03;修回日期:2020-01-13

# 1 理论背景

## 1.1 频率点匹配及移频方法

频率点匹配采用频响函数形状相关性 $\alpha_s$ 作为匹配指标。 $\alpha_s$ 反映了模型修正前后的测试频响函数与有限元模型分析频响函数在全频域的相关性<sup>[15]</sup>,相当于振型相关性的一种推广,其定义为

$$\alpha_s(\omega_T^k, \omega_F^i) = \operatorname{Re} \left( \frac{\mathbf{h}_T(\omega_T^k)^H \mathbf{h}_F(\omega_F^i)}{\|\mathbf{h}_F(\omega_F^i)\| \cdot \|\mathbf{h}_T(\omega_T^k)\|} \right) \quad (1)$$

其中: $\omega_T^k, \omega_F^i$ 分别为测试频响函数与分析频响函数的频率点; $\mathbf{h}_T(\omega_T^k), \mathbf{h}_F(\omega_F^i)$ 分别为相应频率点的测试频响函数值与分析频响函数值;Re表示取实部。

显然,有限元模型与实际结构越接近, $\alpha_s$ 的对角元素越趋近1。

频率点匹配的基本原理如图1所示。对于测试频响函数曲线的任意一个频率点,在分析频响函数曲线上寻找与测试频率点处频响函数的相关性最高的频率点,得到相匹配的频率点序列,记为

$$\{(\omega_T^k, \omega_F^k) | \alpha_s(\omega_T^k, \omega_F^k) \geq \delta_{\min}\} \quad (2)$$

( $k = 1, 2, \dots, N_{\text{match}}$ )

其中: $\delta_{\min}$ 为允许匹配的最小相关性数值。

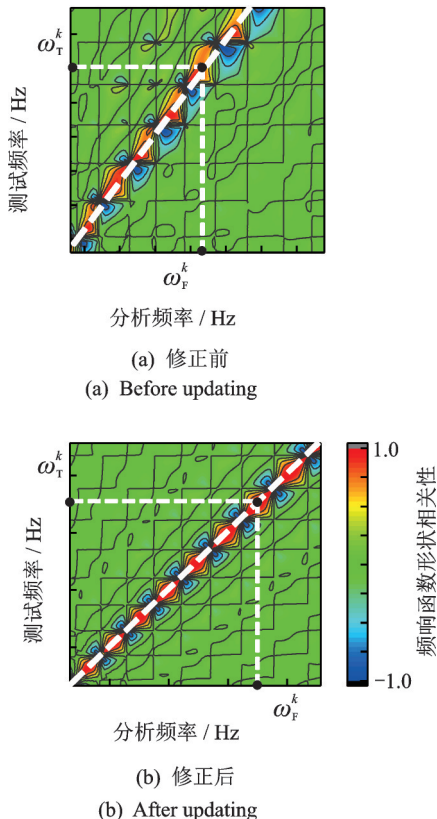


图1 频率点匹配基本原理

Fig.1 The principle of frequency points matching

以相匹配的频率点处的频响函数残差作为修正目标,有利于修正参数的收敛<sup>[15]</sup>。文献[17]提出了引入移频技术的基于矩阵变换方法的模型修正公式

$$\begin{aligned} H_F^*(\omega_F^k) T^T \Delta D(\omega_T^k, \theta) T H_{T,j}^*(\omega_T^k) &= H_{F,j}^*(\omega_F^k) - \\ H_{T,j}^*(\omega_T^k) - H_F^*(\omega_F^k) T^T (D_F(\omega_T^k) - \\ D_F(\omega_F^k)) T H_{T,j}^*(\omega_T^k) \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $\Delta D(\omega_T^k, \theta)$ 为包含待修正参数 $\theta$ 的动刚度矩阵修正量; $D_F$ 为有限元模型动刚度矩阵全量; $T$ 为有限元模型总体自由度与测试自由度的转换矩阵; $H_{T,j}^*$ 为第 $j$ 个激励自由度的测试频响函数; $H_F^*$ 为测试自由度上的分析频响函数; $H_{F,j}^*$ 为其第 $j$ 列。

式(3)的迭代形式为

$$S(\omega_T^k, \omega_F^k, \theta^r) \Delta \theta^r = \Delta f(\omega_T^k, \omega_F^k, \theta^r) \quad (4)$$

式(4)通过模型缩聚、移频方法,并以相匹配的频率点处的频响函数残差建立了非完备自由度下的模型修正方法<sup>[17]</sup>。其详细推导过程及各符号含义见文献[17]。

## 1.2 基于移频的极大似然估计方法

极大似然估计需要测量数据的“先验”噪声信息,当满足互不相关的白噪声假设时,该“先验”信息可由测量数据的标准方差来代替<sup>[18]</sup>。对于具有 $N_o$ 个输出、 $N_i$ 个输入的频响函数,共包含 $N_o N_i$ 个随机变量。假设所有频率点处的频响函数测量值相互独立,则此 $N_o N_i$ 个随机变量的联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(\omega, \theta) &= \left( (2\pi)^{N_o N_i} |C(\omega)| \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ \exp \left( -\frac{1}{2} \mathbf{v}(\omega, \theta)^H C(\omega)^{-1} \mathbf{v}(\omega, \theta) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

其中: $\theta$ 为待估计的修正参数; $\mathbf{v}(\omega)$ 为频响函数测量值 $H_T^*$ 与拟合值(有限元模型分析值) $H_F^*$ 的残差向量; $C(\omega)$ 为频响函数中噪声的协方差矩阵。

第 $j$ 个激励自由度处频响函数拟合值的测试自由度分量采用动刚度矩阵增量参数化形式表达为

$$\begin{aligned} H_{F,j}^*(\omega_k, \theta) &= P_o^T H_F(\omega_k, \theta) e_j = P_o^T D_F(\omega_k, \theta)^{-1} e_j = \\ P_o^T (D_F^0 + \Delta D(\omega_k, \theta))^{-1} e_j &= P_o^T \left( -\omega_k^2 \sum_{e=1}^N \theta_\alpha^e M^e + \right. \\ \left. i\omega_k \sum_{e=1}^N \theta_\beta^e C^e + i \sum_{e=1}^N \theta_\gamma^e G^e + \sum_{e=1}^N \theta_\delta^e K^e \right)^{-1} e_j \end{aligned}$$

其中: $P_o^T$ 与 $e_j$ 分别为输出自由度(测试自由度)与第 $j$ 个输入自由度(激励自由度)的频响函数在完备自由度的频响函数 $H_F$ 上的筛选矩阵; $\theta_\alpha^e M^e, \theta_\gamma^e K^e, \theta_\beta^e C^e, \theta_\delta^e G^e$ 为有限元模型按单元属性及材料划分的第 $e$ 个组对应的质量、刚度及阻尼矩阵; $\theta_\alpha^e, \theta_\gamma^e, \theta_\beta^e$ 为

其在待修正参数 $\theta$ 中相应分量; $N$ 为组数; $i^2=-1$ 。

与拟合值 $H_{F,j}^*$ 相对应的,取测量值 $H_T^*$ 的第 $j$ 列 $H_{T,j}^*$ 。当各列频响函数 $H_{T,j}^*$ 噪声相互独立时, $C(\omega)$ 成为块对角矩阵,其矩阵块为

$$C_j(\omega_k) = \text{cov}(\mathbf{v}_j; \mathbf{v}_j^H) = \text{cov}(H_{T,j}^*(\omega_k) H_{T,j}^{*H}(\omega_k)) \quad (6)$$

根据极大似然估计原理,得到等价极大似然函数

$$L(\theta) = \sum_{k=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} (\mathbf{v}_j(\omega_k, \theta)^H C_j(\omega_k)^{-1} \mathbf{v}_j(\omega_k, \theta)) \quad (7)$$

将式(7)改写为

$$L(\theta) = \mathbf{Q}(\theta)^H \mathbf{Q}(\theta) \quad (8)$$

根据Newton-Gauss方法,得到待识别参数 $\theta$ 的迭代公式为

$$\nabla^2 L(\theta^r) \mathbf{d}^{r+1} = -\nabla L(\theta^r) \quad (9)$$

其中: $\mathbf{d}^{r+1}$ 为第 $r+1$ 个迭代步的修正参数增量,且 $\mathbf{d}^{r+1} = \theta^{r+1} - \theta^r$ 。

由式(9)得到迭代方程

$$\mathbf{J}(\theta^r) \mathbf{J}(\theta^r)^H \mathbf{d}^{r+1} = -\mathbf{J}(\theta^r) \mathbf{Q}(\theta^r) \quad (10)$$

其中:雅可比矩阵 $\mathbf{J} = \nabla \mathbf{Q}$ 。

雅可比矩阵与频率点 $\omega_k$ 及激励自由度 $j$ 对应的矩阵块为

$$\frac{d\mathbf{Q}_k^j(\theta)}{d\theta^T} = -C_j^{-\frac{1}{2}}(\omega_k) P_o^T \frac{dD_F^{-1}(\omega_k, \theta)}{d\theta^T} (I \otimes \mathbf{e}_j) = C_j^{-\frac{1}{2}}(\omega_k) P_o^T D_F^{-1}(\omega_k, \theta) A(\omega_k) (I \otimes D_F^{-1}(\omega_k, \theta) \mathbf{e}_j) \quad (11)$$

其中: $\mathbf{Q}_k^j(\theta)$ 的上标为激励自由度,下标为频率点; $I$ 为单位矩阵; $\otimes$ 为矩阵直积。

$A(\omega)$ 为

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} -\omega^2 M^1 & \cdots & -\omega^2 M^N & i(\omega C^1 + G^1) & \cdots \\ & & & i(\omega C^N + G^N) & K^1 & \cdots & K^N \end{bmatrix} \quad (12)$$

将式(12)代入式(11),由式(10)得到模型修正方程为

$$P_o^T H_F(\omega_k, \theta^r) \Delta D(\omega_k, \theta^{r+1}) H_F(\omega_k, \theta^r) \mathbf{e}_j = -H_{T,j}^*(\omega_k) + H_{F,j}^*(\omega_k, \theta^r) \quad (13)$$

式(13)即为由极大似然估计导出的频率点 $\omega_k$ 、激励自由度 $j$ 处测试自由度上的基于参数灵敏度的模型修正方程,可见其无需进行缩聚或扩充即可识别修正参数。

结合移频方法与极大似然估计方法各自的优势,笔者提出一种基于移频的极大似然估计方法。假设选取的匹配频率点序列为 $\{(\omega_T^k, \omega_F^k) | k=1, 2, \dots, N_{\text{match}}\}$ ,当 $P_o$ 取完备自由度即 $P_o = I$ 时,式(13)可写为

$$H_F(\omega_k, \theta^r) \Delta D(\omega_k, \theta^{r+1}) H_{F,j}(\omega_k, \theta^r) = -H_{T,j}(\omega_k) + H_{F,j}(\omega_k, \theta^r) \quad (14)$$

其中: $H_{F,j} = H_F \mathbf{e}_j$ ;  $H_{T,j}$ 为完备自由度上的测试频响函数。

在各个测试频率点 $\omega_T^k$ 处,式(14)两端左乘 $D_F$ ,得到

$$\Delta D(\omega_T^k, \theta^{r+1}) H_{F,j}(\omega_T^k, \theta^r) = -D_F(\omega_T^k, \theta^r) H_{T,j}(\omega_T^k) + \mathbf{e}_j \quad (15)$$

在式(15)右端进行变化,得到

$$\Delta D(\omega_T^k, \theta^{r+1}) H_{F,j}(\omega_T^k, \theta^r) = -D_F(\omega_T^k, \theta^r) H_{T,j}(\omega_T^k) - (D_F(\omega_T^k, \theta^r) - D_F(\omega_F^k, \theta^r)) H_{T,j}(\omega_T^k) + \mathbf{e}_j \quad (16)$$

在式(16)两端左乘 $D_F^{-1}$ ,得到移频后的模型修正方程为

$$H_F(\omega_F^k, \theta^r) \Delta D(\omega_T^k, \theta^{r+1}) H_{F,j}(\omega_T^k, \theta^r) = H_{F,j}(\omega_F^k, \theta^r) - H_{T,j}(\omega_T^k) - \boldsymbol{\varepsilon}_j(\omega_T^k, \omega_F^k, \theta^r) \quad (17)$$

其中:残余项 $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ 为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j(\omega_T^k, \omega_F^k, \theta^r) = H_F(\omega_F^k, \theta^r) (D_F(\omega_T^k, \theta^r) - D_F(\omega_F^k, \theta^r)) H_{T,j}(\omega_T^k)$$

为了得到测试自由度上的模型修正公式,在式(17)两端左乘测试自由度筛选矩阵 $P_o^T$ 的转置,从而得到

$$\mathbf{S}_k^j(\omega_T^k, \omega_F^k, \theta^r) \mathbf{d}^{r+1} = \Delta f_k^j(\omega_T^k, \omega_F^k, \theta^r) \quad (18)$$

系数矩阵 $\mathbf{S}_k^j$ 即为相匹配的频率点处的频响函数残差关于待修正参数的灵敏度矩阵

$$\mathbf{S}_k^j(\omega_T^k, \omega_F^k, \theta^r) = [\mathbf{S}^a \quad \mathbf{S}^b \quad \mathbf{S}^y] \quad (19)$$

其中: $\mathbf{S}^a = [\cdots -\omega_T^k H_{F,o}^T(\omega_F^k, \theta^r) M^e H_{F,j}(\omega_T^k, \theta^r) \cdots]$ ;  $\mathbf{S}^b = [\cdots i H_{F,o}^T(\omega_F^k, \theta^r) (\omega_T^k C^e + D^e) H_{F,j}(\omega_T^k, \theta^r) \cdots]$ ;  $\mathbf{S}^y = [\cdots H_{F,o}^T(\omega_F^k, \theta^r) K^e H_{F,j}(\omega_T^k, \theta^r) \cdots]$ ;  $H_{F,o} = P_o^T H_F$ ;  $H_{F,o}(\omega_F^k, \theta^r)$ ,  $H_{F,j}(\omega_T^k, \theta^r)$ 均为上一迭代步所更新的矩阵。

观测向量 $\Delta f_k^j$ 由相匹配的频率点处的频响残差与残余项组成

$$\Delta f_k^j(\omega_T^k, \omega_F^k, \theta^r) = H_{F,j}^*(\omega_F^k, \theta^r) - H_{T,j}^*(\omega_T^k) - P_o^T \boldsymbol{\varepsilon}_j(\omega_T^k, \omega_F^k, \theta^r) \quad (20)$$

将式(18)代入式(10),得到

$$\left\{ \sum_{k=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{S}_k^{jH}(\omega_T^k, \omega_F^k, \theta^r) C_j^{-1} \mathbf{S}_k^j(\omega_T^k, \omega_F^k, \theta^r) \right\} \mathbf{d}^{r+1} = \sum_{k=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{S}_k^{jH}(\omega_T^k, \omega_F^k, \theta^r) C_j^{-1} \Delta f_k^j(\omega_T^k, \omega_F^k, \theta^r)$$

将其简写为

$$\mathbf{S}(\theta^r) \mathbf{d}^{r+1} = \Delta \mathbf{f}(\theta^r) \quad (21)$$

式(21)即为基于移频的极大似然估计方法的基本公式。与文献[17]推导的式(4)仅利用测试自由度的频响信息不同,式(21)中残余项利用了完备



自由度的测试频响,对结构的局部振动特性更为灵敏<sup>[19]</sup>。本研究方法还考虑了频响函数测试噪声的统计特性,改善了抗噪性。建立了系统的多输入多输出模型,考虑了多激励自由度下的各个测试自由度的测试频响与分析频响的残差,提高了参数识别的稳健性。文献[17]中方法是基于矩阵变换,本研究方法为基于极大似然估计的参数一阶灵敏度方法,且式(4)的系数矩阵 $S$ 相当于残差 $\Delta f$ 关于参数的精确灵敏度,而式(21)的系数矩阵为一阶灵敏度,Mansourabadi等<sup>[20]</sup>对2种灵敏度的区别进行了分析。

### 1.3 2种方法抗噪性对比

假设测试频响函数包含噪声,对于本研究方法,考虑其对式(21)扰动后有

$$S(\theta^r)d^{r+1} = \Delta f(\theta^r) + \delta\Delta f \quad (22)$$

根据矩阵扰动理论,相应解向量 $d$ 产生的相对扰动量为

$$\frac{\|\delta d\|}{\|d\|} \leq \kappa \frac{\|\delta\Delta f\|}{\|\Delta f\|} \quad (23)$$

其中: $\kappa$ 为系数矩阵 $S$ 的条件数。

由式(23)可知,测试误差使得解向量 $d$ 产生的相对扰动量与 $\kappa$ 及 $\delta\Delta f$ 正相关。分析以上各项, $\kappa$ 越大,修正参数增量产生相对扰动量越大。在系数矩阵列数较大的情况(即需修正的参数较多), $\kappa$ 明显增加。为减小 $\kappa$ ,一种简单且行之有效的方法是增加系数矩阵的行数。由式(21)可知,增加测试自由度、参与修正的测试频响的频率点数目可减小噪声扰动影响。

对于移频的基于矩阵变换的方法,测试噪声不仅对式(4)观测向量产生扰动,对式(4)中的系数矩阵也有扰动

$$(S(\theta^r) + \delta S)d^{r+1} = \Delta f(\theta^r) + \delta\Delta f \quad (24)$$

解向量 $d$ 的相对扰动量为

$$\frac{\|\delta d\|}{\|d\|} \leq \frac{\kappa}{\gamma} \left( \frac{\|\delta S\|}{\|S\|} \|d\| + \frac{\|\delta\Delta f\|}{\|\Delta f\|} + \frac{\kappa}{\gamma} \frac{\|\delta S\|}{\|S\|} \frac{\|\Delta f - Sd\|}{\|\Delta f\|} \right) \quad (25)$$

其中: $\gamma = 1 - \kappa \|\delta S\| / \|S\|$ 。

由式(25)可知,测试频响误差使得修正参数增量产生的相对扰动量与 $\kappa$ 、 $\Delta f$ 及 $S$ 的相对扰动量、 $\|\epsilon\|/\|\Delta f\|$ 成正相关; $\|\epsilon\|/\|\Delta f\|$ 由测试频响与分析频响的残差 $v_j(\omega_r^k)$ 决定。因此,若选取测试频响与分析

频响残差较小的频率点参与参数估计,可有效减小噪声的影响。

对比扰动公式,测试噪声对矩阵变换方法的系数矩阵与观测向量均产生扰动,而仅对本研究方法的观测向量产生扰动,因此本研究方法抗噪性更强。另一方面,矩阵变换方法的系数矩阵为频响残差的精确灵敏度,迭代步长较大;本研究方法的系数矩阵为一阶近似灵敏度,迭代步长较小。2种方法的差异造成了其适用场合的不同。当测试噪声较小且初始分析频响与测试频响残差较大时,使用矩阵变换方法能很快收敛。当测试噪声较大时,需要采用本研究方法,由于其抗噪性更强且小步长的特点,可避免噪声使得参数发散,若此时采用矩阵变换方法,由于其步长大,容易迭代至毫无意义的修正参数而使得后续迭代发散。因此,在实际应用中,应视具体情况选择。

### 1.4 算法实现相关问题

#### 1.4.1 总体最小二乘平差方法

最小二乘方法仅考虑观测值向量的误差,忽略系数矩阵中的误差。总体最小二乘考虑了当观测向量和系数矩阵中都含有误差,需要同时对二者进行平差的参数估计。总体最小二乘平差方法能够同时考虑观测向量和系数矩阵误差,使参数的估计更合理<sup>[21]</sup>。

取式(24)的观测向量及系数矩阵的误差向量组合

$$v = \begin{bmatrix} \text{vec}(\delta S) \\ \delta\Delta f \end{bmatrix}$$

其中:vec表示对矩阵向量化。

求解满足式(24)且使得观测向量及系数矩阵的误差向量的范数极小的参数,其数学描述为

$$\begin{aligned} \min_{\Delta\theta} v^T v \\ \text{s.t. } (S + \delta S)d - \Delta f + \delta\Delta f = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

根据式(26)构造拉格朗日函数,并对 $\delta\text{vec}(S)$ 、 $\delta\Delta f$ 、 $d$ 及罚因子求偏导,当取最小二乘解为参数初值时,迭代公式为

$$\begin{cases} \sigma^{(g)} = \frac{(1 + d^{(g-1)T} d^{(g-1)})}{\|\Delta f - Sd^{(g-1)}\|^2} \\ d^{(g)} = \sigma^{(g)} (I + \sigma^{(g)} S^T S)^{-1} S^T \Delta f \end{cases} \quad (27)$$

#### 1.4.2 频率点的筛选准则

在实际测试中,反共振区的频响易受到噪声污染,共振区不仅受噪声污染小,且对参数变化灵敏度更高,共振区的幅值能有效反映阻尼参数,利于阻尼

修正。因此,在较宽的频率范围内选择频响共振区的频率点,更容易得到稳健的参数识别结果<sup>[22]</sup>。实际选取参与计算的分析频段时,可通过选择模式指示函数(complex mode indication function,简称CMIF)的半功率带宽内的频率点,其原理如图2所示。

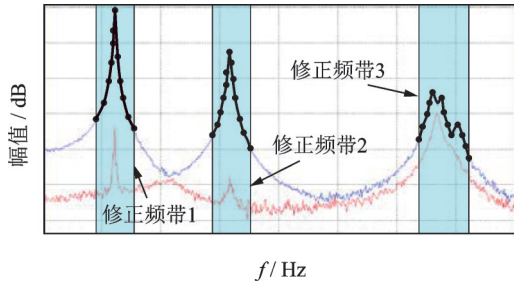


图2 基于CMIF曲线的带宽选择

Fig.2 FRFs' bandwidth selection based on CMIF curve

选取测试频响与分析频响残差较小的测试频率点参与参数估计,可有效减小噪声的扰动影响。由于2种修正方法均以测试频响与分析频响的残差为最小化目标函数,当残差较大时收敛缓慢甚至无法收敛,因此在进行频率点匹配前,还应以相同频率点处的频响函数幅值相关性系数作为准则,来筛选半功率带宽内参与模型修正的测试频率点

$$\alpha_a(\omega_k^t) = \text{Re} \left( \frac{2h_T(\omega_k^t)^H h_F(\omega_k^t)}{\|h_F(\omega_k^t)\|^2 + \|h_T(\omega_k^t)\|^2} \right) \geq \sigma_{\min} \quad (28)$$

其中: $\sigma_{\min}$ 为允许的幅值相关性最小值。

#### 1.4.3 频响扩充方法

基于移频的极大似然估计式(21)右端中的残余项 $\epsilon_j$ 需要进行频响扩充,但除了残余项外,其余各项均与扩充精度无关;而矩阵变换方法中灵敏度矩阵则受频响扩充精度的影响,因此本研究方法受测试频响扩充误差的影响更小。笔者提出一种基于频响模态展开式的频响扩充方法。频响函数模态展开式为

$$H_T(\omega) = \Phi(-\omega^2 I + \Lambda)^{-1} \Phi^T = \Phi_l(-\omega^2 I_l + \Lambda_l)^{-1} \Phi_l^T + \Phi_h(-\omega^2 I_h + \Lambda_h)^{-1} \Phi_h^T \quad (29)$$

其中: $\Phi$ 为系统的模态振型; $\Lambda$ 为系统特征值; $I$ 为单位矩阵,下标l与h代表系统的低阶模态与高阶模态。

将式(29)右乘 $e_j$ 并展开得到

$$H_{T,j}(\omega) \approx \sum_{i=1}^l \frac{\varphi_i \varphi_i^T e_j}{k_i - \omega^2 m_i + j\omega c_i} = \sum_{i=1}^l q_i \varphi_i \quad (30)$$

式(30)忽略了系统的高阶模态。由式(30)可知,任意一列频响可通过系统的模态振型叠加获得,

即测试频响可以用实际系统的完备低阶模态作为基底进行表示。由于实际系统的完备低阶模态无法得到,因此以有限元模型的完备低阶模态进行代替得到

$$\tilde{H}_{T,j}(\omega) = \sum_{i=1}^l q_i \varphi_{F,i} = \Phi_{F,l} q(\omega) \quad (31)$$

其中: $\tilde{H}_{T,j}(\omega)$ 为扩充后的完备测试频响函数; $\Phi_{F,l}$ 为有限元模型的完备低阶模态基; $q(\omega)$ 为各阶模态基的系数组成的向量。

式(31)左乘测试自由度筛选矩阵 $P_o$ 的转置得到

$$P_o^T \tilde{H}_{T,j}(\omega) = P_o^T \Phi_{F,l} q(\omega) \quad (32)$$

记为 $H_{T,j}^*(\omega) = \Phi_{F,l}^* q(\omega)$ 。

由式(31),(32)得到扩充后的测试频响为

$$\tilde{H}_j(\omega) = \Phi_{F,l} (\Phi_{F,l}^*)^+ H_j^*(\omega) \quad (33)$$

## 2 算例分析

### 2.1 仿真算例

采用某型号转向架构架缩比模型来验证本研究方法的有效性,并与基于矩阵变换的方法进行对比。图3为某型构架缩比模型有限元模型。将有限元模型划分为15个区域,每个区域的弹性模量、密度及阻尼系数作为待修正参数,共45个参数。分别在2种噪声水平下比较2种方法的修正能力。将待修正参数向量的某组数值作为真实参数值,计算其有限元模型频响函数作为仿真的测试值。对该组数值进行摄动,得到有限元模型修正前的初始参数,计算其频响函数得到初始分析值。

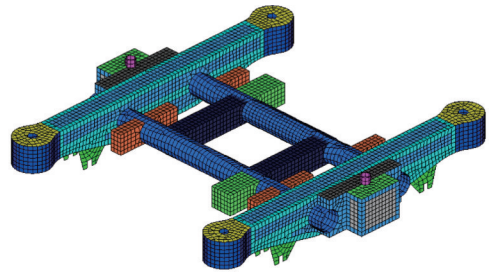


图3 某型构架缩比模型有限元模型

Fig.3 Finite element model of scaled-model for the Bogie structure

#### 2.1.1 10% 噪声水平

仿真测试频响函数添加10%的噪声,对比2种方法在小噪声情况下的修正精度。修正前初始分析频响函数与仿真测试值对比如图4所示,可见频响

函数残差初始值较大。

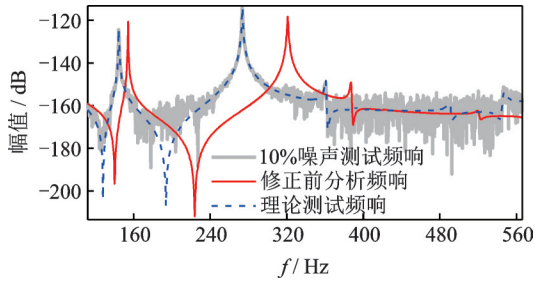


图4 修正前初始分析频响函数与仿真测试值对比

Fig.4 FRF of the initial analytical and experimental model

图5为2种方法修正后分析频响与测试频响的对比,图6为其频响幅值相关性的对比。本研究方法通过20个迭代步达到收敛,矩阵变换方法通过3个迭代步即达到收敛。由图5,6可知,2种方法修正后分析频响与测试频响相关性均有了很好的改善。可见,小噪声情况下,2种方法的修正精度相近,矩阵变换方法的收敛速度高于本研究方法,这是由于其迭代步长大于本研究方法。

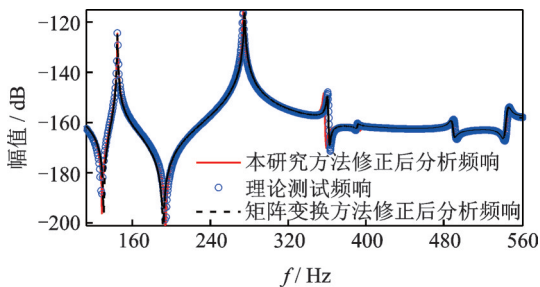


图5 修正后分析频响与测试频响对比

Fig.5 FRF of the updated analytical and experimental model

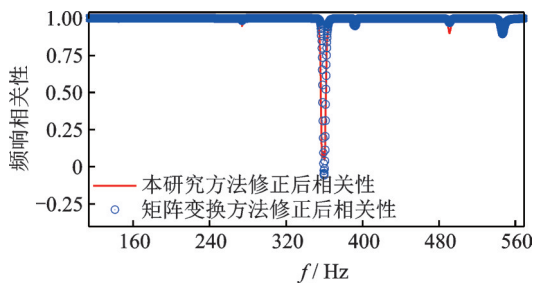


图6 2种方法修正后频响幅值相关性对比

Fig.6 Comparison of FRF magnitude correlation coefficient after updating by two methods

### 2.1.2 40% 噪声水平

在仿真测试频响函数中添加40%的噪声,以对比2种方法在大噪声情况下的修正效果。修正前初始分析频响与仿真测试频响对比如图7所示。本研究方法通过25个迭代步达到收敛,修正后分析频响

与测试频响的相关性得到了很好的改善。图8为2种方法修正后分析频响与测试频响的对比。图9为修正后分析频响与测试频响幅值相关性对比。如图8,9可知,采用矩阵变换方法经过迭代后高频段与真实值相差较大。在大噪声情况下本研究方法更容易达到较好的修正结果,其原因是矩阵变换方法中测试噪声对迭代方程的系数矩阵及观测向量均产生了较大扰动而不易收敛。

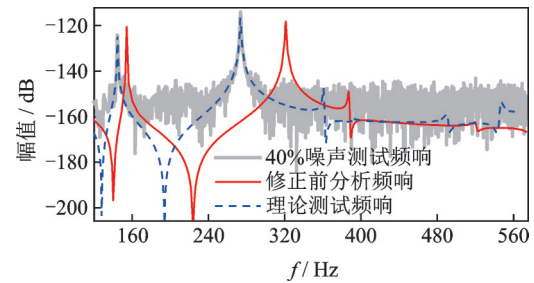


图7 修正前初始分析频响与仿真测试频响对比

Fig.7 FRF of the initial analytical and experimental model

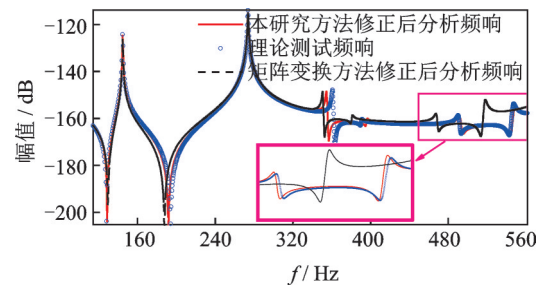


图8 修正后分析频响与测试频响对比

Fig.8 FRF of the updated analytical and experimental model

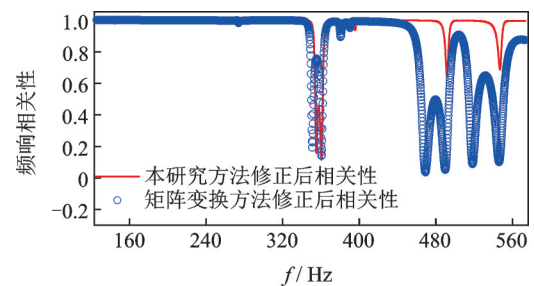


图9 2种方法修正后频响幅值相关性对比

Fig.9 Comparison of FRF magnitude correlation coefficient after updating by two methods

为了量化噪声对修正精度的影响,选取修正频段内各个相同频率点处的频响函数相关性平均值作为评价不同噪声条件下的修正精度。表1为不同噪声水平下2种方法的修正精度对比。数值愈趋近于1,代表修正精度愈高。显然,小噪声下2种方法的修正精度类似,大噪声下本研究方法的修正精度更高。



表 1 不同噪声水平下 2 种方法的修正精度对比

Tab.1 Comparison of updating accuracy at two noise levels

噪声水平	矩阵变换方法 修正精度	本研究方法 修正精度
10% 噪声	0.988 1	0.980 4
40% 噪声	0.811 5	0.971 2

## 2.2 试验

图 10 为飞机测试现场。以三角机翼飞机作为试验对象进行多参考点锤击试验,采用 N-Modal 模态参数识别软件识别试验结果。试验中选择频率分辨率为 800 谱线。从测试角度看,测点布置应清晰地反映出各阶振动形态,参考点布置需要考虑避开各阶振型的不动点。从模型修正角度看,布置尽可能完备的测点不仅能有效提高扩充精度,还能反映有限元模型与测试模型的振动形态差异,更利于修正。某些远离激励自由度的测点噪声较大,不应参

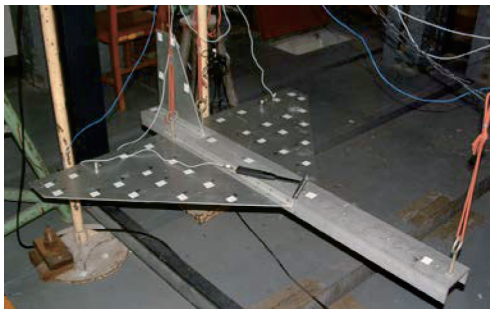


图 10 三角机翼飞机实验系统

Fig.10 Experimental system for the delta-winged aircraft

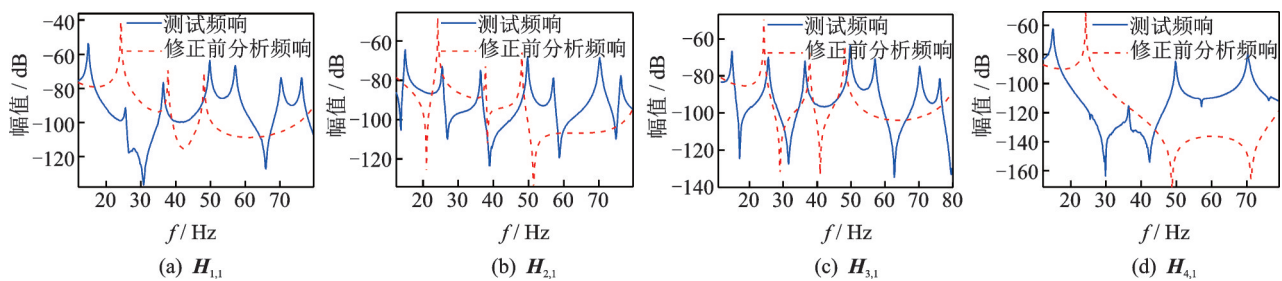


图 12 修正前初始分析频响与测试频响对比

Fig.12 FRF of the initial analytical and experimental model

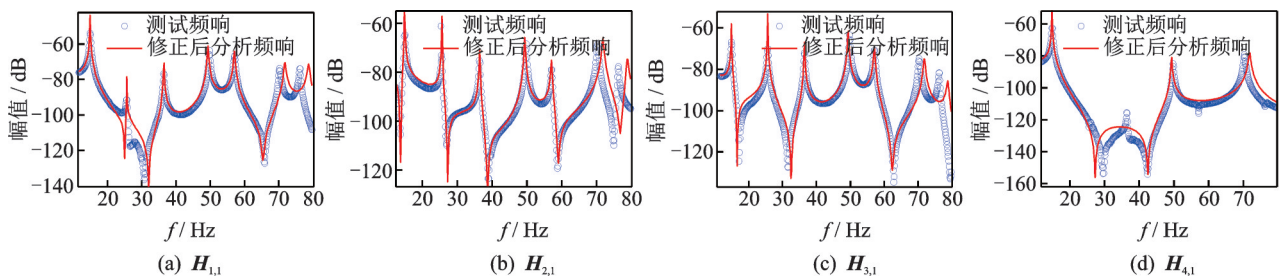


图 13 修正后分析频响与测试频响对比

Fig.13 FRF of the updated analytical and experimental model

与修正,否则将导致参数不易收敛。

图 11 为飞机有限元模型。将有限元模型划分为 5 个区域,每个区域的弹性模量、密度及阻尼系数作为待修正参数,共 15 个参数。设置初始待修正参数,计算得到初始分析频响,修正前初始分析频响与测试频响对比如图 12 所示。可见,初始分析频响与测试频响的相关性较差。三角机翼飞机本身的结构特征以及测试过程的干扰因素等造成测试频响含有部分噪声,尤其在反共振区的信噪比较低。飞机有限元模型连接处的螺栓连接、铆接等不确定性因素导致了初始模型的准确性较低。测试噪声的干扰、较大的初始频响残差以及众多的待修正参数均对修正算法提出了较大的挑战。

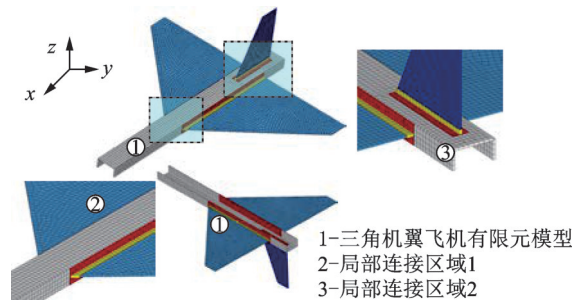


图 11 飞机有限元模型

Fig.11 Finite element model of the aircraft structure

图 13 为修正后分析频响与测试频响对比。图 14 为修正前后分析频响与测试频响幅值相关性对比。可见,采用本研究方法进行修正,通过若干迭代步后,修正后分析频响与测试频响的吻合较好,且其

幅值相关性有了明显提高,如图 14 所示。

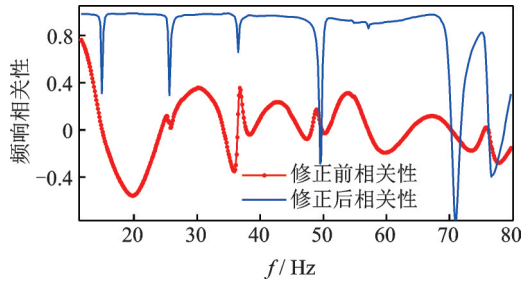


图 14 修正前后分析频响与测试频响幅值相关性对比

Fig.14 FRF magnitude correlation coefficient plot before and after updating

图 15 为修正前后频响函数形状相关性对比,修正后对角元素更趋近于 1。修正后各阶频率对比如表 2 所示。修正前后平均频率误差由 50.48% 降低至 0.98%, 计算其修正精度为 0.82。可见,本研究方法能有效解决复杂情况的模型修正问题。

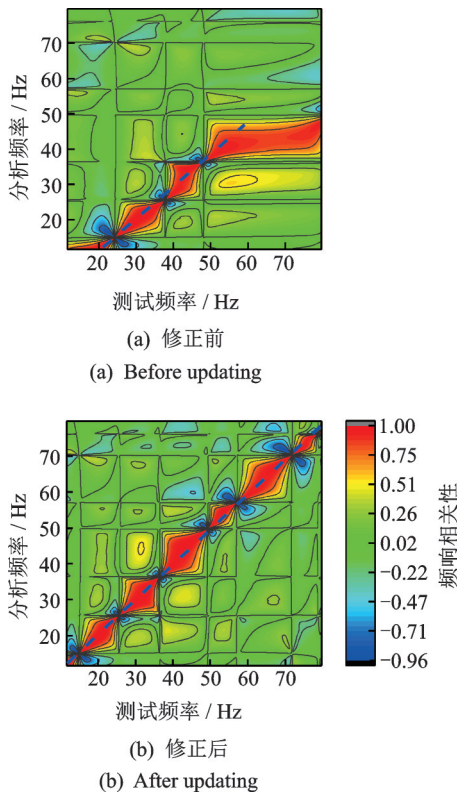


图 15 修正前后频响函数形状相关性对比

Fig.15 FRF shape correlation coefficient plot before and after updating

### 3 结论

1) 本研究方法相比于引入移频的矩阵变换方法有效改善了抗噪性。当初始分析频响与测试频响残差较大且测试噪声较小时,使用矩阵变换方法能

表 2 修正后各阶频率对比

Tab.2 Frequency comparison after updating

阶数	测试频率/Hz	修正前频率		修正后频率	
		数值/Hz	误差/%	数值/Hz	误差/%
第 1 阶	14.92	24.27	62.67	14.92	0.00
第 2 阶	25.56	37.80	47.89	25.62	0.23
第 3 阶	36.40	48.11	32.17	36.47	0.19
第 4 阶	49.74	82.35	65.56	49.35	0.78
第 5 阶	57.07	86.97	52.39	57.10	0.05
第 6 阶	70.26	94.97	35.17	71.81	2.21
第 7 阶	76.15	119.92	57.48	78.78	3.45

很快收敛。当初始分析频响与测试频响残差较大且测试噪声较大时,本研究方法的抗噪性更强,且由于其小步长的特点,可避免噪声扰动使待修正参数发散。

2) 通过转向架仿真模型验证了本研究方法在不同量级的噪声下均能得到较好的修正结果。

3) 三角机翼飞机模型修正中,本研究方法修正后的分析频响与测试频响的相关性有较大提高,这对实际结构在较复杂情况下的有限元模型修正具有一定的意义。

### 参 考 文 献

- [1] ESFANDIARI A, BAKHTIARI-NEJAD F, SANAYEI M, et al. Structural finite element model updating using transfer function data[J]. Computers and Structures, 2010(88): 54-64.
- [2] MODAK S V, KUNDRA T K, NAKRA B C. Comparative study of model updating methods using simulated experimental data[J]. Computers & Structures, 2002, 80(5/6): 437-447.
- [3] 展铭,郭勤涛,岳林,等.使用应变模式和遗传算法的有限元模型修正方法[J]. 振动、测试与诊断, 2018, 38(5): 98-102.  
ZHAN Ming, GUO Qintao, YUE Lin, et al. Finite element model updating using strain mode and genetic algorithm based method[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2018, 38(5): 98-102. (in Chinese)
- [4] 秦仙蓉,张令弥,顾明,等.改进的基于模态参数的结构计算模型修正算法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2002, 30(11): 1295-1299.  
QIN Xianrong, ZHANG Lingmi, GU Ming, et al. Im-



- proved modal parameter based on modal updating procedure [J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2002, 30(11): 1295-1299. (in Chinese)
- [5] 陈学前, 沈展鹏, 刘信恩. 考虑模型偏差的结构动力学模型修正[J]. *振动、测试与诊断*, 2018, 38(1): 61-65.  
CHEN Xueqian, SHEN Zhanpeng, LIU Xin'en. Updating of structural dynamics model with model bias [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2018, 38(1): 61-65. (in Chinese)
- [6] SESTIERI A, D'AMBROGIO W. Why be modal: how to avoid the use of modes in the modification of vibrating systems[J]. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 1989(4): 25-30.
- [7] BUSCA G, LIMONGELLI M P. An experimental evaluation of the reliability of a damage localization algorithm based on FRF interpolation [J]. *Journal of Civil Structural Health Monitoring*, 2015, 5 (4) : 427-439.
- [8] ASMA F, BOUAZZOUNI A. Finite element model updating using variable separation[J]. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 2007, 26(4): 728-735.
- [9] ESFANDIARI A. Structural model updating using incomplete transfer function of strain data[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2014, 333(16): 3657-3670.
- [10] LIN R M. Function-weighted frequency response function sensitivity method for analytical model updating [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, 403: 59-74.
- [11] GUO N, YANG Z, JIA Y, et al. Model updating using correlation analysis of strain frequency response function[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016(70/71): 284-299.
- [12] 张以帅. 基于频响函数的有限元模型修正方法及试验研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2009: 21-43.
- [13] IMREGUN M, VISSER W J, EWINS D J. Finite element model updating using frequency response function data: I. theory and initial investigation [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1995, 9(2): 187-202.
- [14] LIN R M, ZHU J. Finite element model updating using vibration test data under base excitation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 303(3/5): 596-613.
- [15] PASCUAL R, GOLINVAL J C, RAZETO M. A frequency domain correlation technique for model correlation and updating [J]. *Proceedings of Spie the International Society for Optical Engineering*, 1997(1): 587-592.
- [16] PASCUAL R, SCHÄLCHLI R, RAZETO M. Robust parameter identification using forced responses [J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2007, 21(2): 1008-1025.
- [17] GANG X, CHAI S, ALLEMANG R J, et al. A new iterative model updating method using incomplete frequency response function data [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(9): 2443-2453.
- [18] 王彤, 张令弥. 计及随机噪声的频域多输入多输出模态参数识别[J]. *航空学报*, 2004, 25(6): 560-564.  
WANG Tong, ZHANG Lingmi. Frequency domain multiple input/output modal parameters identification with consideration of stochastic noise [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2004, 25(6): 560-564. (in Chinese)
- [19] 张德文, 魏阜旋. 模型修正与破损诊断[M]. 北京: 科学技术出版社, 1999: 92-96.
- [20] MANSOURABADI A S, ESFANDIARI A. Structural model updating using sensitivity of wavelet transform coefficients of incomplete structural response [J]. *Journal of Civil Structural Health Monitoring*, 2019(9): 37-51.
- [21] 陆珏, 陈义, 郑波. 总体最小二乘方法在三维坐标转换中的应用[J]. *大地测量与地球动力学*, 2008, 28(5): 77-81.  
LU Jue, CHEN Yi, ZHENG Bo. Application of total least squares method in three-dimensional coordinate transformation [J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2008, 28(5): 77-81. (in Chinese)
- [22] PU Q H, HONG Y, CHEN L J, et al. Model updating-based damage detection of a concrete beam utilizing experimental damped frequency response functions [J]. *Advances in Structural Engineering*, 2019, 22(4): 935-947.



**第一作者简介:** 范新亮, 男, 1993年6月生, 硕士生。主要研究方向为动力学模型修正与确认。

E-mail: 1036838049@qq.com

**通信作者简介:** 王彤, 男, 1978年1月生, 博士、副教授。主要研究方向为振动测试、信号分析、模型修正等的研究、开发与应用。

E-mail: wt78@nuaa.edu.cn