

# 阻尼参数对摩擦系统稳定性及黏滑运动的影响\*

钱泓桦, 王东伟, 莫继良  
(西南交通大学摩擦学研究所 成都, 610031)

**摘要** 基于普遍的销-盘摩擦系统, 建立了一个同时考虑摩擦界面的法向与切向振动的非线性四自由度数学模型, 基于复特征值分析法和时域分析法研究了系统法向和切向阻尼值对系统稳定性的影响。对系统的雅各比矩阵的复特征值分析表明: 法向和切向阻尼值会对系统临界摩擦因数产生重要影响, 系统存在一个最优阻尼比使系统的稳定性达到最强。在选取合理阻尼比值的基础上, 若同时增大法向和切向的阻尼值有利于进一步提高系统的稳定性, 减少摩擦系统不稳定振动的倾向。通过数值模拟计算, 在进一步考虑黏滑现象的基础上, 对系统动力学行为进行时域分析。结果表明: 系统的振动行为会经历振幅增大的滑动阶段、振幅增大的黏滑运动阶段和纯黏滑阶段; 同时在低速状态下, 系统阻尼值会对振动极限环及黏着时长产生重要影响。

**关键词** 摩擦振动; 阻尼; 稳定性分析; 黏滑振动

**中图分类号** TH113.1; TH117.1

## 引言

摩擦引起的振动现象常见于各类具有摩擦副的机械系统中<sup>[1-3]</sup>, 其存在严重影响机械系统的运行可靠性, 造成界面严重磨损, 缩减设备使用寿命, 由此带来重大的经济损失<sup>[4]</sup>。因此, 寻找有效手段改善或消除机械系统摩擦振动现象具有重要的工程意义。

目前, 在机械系统中施加阻尼元件已成为改善系统摩擦振动现象的有效手段。以汽车制动系统为例, 在汽车制动片背板后黏结一层复合阻尼材料能避免高频振动模态的耦合, 从而改善制动尖叫噪声<sup>[5-7]</sup>。但是, 工程领域中对阻尼的施加往往采用“试凑法”, 即通过不断修改阻尼部件参数以期达到相对较优的系统减振性能, 这往往导致整个试验过程耗费大量的人力和财力。因此, 只有深入研究阻尼对系统界面摩擦振动行为的影响机理, 才能为阻尼在工程上的合理运用提供理论依据。学者们提出了许多数学模型用于研究阻尼与界面摩擦振动二者的关系<sup>[8-12]</sup>。Hoffmann 等<sup>[8]</sup>提出了弹簧-质量块-皮带的二自由度模型, 用于研究比例阻尼与非比例阻尼对摩擦振动的影响, 并提出阻尼影响摩擦振动的反馈机理。Shin 等<sup>[9]</sup>建立一个二自由度模型, 研究了阻尼对汽车制动过程中黏滑不稳定振动的影响, 结果表明只在滑动界面的一侧加阻尼会降低系统的稳定性。李小彭等<sup>[10-11]</sup>基于盘式制动系统, 建立了一个二自由

度数学模型, 讨论了阻尼等因素对系统动力学特性的影响。潘五九等<sup>[12]</sup>基于分形理论, 建立了考虑摩擦界面接触阻尼的摩擦振动模型, 分析了接触阻尼对系统不稳定性的影响。Wei 等<sup>[13]</sup>基于一种双层制动片结构的数学模型, 研究了其在切向上黏滑振动的稳定性、分岔和混沌行为。以上研究在模型中忽略了主动件法向和切向振动对摩擦系统动力学行为的影响。因此, 有必要建立一个同时考虑主动件和被动件二者相互耦合运动的数学模型, 在此基础上对阻尼和系统动力学行为之间的关系进行研究。

本研究基于现实中常见的销-盘摩擦系统, 建立了一个考虑质量块和皮带耦合运动的四自由度数学模型, 基于复特征值分析法系统地研究了质量块上法向、切向阻尼值及其比值对系统稳定性的影响, 得到系统稳定性达到最佳时的最优阻尼比。采用时域数值求解法, 研究了法向和切向阻尼对系统黏滑运动行为的影响, 描绘出系统在不同阻尼作用下的运动相图, 从而在时域上建立阻尼和系统动力学之间的内在联系。

## 1 四自由度非线性数学模型

### 1.1 四自由度数学模型

如图 1 所示, 本研究基于现实中常见的销-盘摩

\* 国家自然科学基金资助项目(51822508, 51675448)  
收稿日期: 2019-05-30; 修回日期: 2019-12-02

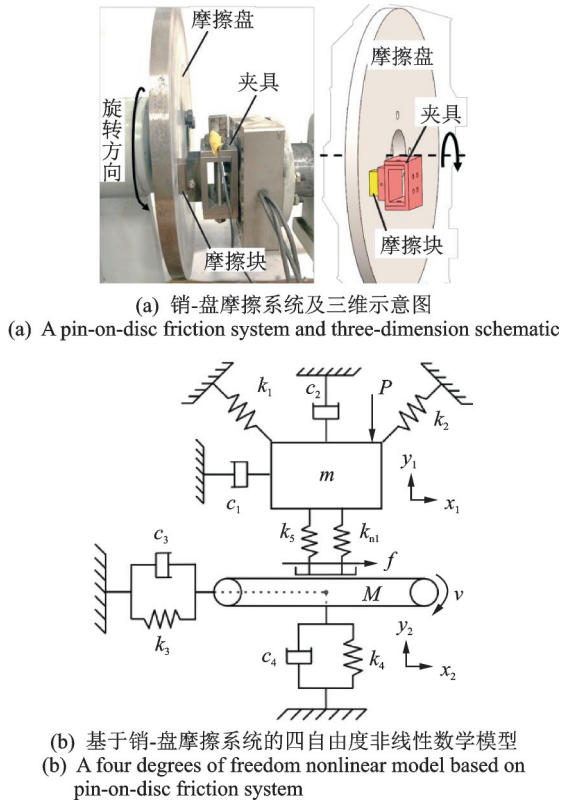


图1 销-盘摩擦系统及简化数值模型  
Fig.1 Pin-on-disc friction system and simplified numerical model

摩擦系统,建立了一个四自由度数学模型。质量为  $M_b$  的皮带以恒定速率  $v$  水平运行,质量为  $m$  的质量块在垂直向下的恒定载荷  $P$  的作用下与皮带建立接触。考虑到摩擦接触界面的微观形貌及其在传递运动载荷或受外部激励时的变形情况,在二者间引入了接触刚度  $k_5$ 。考虑到界面间的大量非线性行为,为不失一般性,同时引入了一非线性三次方接触刚度  $k_{nl}$ 。根据库伦摩擦模型,假设接触界面摩擦因数为  $\mu$ 。刚度分别为  $k_1$  和  $k_2$  的斜弹簧共同作用在质量块上,从而建立质量块在法向和切向上的相互耦合运动。阻尼值为  $c_1$  和  $c_2$  的阻尼分别作用在质量块的切向和法向上。皮带的切向和法向刚度为  $k_3$  和  $k_4$ ,其切向和法向阻尼值为  $c_3$  和  $c_4$ 。因此,质量块和皮带之间的接触压力  $F_N$  可以表示为

$$F_N = k_{nl}(y_1 - y_2)^3 + k_5(y_1 - y_2) \quad (1)$$

文中所选用的摩擦模型为恒定摩擦因数  $\mu$  的库伦摩擦模型。  $v_b \gg \dot{x}_1$  时,稳定滑动下由模态耦合引起的系统不稳定振动的界面摩擦力可表示为

$$f = -\mu [k_5(y_1 - y_2) + K_{nl}(y_1 - y_2)^3] \quad (2)$$

本研究设置的参考数值如下<sup>[13]</sup>:  $m=2 \text{ kg}$ ,  $M_b=10 \text{ kg}$ ,  $k_1=40 \text{ N/m}$ ,  $k_2=50 \text{ N/m}$ ,  $k_3=100 \text{ N/m}$ ,  $k_4=100 \text{ N/m}$ ;  $c_3=c_4=1 \text{ N/(m}\cdot\text{s}^{-1})$ 。假设  $k_2$  和水平方向

成  $45^\circ$ ,  $k_1$  和  $k_2$  之间成  $90^\circ$  夹角。

该系统动力学方程可以表示为

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX + K_{nl}(y_1 - y_2)^3 = F \quad (3)$$

其中:  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ;  $M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_b \end{bmatrix}$ ;

$F = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ;  $K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}$ ;  $K_{nl} =$

$\begin{bmatrix} \mu k_{nl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{nl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu k_{nl} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{nl} \end{bmatrix}$ ;  $C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}$ ;

$K_{11} = \frac{k_1 + k_2}{2}$ ;  $K_{12} = \frac{-k_1 + k_2}{2} + \mu k_5$ ;  $K_{14} = -\mu k_5$ ;  
 $K_{21} = \frac{-k_1 + k_2}{2}$ ;  $K_{22} = \frac{k_1 + k_2}{2} + k_5$ ;  $K_{24} = -k_5$ ;  
 $K_{32} = -\mu k_5$ ;  $K_{33} = k_3$ ;  $K_{34} = \mu k_5$ ;  $K_{42} = -k_5$ ;  $K_{44} = k_4 + k_5$ ;  
 $K_{13} = K_{23} = K_{31} = K_{41} = K_{43} = 0$ 。

### 1.2 系统的线性化

假设系统的平衡位置为  $X^*$ ,  $y_1^*$ ,  $y_2^*$  分别为  $y$  向上两质量块的平衡点,则有

$$KX^* + K_{nl}(y_1^* - y_2^*)^3 - F = 0 \quad (4)$$

针对此类非线性方程,求得解析解是十分困难的,故采用数值解法求得平衡点。平衡点位置随摩擦因数  $\mu$  变化结果如图2所示。可以看出,平衡点的位置会受到摩擦因数  $\mu$  的影响,因此在后续计算中,当系统摩擦因数发生变化时,需要对平衡点位置进行重新求解。

对式(3)在平衡点附近进行泰勒多项式展开以实现非线性系统的线性化,线性化后的 Jacobian 矩阵  $J$  为

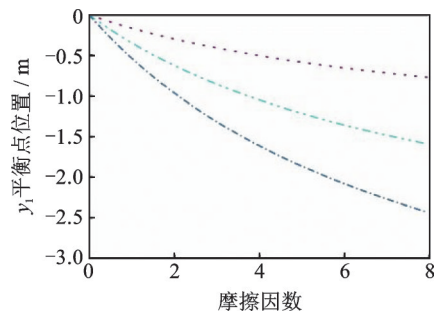


图2  $y_1$  平衡点随摩擦因数的变化关系  
Fig.2 Evolution of  $y_1$  equilibrium point's positions versus friction coefficient

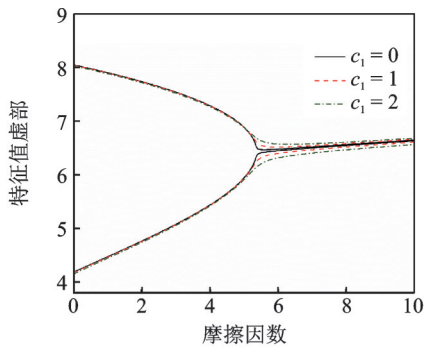
$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_{11}}{m} & -\frac{c_1}{m} & -\frac{K_{12} + 3\mu k_{nl}(y_1^* - y_2^*)^2}{m} & 0 & -\frac{K_{13}}{m} & 0 & -\frac{K_{14} + 3\mu k_{nl}(y_1^* - y_2^*)^2}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_{21}}{m} & 0 & -\frac{K_{22} + 3\mu k_{nl}(y_1^* - y_2^*)^2}{m} & -\frac{c_2}{m} & -\frac{K_{23}}{m} & 0 & -\frac{K_{24} + 3\mu k_{nl}(y_1^* - y_2^*)^2}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_{31}}{M} & 0 & -\frac{K_{32} + 3\mu k_{nl}(y_1^* - y_2^*)^2}{M} & 0 & -\frac{K_{33}}{M} & -\frac{c_3}{M} & -\frac{K_{34} + 3\mu k_{nl}(y_1^* - y_2^*)^2}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_{41}}{M} & 0 & -\frac{K_{42} + 3\mu k_{nl}(y_1^* - y_2^*)^2}{M} & 0 & -\frac{K_{43}}{M} & 0 & -\frac{K_{44} + 3\mu k_{nl}(y_1^* - y_2^*)^2}{M} & -\frac{c_4}{M} \end{bmatrix} \quad (5)$$

## 2 稳定性分析

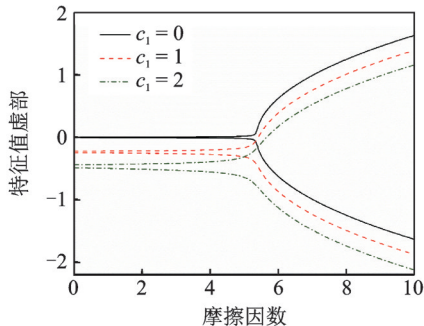
通过对 Jacobian 矩阵  $J$  的特征值进行求解, 可以得到系统存在复数形式的特征值  $\lambda$ , 当特征值实部出现正数时, 系统将随着时间增大产生持续的不稳定振动。令  $\epsilon$  为切向与法向阻尼值的比值, 即  $\epsilon = c_1/c_2$ 。图 3 所示为当  $\epsilon = 1$  时, 系统特征值实部和虚部随摩擦因数变化情况。可见, 随着摩擦因数逐渐增大, 系统发生模态耦合现象, 即两阶相邻的模态频率 (特征值虚部) 逐渐靠近并形成单一的频率, 相应的系统特征值出现了正实数, 这意味着摩擦系统产生

了不稳定振动。此外, 随着阻尼值逐渐增大, 系统产生不稳定振动的临界摩擦因数也随之变大, 即系统的稳定性增强; 当系统产生模态耦合现象后, 进一步增大摩擦因数会使系统的耦合频率增大。

图 4 为当法向阻尼  $c_2 = 1 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$  时, 改变切向阻尼  $c_1$ , 系统摩擦因数对其特征值的影响。可以看出, 当  $\epsilon \neq 1$  时, 系统仍然存在随着摩擦因数逐渐增大, 特征值虚部逐渐耦合以及摩擦因数越大耦合频率越高的现象。但是, 与图 3 不同的是切向阻尼  $c_1$  的增大并不能永远提高系统的稳定性。  $\epsilon = 2$  时, 出现实部为 0 时系统所对应的摩擦因数较  $\epsilon = 0.5$  和

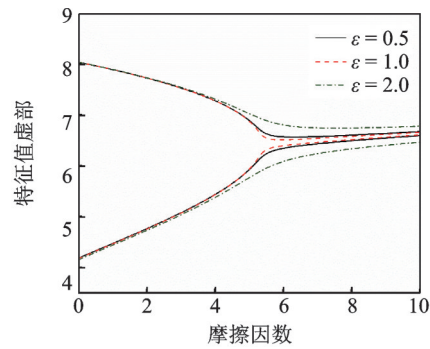


(a) 系统特征值虚部随摩擦因数的变化  
(a) Evolution of imaginary parts of eigenvalues versus friction coefficient

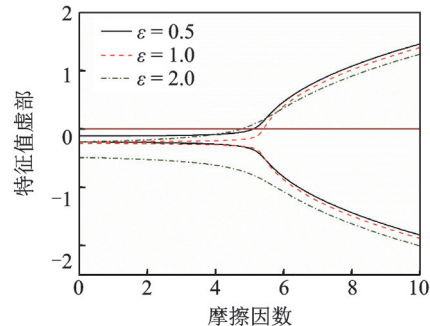


(b) 系统特征值实部与摩擦因数的关系  
(b) Evolution of real parts of eigenvalues versus friction coefficient

图 3 当  $\epsilon = 1$  时系统特征值与摩擦因数的关系  
Fig.3 Evolution of eigenvalues versus friction coefficient while  $\epsilon = 1$



(a) 系统特征值虚部随摩擦因数的变化  
(a) Evolution of imaginary parts of eigenvalues versus friction coefficient



(b) 系统特征值实部与摩擦因数的关系  
(b) Evolution of real parts of eigenvalues versus friction coefficient

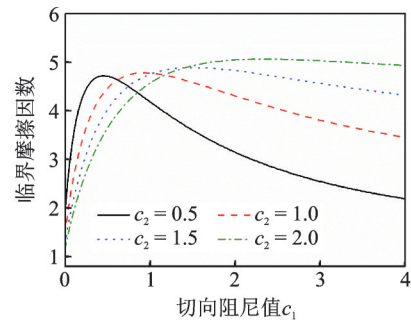
图 4  $\epsilon \neq 1$  时系统特征值与摩擦因数的关系  
Fig.4 Evolution of eigenvalues versus friction coefficient while  $\epsilon \neq 1$



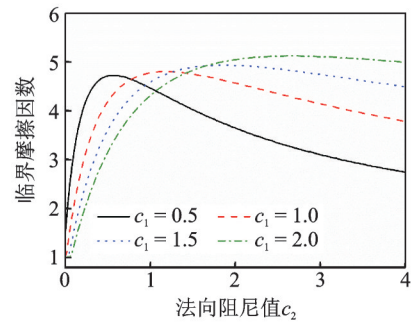
1时更小,这意味着,系统稳定性随着阻尼比 $\epsilon$ 的增加先上升后下降。因此,对于 $\epsilon \neq 1$ 的系统,可能会存在有一个最优的法向/切向阻尼比 $\epsilon_{\text{optimal}}$ ,此时系统的稳定性最好。

为了研究系统的最优阻尼比 $\epsilon_{\text{optimal}}$ 的存在性,通过分别改变切向阻尼值 $c_1$ 和法向阻尼值 $c_2$ 求解临界摩擦因数的方法获得的结果如图5所示。可以看出两者的结果类似,系统的临界摩擦因数随着法向、切向阻尼值的增加都有着先增大后减小的趋势,即最佳阻尼比 $\epsilon_{\text{optimal}}$ 是存在于系统中的,此时系统的稳定性最好。从图5(a)中可知,法向阻尼分别取 $0.5 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ ,  $1.0 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ ,  $1.5 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ 和 $2.0 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ 时, $\epsilon_{\text{optimal}}$ 的值分别为 $0.90, 0.95, 1.01$ 和 $1.18$ 。从图5(b)中可得,切向阻尼分别取 $0.5 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ ,  $1.0 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ ,  $1.5 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ 和 $2.0 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ 时, $\epsilon_{\text{optimal}}$ 的值分别为 $0.91, 0.85, 0.80$ 和 $0.75$ 。这表明了最优阻尼比会受到阻尼值大小的影响,法向阻尼的取值越大,最优阻尼比 $\epsilon_{\text{optimal}}$ 越大;切向阻尼的取值越大,最优阻尼比 $\epsilon_{\text{optimal}}$ 越小。

以上分别研究了法向和切向阻尼变化对系统稳定性的影响。同时变化切向与法向阻尼值对系统稳定性的影响如图6所示。由图可知,随着摩擦因数的增加,云图上不稳定区域的面积随之增加,即系统产生不稳定振动倾向加强。对于稳定区域较大的系统(图6(a)和图6(b)),其原点位置即处于稳定区域,这表明了系统存在稳定阻尼比区间 $\epsilon$ ,当系统的阻尼比值 $\epsilon \in \epsilon$ ,系统能永久处于稳定状态。此外,区间 $\epsilon$ 的区域随着系统摩擦因数的增大逐渐变小(图6(b)),且当摩擦因数等于 $5.5$ 时,稳定区间 $\epsilon$ 消失(图6(c)),



(a) 临界摩擦因数与切向阻尼 $c_1$ 的关系  
(a) Evolution of critical coefficient friction versus  $c_1$



(b) 临界摩擦因数与法向阻尼 $c_2$ 的关系  
(b) Evolution of critical coefficient friction versus  $c_2$

图5 临界摩擦因数与法、切向阻尼的关系

Fig.5 Evolution of critical friction coefficient versus normal and tangential damping

但切向与法向上存在有一临界阻尼值 $C_{t0}$ 和 $C_{n0}$ ,这意味着任一方向上的阻尼低于该临界值时,系统都将处于不稳定状态。综合图6可知,单纯的增加切向或者法向的阻尼值并不一定会使系统的稳定性增加,反而有可能会使系统的稳定性下降。因此,合理的选择法向/切向阻尼比值能极大地改善系统的稳定。

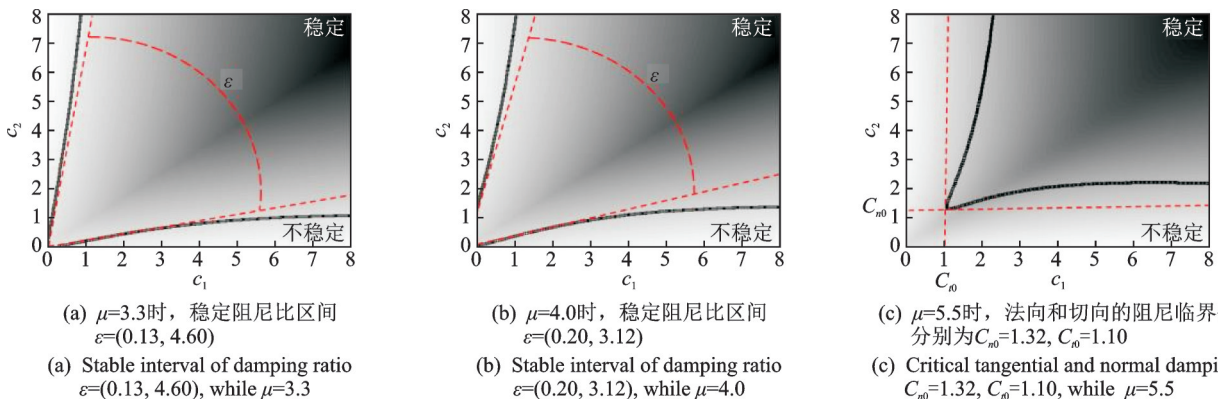


图6 切向和法向阻尼值对系统特征值实部的影响

Fig.6 The effect of tangential and normal damping on the real parts of eigenvalues

### 3 阻尼值对系统时域特征的影响

#### 3.1 黏滑运动行为分析

由于摩擦振动的发生通常伴随界面的黏滑运动

现象,目前关于黏滑运动的数值模拟研究主要集中在单自由度的滑块-皮带模型上,关于耦合皮带和质量块运动对系统摩擦黏滑运动的影响研究鲜见报道。因此,本节基于以上模型考虑了在低带速时产

生的黏滑现象,并在时域上进行数值模拟,以探究法和切向阻尼值对摩擦振动系统特性的影响。

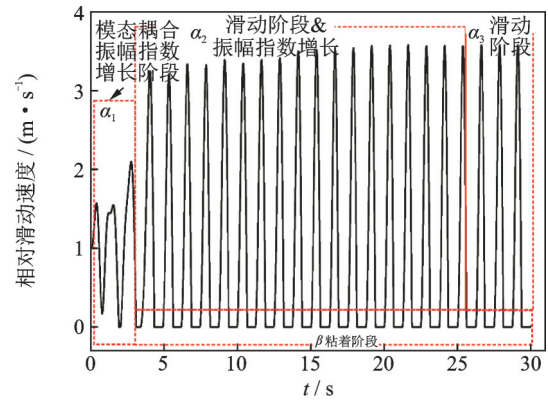
当皮带与质量块发生黏着振动时,在静摩擦力作用下,系统应满足皮带与质量块的加速度相同,因此在较低皮带转速下,摩擦力公式可表示为

$$f = \begin{cases} -\mu [K_5(y_1 - y_2) + K_{nl}(y_1 - y_2)^3] & (v_r \neq 0) \\ \frac{m(k_3x_2 + c_3\dot{x}_2) - M\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x_1 + c_1\dot{x}_1 + \frac{-k_1 + k_2}{2}y_1\right)}{(M + m)} & (v_r = 0, f < \mu F_N) \end{cases} \quad (5)$$

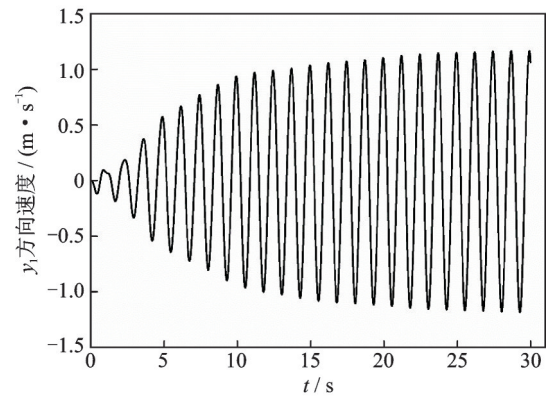
其中:  $v_r = v_b + \dot{y}_2 - \dot{y}_1$ ;  $v_b$  为恒定的皮带的转速。

基于图 6(c) 选择一组不稳定状态下的系统参数:  $c_1 = c_2 = 1 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ , 摩擦因数  $\mu = 5$ , 皮带转速  $v_b = 1 \text{ m/s}$ 。其余参数与前文一致。图 7 所示为系统在  $x$  和  $y_1$  方向上速度信号曲线。可见, 系统出现了 3 个典型的运动阶段。运动初期, 质量块在  $x_1$  和  $y_1$  方向上的速度信号曲线在起始阶段均表现为典型的指数增长形式( $\alpha_1$  阶段)。随着时间推移,  $x$  方向上的相对滑动速度不再呈指数形式增长, 最小相对滑动速度保持在  $0 \text{ m/s}$  (黏着状态), 最大相对滑动速度呈现小幅上升趋势, 在此阶段,  $y_1$  方向上的速度幅值依然逐渐增大( $\alpha_2$  阶段)。随着运动继续进行, 质量块在  $x$  和  $y$  方向上的振动信号趋于稳定, 幅值不再出现明显的变化( $\alpha_3$  阶段)。

对系统在 3 个阶段( $\alpha_1 \sim \alpha_3$ ) 的不同方向上的振动信号相图进行分析, 如图 8 所示。在  $\alpha_1$  阶段, 此时  $x_1$  和  $y_1$  方向上的相图均表现为一条向外发散的螺旋线, 直到第 1 次出现黏着现象(图 8(a) 和图 8(d))。在  $\alpha_2$  阶段, 此时由于皮带的振动速度,  $x_1$  方向上的相图上的黏着部分为非直线, 且极限环幅值持续增大, 而  $y_1$  方向上的极限环仍为一条向外发散的螺旋线(图 8(b) 和图 8(e))。当系统运动到  $\alpha_3$  阶段时, 系统相图不再发生明显的变化, 对应于时域上的速度信



(a) x 方向相对滑动速度信号  
(a) Relative velocity signal of x direction



(b)  $y_1$  方向速度信号  
(b) Velocity signal of  $y_1$  direction

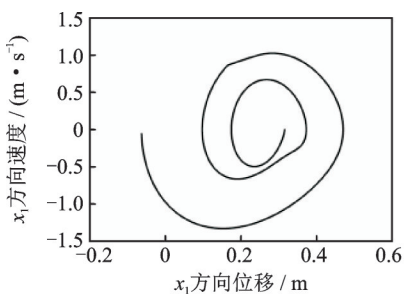
图 7  $c_1 = c_2 = 1 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$  时系统的速度信号图

Fig.7 Time response of speed while  $c_1 = c_2 = 1 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$

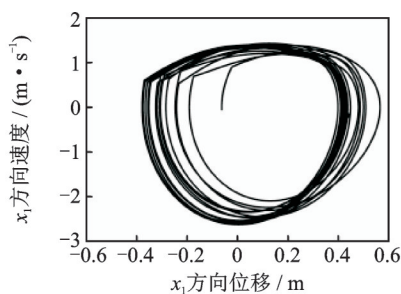
号幅值也不发生明显变化(图 8(c) 和图 8(f))。

### 3.2 阻尼影响分析

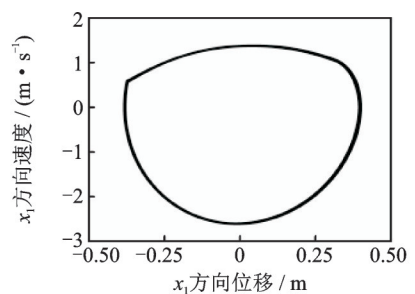
图 9 所示为分别改变法向和切向阻尼值后  $x_1$  和  $y_1$  方向上的相图轨迹, 相图数据源于模拟时间 48~50 s, 此时系统都处于图 7 的  $\alpha_3$  阶段, 即振幅不再出现明显增长。由图可知,  $x_1$  方向上极限环的位置随法向和切向阻尼值的改变有较大的变化, 这表明  $c_1$  和  $c_2$  都会显著地影响  $x_1$  方向上平衡点的位置。切向上阻尼值  $c_1$  的改变对  $x_1$  与  $y_1$  方向上的极限环幅值影响较小, 随着切向阻尼值的增大, 极限环幅值也随之



(a)  $x_1$  方向  $\alpha_1$  阶段相图  
(a) Phase portrait of  $x_1$  direction at  $\alpha_1$  stage



(b)  $x_1$  方向  $\alpha_2$  阶段相图  
(b) Phase portrait of  $x_1$  direction at  $\alpha_2$  stage



(c)  $x_1$  方向  $\alpha_3$  阶段相图  
(c) Phase portrait of  $x_1$  direction at  $\alpha_3$  stage

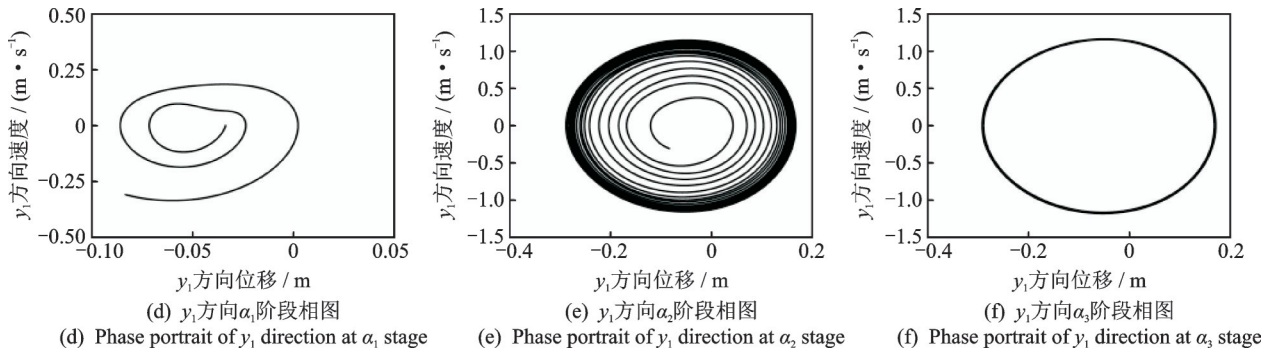


图 8  $c_1=c_2=1 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ 时系统的相图

Fig.8 System's phase portrait while  $c_1=c_2=1 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$

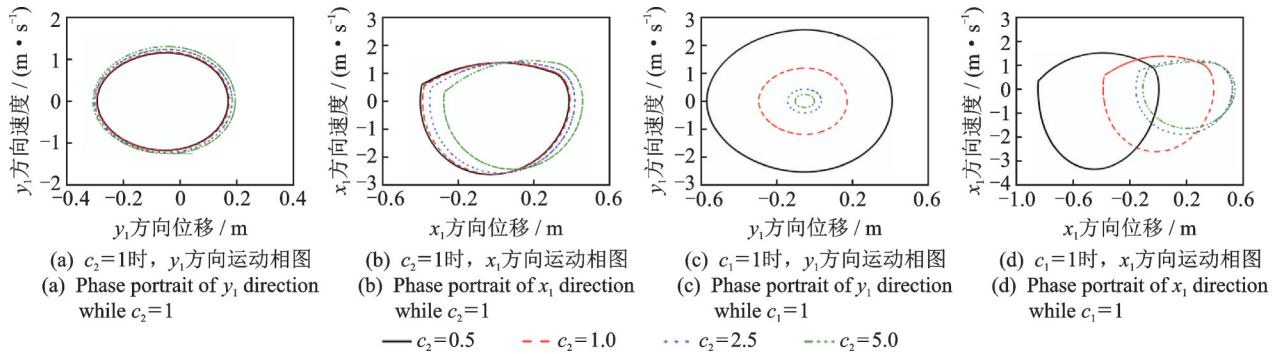


图 9 阻尼取值对极限环的影响

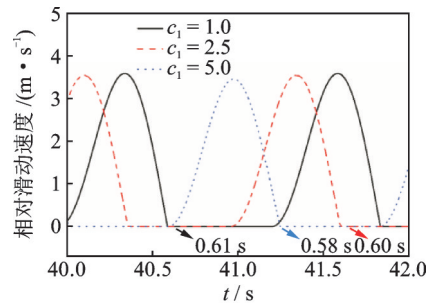
Fig.9 The limit cycles at different damping values

减小。相较于  $c_1$ , 法向上阻尼值  $c_2$  的增加会使  $y_1$  和  $x_1$  方向上的极限环幅值显著减小。由图 9(d) 可知, 阻尼值对极限环中黏着轨迹的长度具有重要影响, 而黏着时间的增加能说明系统的黏滑振动现象更加明显<sup>[14]</sup>, 因此本部分对阻尼值和黏着时长之间的关系进行研究。图 10 所示为分别改变法向和切向阻尼值对切向相对速度  $v_r$  的影响。相对速度为 0 表示摩擦系统处于黏着状态。由图 10(a) 可知, 当切向阻尼  $c_1$  的取值分别为 1.0, 2.5 和 5.0  $\text{N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$  时, 系统对应的黏着时长  $t_{\text{stick}}$  分别为 0.61, 0.60 和 0.58 s, 即切向阻尼  $c_1$  对黏着时长的影响微弱。

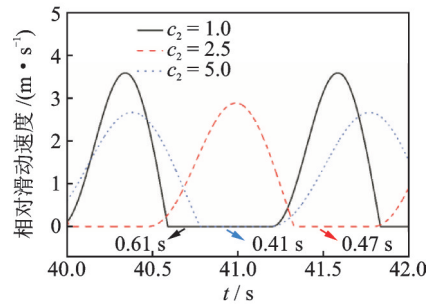
图 10(b) 中, 当法向阻尼  $c_2$  的取值分别为 1.0, 2.5 和 5.0  $\text{N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$  时, 系统对应的黏着时长  $t_{\text{stick}}$  分别为 0.61, 0.47, 和 0.41 s, 这表明法向阻尼值的改变会对黏滑运动有重要影响, 并且黏着时间随着  $c_2$  值的增加呈现出下降的趋势。结合图 9 的结论可知, 较短的黏着时长所对应的黏滑运动极限环幅值也相对较小, 即相较于切向阻尼值, 增加法向阻尼能更有效地改善摩擦系统的黏滑运动。

### 4 结 论

1) 阻尼值增大使得系统产生不稳定振动的临



(a)  $c_2=1.0 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$



(b)  $c_1=1.0 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$

图 10 不同阻尼值下  $x$  方向上相对速度与时间的关系

Fig.10 Evolution of relative speed in  $x$  direction versus time

界摩擦因数也逐渐变大, 系统的稳定性增强。同时, 系统存在一个最优阻尼比值, 使系统的稳定性最强, 该值会受到法向和切向阻尼值的影响。

2) 当摩擦因数较小时, 系统存在一个最优阻尼



比区间,当法向与切向阻尼比值在此范围时,系统始终保持稳定。当摩擦因数增大到一定程度,系统在法向和切向上均存在一定的临界阻尼值,任一方向上的阻尼低于该值时,系统都将处于不稳定状态。因此,在合理阻尼比取值的基础上同时提高法、切向阻尼值是提高摩擦系统稳定性的有效手段。

3) 在考虑黏着-滑动现象时,系统的振动行为会经历振幅增大的滑动阶段、振幅增大的黏滑运动阶段和纯黏滑阶段;同时系统法向、切向阻尼值分别会对切向和法向的振动极限环幅值有重要影响。此外,相较于切向阻尼,法向阻尼对摩擦系统的黏滑运动影响更大,即增加法向阻尼值更能有效地减少黏着时长,缩小振动极限环,对黏滑运动起到抑制效果。

### 参 考 文 献

- [1] 张立军,刁坤,孟德建,等.摩擦引起的振动和噪声的研究现状与展望[J].同济大学学报(自然科学版),2013,41(5):765-772.  
ZHANG Lijun, DIAO Kun, MENG Dejian, et al. Friction-induced vibration and noise research: the status quo and its prospect[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2013, 41(5):765-772. (in Chinese)
- [2] 刘更,南咪咪,刘岚,等.摩擦对齿轮振动噪声影响的研究进展[J].振动与冲击,2018(4):36-41.  
LIU Geng, NAN Mimi, LIU Lan, et al. A review on tribodynamics and friction noise of gears[J]. Journal of Vibration and Shock, 2018(4):36-41. (in Chinese)
- [3] 丁千,翟红梅.机械系统摩擦动力学研究进展[J].力学进展,2013,43(1):112-131.  
DING Qian, ZHAI Hongmei. The advance in researches of friction dynamics in mechanics system[J]. Advances in Mechanics, 2013,43(1):112-131. (in Chinese)
- [4] 周仲荣,雷源忠,张嗣伟.摩擦学发展前沿[M].北京:科学出版社,2006:1-48.
- [5] WANG D W, MO J L, ZHANG Q, et al. The effect of the grooved elastic damping component in reducing friction-induced vibration [J]. Tribology International, 2017, 110: 264-277.
- [6] TIEDEMANN M, KRUSE S, HOFFMANN N. Dominant damping effects in friction brake noise, vibration and harshness: the relevance of joints [J]. Journal of Automobile Engineering, 2014, 229: 728-734.
- [7] WANG D W, MO J L, OUYANG H J, et al. Improving dynamic and tribological behaviours by means of a Mn-Cu damping alloy with grooved surface features[J]. Tribology Letters, 2018, 66(2):67-82.
- [8] HOFFMANN N, GAUL L. Effects of damping on mode-coupling instability in friction induced oscillations [J]. Zamm-Journal of Applied Mathematics & Mechanics, 2003, 83(8):524-534.
- [9] SHIN K, BRENNAN M J, JE O H, et al. Analysis of disc brake noise using a two-degree-of-freedom model [J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 254(5):837-848.
- [10] 李小彭,李加胜,李木岩,等.盘式制动系统参数对制动颤振的影响分析[J].振动、测试与诊断,2017,37(1):102-107.  
LI Xiaopeng, LI Jiasheng, LI Muyan, et al. Analysis of the effect of disc brake system parameters on brake chatter[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2017, 37(1):102-107. (in Chinese)
- [11] 李小彭,岳冰,王丹,等.制动参数对制动系统稳定性的影响[J].振动、测试与诊断,2016,36(1):73-79.  
LI Xiaopeng, YUE Bing, WANG Dan, et al. Influence of braking parameters on the stability of braking system [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2016, 36(1):73-79. (in Chinese)
- [12] 潘五九,李小彭,王雪,等.结合面接触阻尼对模态耦合系统不稳定性影响[J].振动与冲击,2017(17):16-20.  
PAN Wujiu, LI Xiaopeng, WANG Xue, et al. Effects of contact damping of joint surfaces on instability of a mode-coupled system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2017(17):16-20. (in Chinese)
- [13] WEI D G, SONG J W, NAN Y H, et al. Analysis of the stick-slip vibration of a new brake pad with double-layer structure in automobile brake system [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 118: 305-316.
- [14] LI Z L, OUYANG H J, GUAN Z Q. Nonlinear friction-induced vibration of a slider-belt system [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2016, 138(4):1-9.
- [15] WEI D G, RUAN J Y, ZHU W W, et al. Properties of stability, bifurcation, and chaos of the tangential motion disk brake [J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 375: 353-365.



**第一作者简介:**钱泓桦,男,1996年7月生,硕士生。主要研究方向为摩擦振动。  
E-mail:hhq960712@my.swjtu.edu.cn

**通信作者简介:**莫继良,男,1982年1月生,博士、研究员。主要研究方向为摩擦学及动力学。  
E-mail:jlmo@swjtu.cn