

惯容准零刚度隔振器动态特性研究*

王勇^{1,2}, 李昊轩¹, 程春³, 丁虎², 陈立群²

(1. 江苏大学汽车工程研究院 镇江, 212013) (2. 上海大学力学与工程科学学院 上海, 200444)

(3. 江苏师范大学机电工程学院 徐州, 221116)

摘要 将惯容器运用于准零刚度(quasi-zero stiffness, 简称 QZS)隔振器中, 根据惯容器、弹簧与阻尼器的布置形式, 提出并联式与串联式惯容准零刚度隔振器。研究两种惯容准零刚度隔振器在简谐力激励下的动态特性, 运用谐波平衡法求解系统的动态响应, 揭示两个主要的结构参数(惯质比与刚度比)对系统动态特性的影响规律, 定义动态位移峰值、力传递率峰值、隔振频带以及高频带的力传递率 4 个性能评价指标来评价系统的隔振性能。研究表明, 相较准零刚度隔振器, 并联式惯容准零刚度隔振器的力传递率峰值较小, 隔振频带较宽, 但动态位移峰值与高频带的力传递率较大; 串联式惯容准零刚度隔振器能拓宽准零刚度隔振器的隔振频带, 高频带的力传递率都趋于零, 但动态位移峰值与力传递率峰值较大。研究内容为将惯容器运用于准零刚度低频隔振领域具有理论指导意义。

关键词 惯容器; 准零刚度; 隔振器; 动态特性; 隔振性能

中图分类号 TB535; O322

引言

准零刚度隔振器由于具有高静刚度低动刚度特性, 能克服传统线性隔振器存在的降低固有频率与提高承载力的矛盾, 因而受到广泛关注^[1-2]。准零刚度隔振器一般由正刚度弹性元件和负刚度机构组成, 其中正刚度弹性元件用于承受主要载荷, 负刚度机构用于抵消正刚度弹性元件的刚度, 使系统在静态平衡位置处的刚度趋于零。正刚度弹性元件一般为垂直弹簧, 而负刚度机构有多种形式, 如斜置或水平弹簧^[3-4]、电磁弹簧^[5]、屈曲梁^[6]、滚球装置^[7-8]、双稳定层合板^[9]、菱形机构^[10]及 X 形机构^[11]等。高静刚度特性使准零刚度隔振器的承载能力提高, 静态位移减小; 低动刚度特性使准零刚度隔振器的固有频率降低, 获得比线性隔振器更宽的隔振频带。

惯容器^[12]是一种具有两个独立自由端点的装置, 作用于两端的力与两端的相对加速度成正比, 该比值称为“惯质系数”(单位为 kg)。作为一种新型的机械装置, 惯容器也广泛运用于隔振领域。Hu 等^[13]分析了 5 种惯容隔振器的动态特性, 运用 H_∞ 和 H_2 优化方法优化了系统的结构参数, 与线性隔振器相比, 惯容隔振器的传递率峰值较小。Wang 等^[14]研究了 8 种惯容隔振器的动态特性, 定义了 4 个

性能评价指标来综合评价惯容隔振器的隔振性能, 相较线性隔振器, 惯容隔振器可以有更好的隔振性能, 在此基础上进一步提出加速度-速度切换控制策略来改善惯容隔振器的隔振性能^[15]。王勇等^[16]将惯容器斜置, 设计了一种具有几何非线性的斜置式惯容隔振器, 研究表明当激励力幅值较小时, 与线性隔振器相比, 斜置式惯容隔振器的力传递率峰值较小, 隔振频带较宽, 而动态位移峰值较大。

目前, 关于惯容隔振器的研究主要是将惯容器运用于线性隔振器, 分析惯容线性隔振器的动态性能。笔者将惯容器运用于准零刚度隔振器, 分析其是否可进一步改善准零刚度隔振器的隔振性能。根据惯容器、弹簧与阻尼器的布置形式, 提出并联式与串联式两种惯容准零刚度隔振器。研究两种惯容准零刚度隔振器在简谐力激励下的动态特性, 运用谐波平衡法求解系统的动态响应, 揭示两个主要的结构参数(惯质比与刚度比)对系统动态特性的影响规律, 定义动态位移峰值、力传递率峰值、隔振频带以及高频带的力传递率 4 个性能评价指标^[14]来评价系统的隔振性能, 并与准零刚度隔振器进行对比分析。

动态位移峰值定义为隔振物体在振动过程中的最大动位移; 力传递率定义为经隔振器传递到基础

* 国家自然科学基金资助项目(12172153, 51805216); 中国博士后科学基金资助项目(2019M651464); 机械结构力学及控制国家重点实验室开放基金资助项目(MCMS-E-0220Y01)

收稿日期: 2019-08-21; 修回日期: 2019-11-09

的力幅值与激励力幅值之间的比值,力传递率峰值决定了传递到基础的最大的力幅值;隔振频带定义为隔振器起作用的频带范围,表明在此频带内,力传递率小于1,隔振器有隔振效果;高频带的力传递率定义为激励频率远大于系统固有频率时的力传递率,反映了隔振器在高频带的隔振性能。对于隔振器,需要减小隔振物体自身的振动,同时减小传递到基础的力,因此在实际工程中动态位移峰值与力传递率峰值不应太大。为了增加隔振器起作用的工作范围,应具有较宽的隔振频带;若要进一步改善高频带的隔振性能,应具有较小的高频带的力传递率。

1 并联式惯容准零刚度隔振器

惯容准零刚度隔振器由惯容器与准零刚度隔振器组成,笔者研究的准零刚度隔振器如图1所示。垂直弹簧两端分别与支撑板和基础板固定,起承载作用,负刚度机构采用菱形机构^[10],由2个铰链轴、4个支架、8个连杆以及1个水平弹簧组成。连杆由内外连杆构成,支架由上下支架组成。连杆一端套在铰链轴上,另一端通过铰接的方式与支架连接。水平弹簧的两端套在铰链轴上。上、下支架分别与支撑板和基础板固定。当准零刚度隔振器承受静态载荷,处于静态平衡位置时,所有的连杆处于同一水平面。

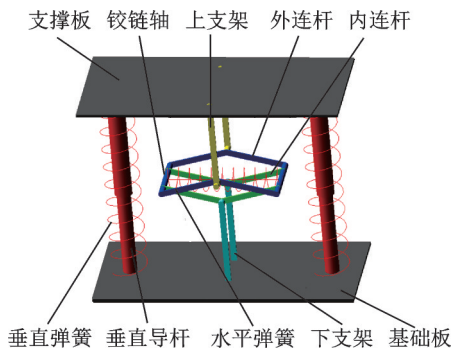


图1 准零刚度隔振器
Fig.1 QZS vibration isolator

并联式惯容准零刚度隔振器见图2,其中惯容器、垂直弹簧与阻尼器处于并联状态,外界激励为简谐力激励。负刚度机构中的水平弹簧通过连杆与支架将力传递给支撑板和基础板,其力传递路径见图3。系统结构参数以及外界激励参数定义见表1。

内外连杆与水平面的夹角 α 等于 $\arctan(x/\sqrt{4l^2-x^2})$,水平弹簧力 f_{bh} 等于

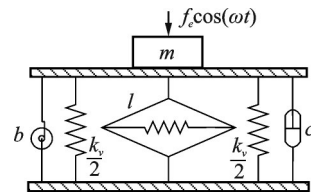


图2 并联式惯容准零刚度隔振器
Fig.2 Parallel-connected inerter-based QZS vibration isolator

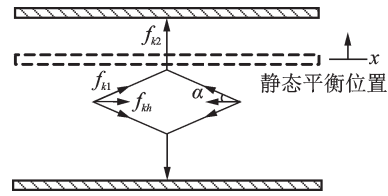


图3 水平弹簧力传递路径示意图
Fig.3 Schematic of the horizontal spring force transmission path

表1 参数定义
Tab.1 Parameter definition

符号	定义	单位
m	隔振器承载质量	kg
k_v	两个垂直弹簧的总刚度	N/m
k_h	水平弹簧刚度	N/m
l_0	水平弹簧初始长度	m
l	内外连杆长度	m
b	惯容器惯质系数	kg
c	阻尼器阻尼系数	(N·s)/m
f_e	简谐力激励幅值	N
ω	简谐力激励频率	rad/s
t	激励时间	s
x	承载质量从静态平衡位置时的位移	m
α	内外连杆与水平面的夹角	°
f_{bh}	水平弹簧力	N
f_{k2}	水平弹簧产生的垂直弹性力	N

$k_h(2l \cos\alpha - l_0)$,由水平弹簧产生的垂直弹性力 f_{k2} 为

$$f_{k2} = f_{bh} \tan\alpha = k_h x \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{4l^2 - x^2}} \right) \quad (1)$$

采用菱形结构的准零刚度隔振器的力-位移与刚度-位移特性为

$$\begin{cases} f = k_v x + k_h x \left(\frac{l_0}{\sqrt{4l^2 - x^2}} - 1 \right) \\ k = k_v + k_h \left(\frac{4l_0 l^2}{(4l^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} - 1 \right) \end{cases} \quad (2)$$

将式(2)无量纲化,可得

$$\begin{cases} F = X + \beta X \left(\frac{\eta}{\sqrt{4 - X^2}} - 1 \right) \\ K = 1 + \beta \left(\frac{4\eta}{(4 - X^2)^{\frac{3}{2}}} - 1 \right) \end{cases} \quad (3)$$

其中: $X = x/l$; $\beta = k_h/k_v$; $\eta = l_0/l$; $F = f/(k_v l)$; $K = k/k_v$ 。

若准零刚度隔振器在静态平衡位置处的刚度为零,则可得到准零刚度特性。此时刚度比 β 与长度比 η 满足以下关系

$$\eta_{QZS} = 2(\beta - 1)/\beta \quad (4)$$

该准零刚度隔振器的静力学分析见文献[10]。当系统位移量 X 较小时,可将无量纲力 F 在 $X=0$ 处进行泰勒级数展开以近似处理,可得

$$F \cong \gamma_1 X + \gamma_3 X^3 + \gamma_5 X^5 \quad (5)$$

其中: $\gamma_1 = 1 + \beta \left(\frac{\eta}{2} - 1 \right)$; $\gamma_3 = \frac{\beta\eta}{16}$; $\gamma_5 = \frac{3\beta\eta}{256}$ 。

当系统获得准零刚度特性时, $\gamma_1 = 0$, 此时式(5)仅包含3次与5次位移项。

并联式惯容准零刚度隔振器在简谐力激励下的动力学方程为

$$(m + b)\ddot{x} + c\dot{x} + k_v x + k_h x \left(\frac{l_0}{\sqrt{4l^2 - x^2}} - 1 \right) = f_e \cos \omega t \quad (6)$$

式(6)表示对时间 t 求导,将式(6)无量纲化,可得

$$(1 + \delta)X'' + 2\zeta X' + X + \beta X \left(\frac{\eta}{\sqrt{4 - X^2}} - 1 \right) = F_e \cos \Omega T \quad (7)$$

其中: $\delta = b/m$; $\omega_n = \sqrt{k_v/m}$; $\zeta = c/(2m\omega_n)$; $F_e = f_e/(k_v l)$; $\Omega = \omega/\omega_n$; $T = \omega_n t$ 。

式(7)表示对参数 T 求导。运用式(5),式(7)可近似为

$$(1 + \delta)X'' + 2\zeta X' + \gamma_1 X + \gamma_3 X^3 + \gamma_5 X^5 = F_e \cos \Omega T \quad (8)$$

运用谐波平衡法求解式(8),假设解的形式为

$$X = a \cos(\Omega T + \theta) \quad (9)$$

忽略高次谐波项的影响,可得并联式惯容准零刚度隔振器的幅频及相频特性关系

$$\gamma_1 a + \frac{3\gamma_3}{4} a^3 + \frac{5\gamma_5}{8} a^5 - (1 + \delta)\Omega^2 a = F_e \cos \theta \quad (10)$$

$$-2\zeta a \Omega = F_e \sin \theta \quad (11)$$

$$\left[\gamma_1 a + \frac{3\gamma_3}{4} a^3 + \frac{5\gamma_5}{8} a^5 - (1 + \delta)\Omega^2 a \right]^2 + [2\zeta a \Omega]^2 = F_e^2 \quad (12)$$

$$\theta = \arctan \frac{2\zeta \Omega}{(1 + \delta)\Omega^2 - \gamma_1 - \frac{3\gamma_3}{4} a^2 - \frac{5\gamma_5}{8} a^4} \quad (13)$$

经并联式惯容准零刚度隔振器传递到基础的无量纲力为

$$F_{fp} = \delta X'' + 2\zeta X' + \gamma_1 X + \gamma_3 X^3 + \gamma_5 X^5 \quad (14)$$

运用式(9),则并联式惯容准零刚度隔振器的力传递率为

$$T_{Fp} = F_{fp}/F_e = \frac{\sqrt{\left(-\delta\Omega^2 a + \gamma_1 a + \frac{3}{4}\gamma_3 a^3 + \frac{5}{8}\gamma_5 a^5 \right)^2 + (2\zeta\Omega a)^2}}{F_e} \quad (15)$$

运用式(12),式(15)也可写为

$$T_{Fp} = \frac{\sqrt{\left(\gamma_1 a + \frac{3}{4}\gamma_3 a^3 + \frac{5}{8}\gamma_5 a^5 - \delta\Omega^2 a \right)^2 + (2\zeta\Omega a)^2}}{\sqrt{\left(\gamma_1 a + \frac{3}{4}\gamma_3 a^3 + \frac{5}{8}\gamma_5 a^5 - (1 + \delta)\Omega^2 a \right)^2 + (2\zeta\Omega a)^2}} \quad (16)$$

惯容准零刚度隔振器的隔振性能用动态位移峰值、力传递率峰值、隔振频带以及高频带的力传递率4个性能评价指标来评价,并联式惯容准零刚度隔振器的4个性能评价指标确定过程如下。

1) 动态位移峰值 a_m 。将式(12)对激励频率 Ω 求导,可得

$$\begin{cases} J_1 da/d\Omega + J_2 = 0 \\ J_1 = 2 \left[\gamma_1 a + \frac{3\gamma_3}{4} a^3 + \frac{5\gamma_5}{8} a^5 - (1 + \delta)\Omega^2 a \right] \times \\ \left[\gamma_1 + \frac{9\gamma_3}{4} a^2 + \frac{25\gamma_5}{8} a^4 - (1 + \delta)\Omega^2 \right] + 8\zeta^2 \Omega^2 a \\ J_2 = 8\zeta^2 a^2 \Omega - 4(1 + \delta)a\Omega \times \\ \left[\gamma_1 a + \frac{3\gamma_3}{4} a^3 + \frac{5\gamma_5}{8} a^5 - (1 + \delta)\Omega^2 a \right] \end{cases} \quad (17)$$

对于动态位移峰值 a_m ,满足 $da_m/d\Omega = 0$,即 $J_2 = 0$,可得

$$\Omega^2 = \frac{1}{1 + \delta} \left(\gamma_1 + \frac{3\gamma_3}{4} a_m^2 + \frac{5\gamma_5}{8} a_m^4 \right) - \frac{2\zeta^2}{(1 + \delta)^2} \quad (18)$$

将式(18)代入式(12)可得

$$5(1 + \delta)\zeta^2 \gamma_5 a_m^6 + 6(1 + \delta)\zeta^2 \gamma_3 a_m^4 + 8\zeta^2 [(1 + \delta)\gamma_1 - \zeta^2] a_m^2 - 2(1 + \delta)^2 F_e^2 - 4\delta F_e^2 = 0 \quad (19)$$

求解式(19),可确定动态位移峰值 a_m 。

2) 力传递率峰值 T_{Fpm} 。令式(16)力传递率 T_{Fp} 表达式中的分子与分母的平方分别为 N_p 与 M_p ,即

$$\begin{cases} N_p = \left(\gamma_1 a + \frac{3}{4} \gamma_3 a^3 + \frac{5}{8} \gamma_5 a^5 - \delta \Omega^2 a \right)^2 + (2\zeta \Omega a)^2 \\ M_p = \left[\gamma_1 a + \frac{3}{4} \gamma_3 a^3 + \frac{5}{8} \gamma_5 a^5 - (1 + \delta) \Omega^2 a \right]^2 + (2\zeta \Omega a)^2 \end{cases} \quad (20)$$

对于力传递率峰值 T_{Fpm} , 满足 $dT_{Fpm}/d\Omega=0$, 即

$$N_p dM_p/d\Omega - M_p dN_p/d\Omega = 0 \quad (21)$$

结合式(12)与式(21), 求解此非线性方程组, 可确定力传递率峰值 T_{Fpm} 。

3) 隔振频带 Ω_c 。在隔振频带内, 满足 $T_{Fp} \leq 1$, 对于临界隔振频率点 $(\Omega_{ij} a_{ij})$, 有 $T_{Fp} = 1$, 即 $N_p = M_p$, 可得

$$\Omega_{ij}^2 = \frac{1}{1 + 2\delta} \left(2\gamma_1 + \frac{3\gamma_3}{2} a_{ij}^2 + \frac{5\gamma_5}{4} a_{ij}^4 \right) \quad (22)$$

将式(22)代入式(12)可得

$$\begin{aligned} & \frac{25}{64} \gamma_5^2 a_{ij}^{10} + \frac{15}{16} \gamma_3 \gamma_5 a_{ij}^8 + [5(1 + 2\delta)\zeta^2 \gamma_5 + \frac{9}{16} \gamma_3^2 + \\ & \frac{5}{4} \gamma_1 \gamma_5] a_{ij}^6 + [6(1 + 2\delta)\zeta^2 + \frac{3}{2} \gamma_1] \gamma_3 a_{ij}^4 + [8(1 + \\ & 2\delta)\zeta^2 + \gamma_1] \gamma_1 a_{ij}^2 - [4\delta(1 + \delta) + 1] F_e^2 = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

求解式(23), 可确定临界隔振频率点 $(\Omega_{ij} a_{ij})$ 。若系统呈现线性或软特性, 则隔振频带 Ω_c 由临界隔振频率点 $(\Omega_{ij} a_{ij})$ 决定; 若系统呈现硬特性, 则隔振频带 Ω_c 由跳下频率点 $(\Omega_{jd} a_{jd})$ 决定。将式(12)对振幅 a 求导, 可得

$$J_1 + J_2 d\Omega/da = 0 \quad (24)$$

对于跳下频率点, 满足 $d\Omega_{jd}/da_{jd}=0$, 即 $J_1=0$, 结合式(12), 求解此非线性方程组, 可确定跳下频率点 $(\Omega_{jd} a_{jd})$ 。

4) 高频带的力传递率 T_{Fplim} 。当激励频率远大于系统固有频率时, 并联式惯容准零刚度隔振器在高频带的力传递率为

$$T_{Fplim} = \lim_{\Omega \gg 1} T_{Fp} = \delta/(1 + \delta) \quad (25)$$

阻尼比 ζ 与激励力幅值 F_e 对准零刚度隔振器动态特性的影响已经被广泛研究, 可知其动态位移峰值 a_m 与力传递率峰值 T_{Fpm} 随着激励力幅值 F_e 的增加而增大, 随着阻尼比 ζ 的增加而减小。从式(7)表征的并联式惯容准零刚度隔振器在简谐力激励下的无量纲动力学方程中可看出, 为了使根号项 $\sqrt{4 - X^2}$ 有意义, 位移 X 应满足关系 $0 \leq |X| < 2$, 因此笔者研究的惯容准零刚度隔振器的动态位移峰值 a_m 不应超过 2 ($0 \leq a_m < 2$), 这是由组成惯容准零刚度隔振器的菱形负刚度机构决定的, 所以笔者研究考虑激励力幅值较小的情况。

本研究的两个主要结构参数, 即惯质比 δ 与刚度比 β 对惯容准零刚度隔振器动态特性的影响, 惯质比 δ 决定了系统的惯性特性, 刚度比 β 决定了系统的刚度特性。在下面的分析中对于不同的刚度比 β , 长度比 $\eta = \eta_{QZS}$, 此时获得准零刚度特性, 即 $\gamma_1 = 0$ 。不同惯质比 δ 与刚度比 β 下, 并联式惯容准零刚度隔振器的动态位移与力传递率分别如图 4 与图 5 所示, 图中的动态位移峰值 a_m 与力传递率峰值 T_{Fpm} 用圆圈表示, 前 3 个评价指标如图 6 所示。在所选择的结构参数范围内, 并联式惯容准零刚度隔振器表现出硬特性, 隔振频带 Ω_c 由跳下频率点 $(\Omega_{jd} a_{jd})$ 决定。

从图 4、图 5 与图 6 中可看出, 当其他参数不变而仅改变惯质比 δ 时, 随着惯质比 δ 的增加, 并联式惯容准零刚度隔振器的动态位移峰值逐渐增大, 力传递率峰值逐渐减小, 隔振频带逐渐变宽, 高频带的力传递率逐渐增大; 当仅改变刚度比 β 时, 随着刚度比 β 的增加, 并联式惯容准零刚度隔振器的动态位移峰值逐渐减小, 力传递率峰值逐渐增加, 隔振频带

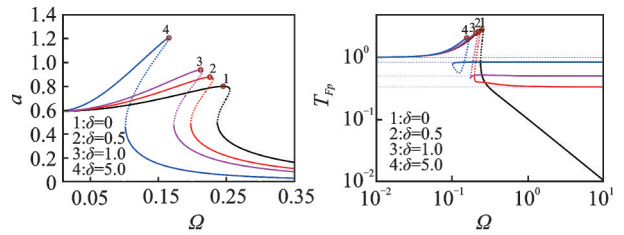


图 4 不同惯质比下并联式惯容准零刚度隔振器动态位移与力传递率 ($\beta=2, \eta = \eta_{QZS}, \zeta=0.05, F_e=0.02$)

Fig.4 Dynamic displacement and force transmissibility of the parallel-connected inerter-based QZS vibration isolator for different δ ($\beta=2, \eta = \eta_{QZS}, \zeta=0.05, F_e=0.02$)

逐渐变窄, 高频带的力传递率基本一致。

对于并联式惯容准零刚度隔振器, 若要减小动态位移峰值, 则应取较小的惯质比 δ 与较大的刚度比 β ; 若要减小力传递率峰值并拓宽隔振频带, 则应取较大的惯质比 δ 与较小的刚度比 β ; 若要减小高频带的力传递率, 则应取较小的惯质比 δ 。与准零刚度隔振器相比, 即令式(6)、式(7)与式(8)中的惯质比 $\delta=0$, 其动态位移峰值较大, 力传递率峰值较小, 隔振频带较宽, 高频带的力传递率较大。

并联式惯容准零刚度隔振器动态响应的解析解与数值解对比如图 7 所示, 两种数值解, 即数值解 1

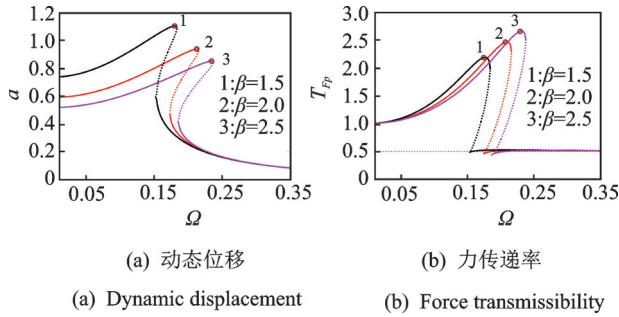


图5 不同刚度比下并联式惯容准零刚度隔振器动态位移与力传递率($\delta=1, \eta=\eta_{QZS}, \zeta=0.05, F_e=0.02$)

Fig.5 Dynamic displacement and force transmissibility of the parallel-connected inerter-based QZS vibration isolator for different β ($\delta=1, \eta=\eta_{QZS}, \zeta=0.05, F_e=0.02$)

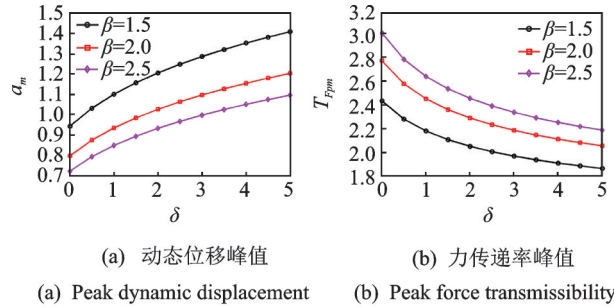


图6 并联式惯容准零刚度隔振器动态位移峰值、传递率峰值与隔振频带($\eta=\eta_{QZS}, \zeta=0.05, F_e=0.02$)

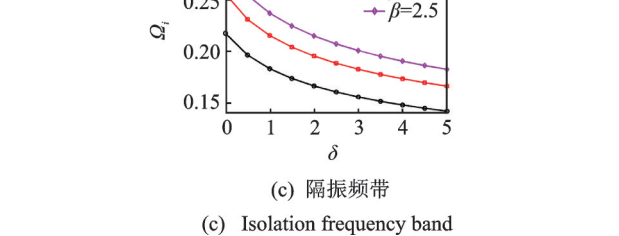


Fig.6 Peak dynamic displacement, peak force transmissibility and isolation frequency band of the parallel-connected inerter-based QZS vibration isolator ($\eta=\eta_{QZS}, \zeta=0.05, F_e=0.02$)

和2,分别通过四阶定步长的龙格库塔法对原始系统式(7)和近似系统式(8)进行数值积分求解得到。

在整个频带内,两种数值解比较一致,表明当激励力幅值较小时,近似系统能够很好地模拟原始系统;在低频区域解析解与数值解的误差较大,这是因为本研究运用谐波平衡法主要得到了系统的主共振响应,而数值解中也包含了高次谐波响应;在其他频带,解析解与数值解的误差较小,说明运用谐波平衡法求解系统的动态响应是可行的。

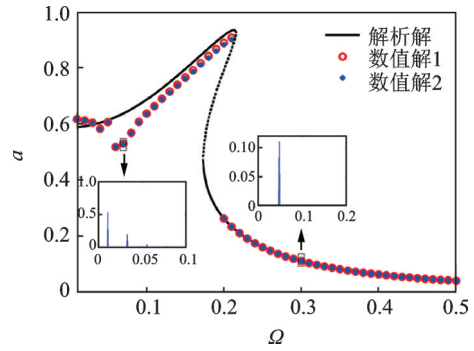


图7 并联式惯容准零刚度隔振器动态响应解析解与数值解对比($\delta=1, \beta=2, \eta=\eta_{QZS}, \zeta=0.05, F_e=0.02$)

Fig.7 Comparison between analytical results and numerical results of the dynamic response for the parallel-connected inerter-based vibration isolator ($\delta=1, \beta=2, \eta=\eta_{QZS}, \zeta=0.05, F_e=0.02$)

2 串联式惯容准零刚度隔振器

串联式惯容准零刚度隔振器如图8所示,其中惯容器与阻尼器先串联再与垂直弹簧并联,此系统为1.5自由度系统,惯容器从系统静态平衡位置开始时的位移为 x_b 。

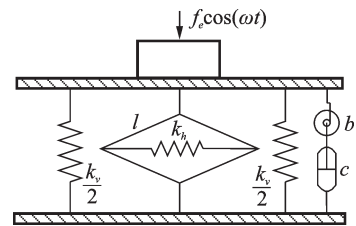


图8 串联式惯容准零刚度隔振器

Fig.8 Series-connected inerter-based QZS vibration isolator

串联式惯容准零刚度隔振器在简谐力激励下的动力学方程为

$$\begin{cases} (m+b)\ddot{x}-b\ddot{x}_b+k_v x+k_h x\left(\frac{l_0}{\sqrt{4l^2-x^2}}+1\right)=f_e \cos \omega t \\ -b\ddot{x}+b\ddot{x}_b+c\dot{x}_b=0 \end{cases} \quad (26)$$

将式(26)无量纲化,可得

$$\begin{cases} (1+\delta) X''-\delta X_b''+X+\beta X\left(\frac{\eta}{\sqrt{4-X^2}}-1\right)=F_e \cos \Omega T \\ -\delta X''+\delta X_b''+2\zeta X_b'=0 \end{cases} \quad (27)$$

其中: $X_b=x_b/l$,其余无量纲参数与上节一致。

运用式(5),式(27)可近似为

$$\begin{cases} (1+\delta)X'' - \delta X_b'' + \gamma_1 X + \gamma_3 X^3 + \gamma_5 X^5 = F_e \cos \Omega T \\ -\delta X'' + \delta X_b'' + 2\zeta X_b' = 0 \end{cases} \quad (28)$$

运用谐波平衡法求解式(28),假设解的形式为

$$\begin{cases} X = a \cos \theta \\ X_b = a_b \cos \theta_b \end{cases} \quad (29)$$

忽略高次谐波项的影响,可得串联式惯容准零刚度隔振器的幅频及相频特性关系

$$-2\zeta\Omega a_b \cos(\theta - \theta_b) = F_e \sin \theta \quad (30)$$

$$(\gamma_1 - \Omega^2)a + \frac{3\gamma_3 a^3}{4} + \frac{5\gamma_5 a^5}{8} + 2\zeta\Omega a_b \sin(\theta - \theta_b) = F_e \cos \theta \quad (31)$$

$$\delta\Omega^2 a \cos(\theta_b - \theta) - \delta\Omega^2 a_b = 0 \quad (32)$$

$$\delta\Omega^2 a \sin(\theta_b - \theta) - 2\zeta\Omega a_b = 0 \quad (33)$$

由式(32)与式(33),可得振幅 a 与 a_b 的关系

$$a_b = \delta\Omega a / \sqrt{(\delta\Omega)^2 + (2\zeta)^2} \quad (34)$$

将式(34)分别代入式(30)与式(31),再平方相加,可得

$$\begin{aligned} & \left[(\gamma_1 - \Omega^2) + \frac{3\gamma_3 a^2}{4} + \frac{5\gamma_5 a^4}{8} - \frac{4\delta\zeta^2 \Omega^2}{\delta^2 \Omega^2 + 4\zeta^2} \right]^2 a^2 + \\ & \left[\frac{2\delta^2 \zeta \Omega^3}{\delta^2 \Omega^2 + 4\zeta^2} \right]^2 a^2 = F_e^2 \end{aligned} \quad (35)$$

根据式(35)与式(34),可确定系统的振幅 a 与 a_b 。

经串联式惯容准零刚度隔振器传递到基础的无量纲力为

$$F_b = \gamma_1 X + \gamma_3 X^3 + \gamma_5 X^5 + 2\zeta X_b' \quad (36)$$

运用式(29),则串联式惯容准零刚度隔振器的力传递率为

$$T_{Fs} = F_b / F_e =$$

$$\frac{\sqrt{\left[\gamma_1 a + \frac{3\gamma_3 a^3}{4} + \frac{5\gamma_5 a^5}{8} + 2\zeta\Omega a_b \sin(\theta - \theta_b) \right]^2 + [2\zeta\Omega a_b \cos(\theta - \theta_b)]^2}}{F_e} \quad (37)$$

运用式(30)~(35),式(37)也可写为

$$T_{Fs} = N_s / M_s \quad (38)$$

$$N_s = \left[\left(\gamma_1 a + \frac{3\gamma_3 a^3}{4} + \frac{5\gamma_5 a^5}{8} \right) (\delta^2 \Omega^2 + 4\zeta^2) - 4\delta\zeta^2 \Omega^2 a \right]^2 + [2\delta^2 \zeta \Omega^3 a]^2 \quad (39)$$

$$M_s = \left[\left((\gamma_1 - \Omega^2) a + \frac{3\gamma_3 a^3}{4} + \frac{5\gamma_5 a^5}{8} \right) (\delta^2 \Omega^2 + 4\zeta^2) - 4\delta\zeta^2 \Omega^2 a \right]^2 + [2\delta^2 \zeta \Omega^3 a]^2 \quad (40)$$

串联式惯容准零刚度隔振器的4个性能评价指标求解过程与并联式类似,主要根据式(35)、式(38)~(40),其高频带的力传递率 $T_{Fslim}=0$ 。

不同惯质比 δ 与刚度比 β 下,串联式惯容准零刚度隔振器的动态位移与力传递率分别如图9与图10所示,前3个性能评价指标如图11所示。在所选择的结构参数范围内,串联式惯容准零刚度隔振器表现出硬特性,隔振频带由跳下频率点决定。

当其他参数不变而仅改变惯质比 δ 时,随着惯质比 δ 的增加,串联式惯容准零刚度隔振器的动态位移峰值与力传递率峰值逐渐减小,隔振频带逐渐变宽,当惯质比 δ 增大到一定值后,动态位移峰值、力传递率峰值与隔振频带变化很小,并渐近趋于准零刚度隔振器的各个指标值,即如图11中的虚线所示。当仅改变刚度比 β 时,随着刚度比 β 的增加,串联式惯容准零刚度隔振器的动态位移峰值逐渐减小,力传递率峰值逐渐增加,隔振频带逐渐变窄,与并联式惯容准零刚度隔振器的变化趋势类似。

对于串联式惯容准零刚度隔振器,若要减小动态位移峰值,则应取较大的惯质比 δ 与较大的刚度

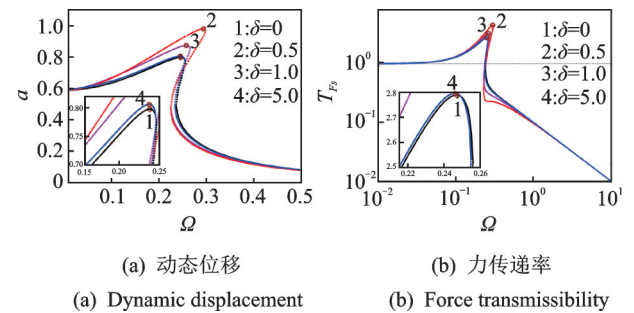


图9 不同惯质比下串联式惯容准零刚度隔振器动态位移与力传递率($\beta=2$, $\eta=\eta_{QZS}$, $\zeta=0.05$, $F_e=0.02$)

Fig.9 Dynamic displacement and force transmissibility of the series-connected inerter-based QZS vibration isolator for different δ ($\beta=2$, $\eta=\eta_{QZS}$, $\zeta=0.05$, $F_e=0.02$)

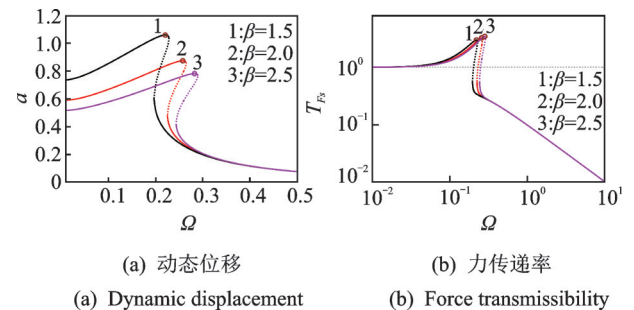


图10 不同刚度比下串联式惯容准零刚度隔振器动态位移与力传递率($\delta=1$, $\eta=\eta_{QZS}$, $\zeta=0.05$, $F_e=0.02$)

Fig.10 Dynamic displacement and force transmissibility of the series-connected inerter-based QZS vibration isolator for different β ($\delta=1$, $\eta=\eta_{QZS}$, $\zeta=0.05$, $F_e=0.02$)

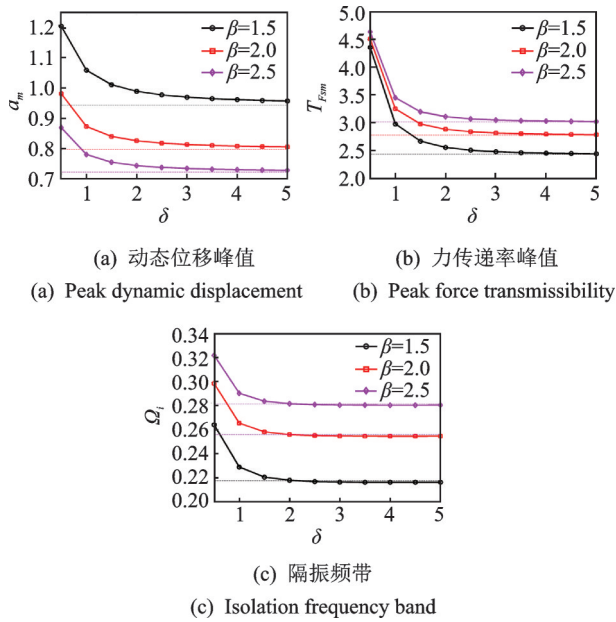


图 11 串联式惯容准零刚度隔振器动态位移峰值、传递率峰值与隔振频带($\eta=\eta_{QZS}$, $\zeta=0.05$, $F_e=0.02$)

Fig.11 Peak dynamic displacement, peak force transmissibility and isolation frequency band of the series-connected inverter-based QZS vibration isolator ($\eta=\eta_{QZS}$, $\zeta=0.05$, $F_e=0.02$)

比 β ;若要减小力传递率峰值并拓宽隔振频带,则应取较大的惯质比 δ 与较小的刚度比 β 。与准零刚度隔振器相比,其动态位移峰值与力传递率峰值较大,当惯质比较小时隔振频带较窄,而当惯质比较大时隔振频带较宽,高频带的力传递率都趋于零。

串联式惯容准零刚度隔振器动态响应的解析解与数值解对比如图 12 所示,数值解 1 和 2 分别通过四阶定步长的龙格库塔法对原始系统式(27)和近似系统式(28)进行数值积分求解得到,对比结果与并联式惯容准零刚度隔振器类似,表明近似系统能够很好地模拟原始系统,运用谐波平衡法求解系统

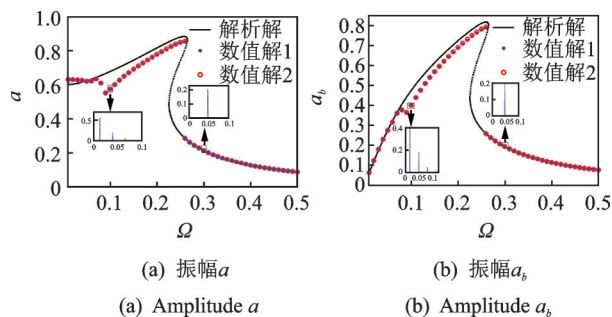


图 12 串联式惯容准零刚度隔振器动态响应解析解与数值解对比($\delta=1$, $\beta=2$, $\eta=\eta_{QZS}$, $\zeta=0.05$, $F_e=0.02$)

Fig.12 Comparison between analytical results and numerical results of the dynamic response for the series-connected inverter-based vibration isolator ($\delta=1$, $\beta=2$, $\eta=\eta_{QZS}$, $\zeta=0.05$, $F_e=0.02$)

的动态响应是可行的。

3 两种惯容准零刚度隔振器隔振性能对比分析

并联式与串联式惯容准零刚度隔振器隔振性能对比如图 13 所示。与串联式惯容准零刚度隔振器相比,并联式惯容准零刚度隔振器的动态位移峰值较大,力传递率峰值较小,隔振频带较宽,高频带的力传递率较大。当考虑减小力传递率峰值,拓宽隔振频带,可选择并联式惯容准零刚度隔振器;当考虑减小动态位移峰值与高频带的力传递率,可选择串联式惯容准零刚度隔振器。

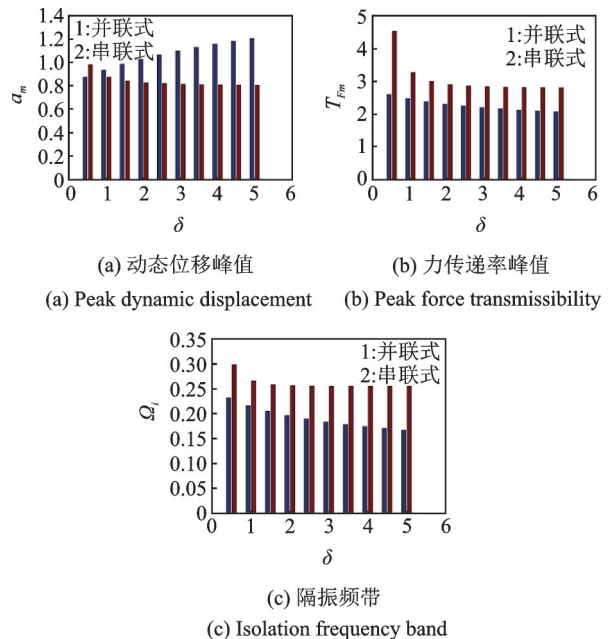


图 13 两种惯容准零刚度隔振器动态性能对比($\beta=2$, $\eta=\eta_{QZS}$, $\zeta=0.05$, $F_e=0.02$)

Fig.13 Comparison of the dynamic performance for the two inverter-based QZS vibration isolators($\beta=2$, $\eta=\eta_{QZS}$, $\zeta=0.05$, $F_e=0.02$)

4 结论

1) 运用谐波平衡法可以方便地求解惯容准零刚度隔振器的动态响应,解析解与数值解比较一致,验证了解析解的精确性与可靠性,且采用泰勒级数展开的近似系统能很好地模拟原始系统。

2) 相较串联式惯容准零刚度隔振器,并联式惯容准零刚度隔振器能进一步降低准零刚度隔振器的力传递率峰值,拓宽隔振频带,但动态位移峰值与高频带的力传递率较大。

3) 串联式惯容准零刚度隔振器能拓宽准零刚度隔振器的隔振频带,高频带的力传递率都趋于零,

但动态位移峰值与力传递率峰值较大。

参 考 文 献

- [1] IBRAHIM R A. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 314(3): 371-452.
- [2] 陆泽琦, 陈立群. 非线性被动隔振的若干进展[J]. *力学学报*, 2017, 49(3): 550-564.
LU Zeqi, CHEN Liqun. Some recent progresses in nonlinear passive isolations of vibrations[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(3): 550-564.(in Chinese)
- [3] CARRELLA A, BRENNAN M J, WATERS T P. Static analysis of a passive vibration isolation with quasi zero-stiffness characteristic[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 301(3): 678689.
- [4] 王勇, 李舜酩, 程春, 等. 立方速度反馈控制的准零刚度隔振器动力学特性分析[J]. *振动工程学报*, 2016, 29(2): 305-313.
WANG Yong, LI Shunming, CHENG Chun, et al. Dynamic analysis of a quasi-zero-stiffness vibration isolator with cubic velocity feedback control[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2016, 29(2): 305-313.(in Chinese)
- [5] ZHOU N, LIU K. A tunable high-static low-dynamic stiffness vibration isolator[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329(9): 1254-1273.
- [6] 刘兴天, 孙靖雅, 肖锋, 等. 准零刚度微振动隔振器的原理和性能研究[J]. *振动与冲击*, 2013, 32(21): 69-73.
LIU Xingtian, SUN Jingya, XIAO Feng, et al. Principle and performance of a quasi-zero stiffness isolator for micro-vibration isolation[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2013, 32(21): 69-73.(in Chinese)
- [7] 王毅, 徐道临, 周加喜. 滚球型准零刚度隔振器的特性分析[J]. *振动与冲击*, 2015, 34(4): 142-147.
WANG Yi, XU Daolin, ZHOU Jiayi. Characteristic analysis of a ball-type vibration isolator with quasi-zero-stiffness[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(4): 142-147.(in Chinese)
- [8] 程春, 李舜酩, 王勇, 等. 考虑载荷变化的准零刚度隔振器动态特性[J]. *振动、测试与诊断*, 2017, 37(4): 743-749.
CHENG Chun, LI Shunming, WANG Yong, et al. Dynamic analysis of quasi-zero-stiffness vibration isolator considering load variation[J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2017, 37(4): 743-749.(in Chinese)
- [9] 李昊, 赵发刚, 周徐斌. 基于混杂双稳定层合板的准零刚度隔振装置[J]. *力学学报*, 2019, 51(2): 354-363.
- LI Hao, ZHAO Fagang, ZHOU Xubin. A quasi-zero stiffness vibration isolator based on hybrid bistable composite laminate[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(2): 354-363.(in Chinese)
- [10] CHENG C, LI S M, WANG Y, et al. Force and displacement transmissibility of a quasi-zero stiffness vibration isolator with geometric nonlinear damping[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 87(4): 2267-2279.
- [11] LIU C C, JING X J, LI F M. Vibration isolation using a hybrid lever-type isolation system with an X-shape supporting structure[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, 98: 169-177.
- [12] SMITH M C. Synthesis of mechanical networks: the inerter[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(10): 1648-1662.
- [13] HU Y, CHEN M Z Q, SHU Z, et al. Analysis and optimisation for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 346: 17-36.
- [14] WANG Y, WANG R C, MENG H D. Analysis and comparison of the dynamic performance of one-stage inerter-based and linear vibration isolators[J]. *International Journal of Applied Mechanics*, 2018, 10(1): 1850005.
- [15] WANG Y, MENG H D, ZHANG B Y, et al. Analytical research on the dynamic performance of semi-active inerter-based vibration isolator with acceleration-velocity-based control strategy[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2019, 26(4): e2336.
- [16] 王勇, 汪若尘, 孟浩东. 一种具有几何非线性的斜置式惯容隔振器动态特性研究[J]. *振动与冲击*, 2018, 37(21): 184-189.
WANG Yong, WANG Ruochen, MENG Haodong. Dynamic characteristics of an inclined inerter-based vibration isolator with geometrical nonlinearity[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, 37(21): 184-189.(in Chinese)



第一作者简介:王勇,男,1989年6月生,副教授。主要研究方向为非线性振动分析与控制。曾发表《Analytical research on the dynamic performance of semi-active inerter-based vibration isolator with acceleration-velocity-based control strategy》(《Structural Control and Health Monitoring》2019, Vol. 26, No. 4)等论文。
E-mail:wangy1921@126.com