

转子进动定理的扩充和完善*

廖明夫, 赵清周

(西北工业大学动力与能源学院 西安, 710072)

摘要 为更深入地揭示转子进动的轨迹特征,提出了关于转子进动轨迹的 2 个定理。定理 1 表明,转子进动的任一阶轨迹分量所围面积可直接由同阶频率成分构成的轨迹方程系数矩阵行列式求得。定理 2 证明,转子进动轨迹矢径在单位时间内所扫过的面积是恒定的,而与起始点无关。同时,提出了欧拉复向量的内积法则,即 2 个欧拉复向量的内积等于 2 个复向量的幅值与欧拉角之差的余弦三者之积,且符合交换律。利用 2 个定理和内积法则对转子进动理论进行了补充和完善。结果表明,在转子的运动中,作用力所做的功关于转子的进动是正交的。所得结论对于揭示转子的进动规律和机理、诊断转子故障具有参考价值。

关键词 转子; 轨迹; 定理; 进动; 轨迹所围面积; 复向量; 内积法则

中图分类号 V231

引言

转子的进动轨迹是描述转子振动特征最清晰的表达形式之一。根据进动轨迹,可把转子的进动分解成正进动分量和反进动分量,有利于凸显转子的涡动特征。由于正、反进动量既反映了转子振动的频率和幅值,又包含了转子振动的相位信息,而且还显示了转子进动的方向,因此正、反进动量作为转子振动的特征量,可清晰地表征激振力和转子运动之间的关系,比传统的频谱更敏感,与故障类型的对应关系更明确。基于这些特点,进动分析成为转子振动特性分析和故障诊断的有效工具^[1-14]。文献[14]提出了转子进动的 4 个定理。

定理 1: 转子进动的椭圆轨迹可分解为正进动圆轨迹和反进动圆轨迹。椭圆轨迹所围的面积等于正进动圆轨迹所围面积与反进动圆轨迹所围面积之差的绝对值。文献[14]仅用正椭圆轨迹予以了证明,缺乏一般性。

定理 2: 椭圆轨迹的周长小于等于正进动圆轨迹和反进动圆轨迹周长之和;而大于等于正进动圆轨迹和反进动圆轨迹中半径较大一个进动圆轨迹的周长。文献[14]利用一个近似公式证明了定理 2,精度受到影响。

定理 3: 转子上的作用力也可分解为正进动作用力和反进动作用力,正进动作用力只在正进动轨迹上做功,而不会在反进动轨迹上做功;同理,反进动作用力只在反进动轨迹上做功,而不会在正进动

轨迹上做功^[14]。

定理 4: 正进动作用力在正进动轨迹上所做的功等于正进动作用力幅值矢量与正进动位移幅值矢量的内积;反进动作用力在反进动轨迹上所做的功等于反进动作用力幅值矢量与反进动位移幅值矢量的内积;转子上作用力所做的总功等于正进动作用力所做的功与反进动作用力所做的功之代数和^[2]。

对于定理 3 和定理 4,文献[14]仅给出了示例,但未给出证明。文献[2]对 4 个定理进行了证明,但证明方法较为繁琐。

笔者首先提出转子进动轨迹面积的参数定理,并给出证明。利用轨迹面积的参数定理对文献[14]提出的转子进动定理 1 的普适性进行了证明。同时,提出了关于转子轨迹所围面积时不变特征的新定理并予以了证明。提出了复向量的内积法则,对文献[14]提出的定理 3 进行了证明,简捷、清晰并具有普适性。以不平衡力和间隙激振力为例,说明这些定理在实际中的应用。

1 转子进动轨迹的参数定理

一般情况下,转子进动轨迹可能包含若干个频率分量,但总可通过频域分析,将进动轨迹按照频率成分进行阶次分解。分解之后,就可得到若干阶次分量。

通常转子的任一阶进动轨迹分量为斜椭圆,如图 1 所示,其中,长轴为 a_1 ,短轴为 b_1 。取其中某一

* 国家科技重大专项基金资助项目(2017-IV-0001-0038)

收稿日期:2019-12-18;修回日期:2020-09-22

阶轨迹分量作为分析对象,分析方法和结果适合任意频率成分。为书写简单,未加阶次下标。任一阶进动轨迹方程皆可表示为

$$x(t) = x_c \cos \Omega t + x_s \sin \Omega t \quad (1)$$

$$y(t) = y_c \cos \Omega t + y_s \sin \Omega t \quad (2)$$

其中: x_c 和 x_s 表示按照频率 Ω 对转子在 x 方向的振动进行分解得到的频率成分; y_c 和 y_s 表示转子在 y 方向振动的频率成分。

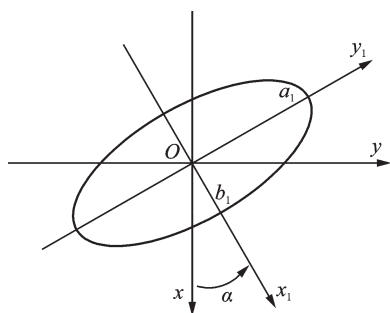


图1 转子某一阶进动椭圆轨迹分量
Fig.1 An elliptical orbit of rotor precession

将式(1)和式(2)写成矩阵形式的轨迹方程

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_c & x_s \\ y_c & y_s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中: $\begin{bmatrix} x_c & x_s \\ y_c & y_s \end{bmatrix}$ 为轨迹方程的系数矩阵。

由式(3)所表示的椭圆轨迹所围的面积为

$$A = \pi ab s \left(\left| \begin{bmatrix} x_c & x_s \\ y_c & y_s \end{bmatrix} \right| \right) = \pi |x_c y_s - x_s y_c| \quad (4)$$

即转子任意一阶进动轨迹所围的面积可直接由轨迹方程系数矩阵的行列式求得。

证明:在 (x_1, y_1) 坐标系,椭圆轨迹的方程为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \end{pmatrix} \quad (5)$$

椭圆轨迹所围的面积为

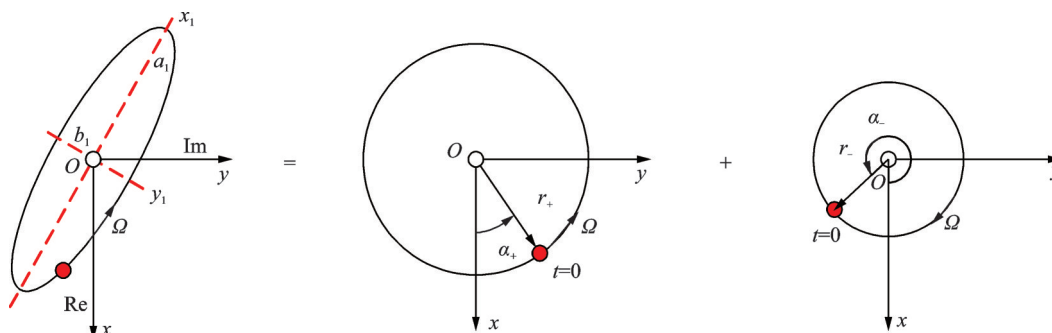


图2 转子的椭圆轨迹(正、反进动圆轨迹)

Fig.2 An elliptical orbit of the rotor (forward whirl and back whirl component)

$$A = \pi a_1 b_1 \quad (6)$$

(x_1, y_1) 坐标系与 (x, y) 坐标系之间的变换关系为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7)$$

其中: α 为两个坐标系间的夹角。

将式(5)和式(3)分别代入式(7)的左右两边,得到

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c & x_s \\ y_c & y_s \end{bmatrix} \quad (8)$$

由此解得

$$\begin{cases} a_1 = x_c \cos \alpha + y_c \sin \alpha \\ b_1 = -x_s \sin \alpha + y_s \cos \alpha \\ x_s \cos \alpha + y_s \sin \alpha = 0 \\ -x_c \sin \alpha + y_c \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= (x_c \cos \alpha + y_c \sin \alpha)(-x_s \sin \alpha + y_s \cos \alpha) = \\ &= x_c y_s \cos^2 \alpha - x_s y_c \sin^2 \alpha - x_c x_s \cos \alpha \sin \alpha + \\ &+ y_c y_s \sin \alpha \cos \alpha = x_c y_s \cos^2 \alpha - x_s y_c \sin^2 \alpha + \\ &+ x_c y_s \sin^2 \alpha - x_s y_c \cos^2 \alpha = x_c y_s - x_s y_c \end{aligned} \quad (10)$$

椭圆轨迹所围的面积为

$$A = \pi a_1 b_1 = \pi |x_c y_s - x_s y_c| = \pi \left| \begin{bmatrix} x_c & x_s \\ y_c & y_s \end{bmatrix} \right| \quad (11)$$

转子进动轨迹的参数定理起源于对转子进动轨迹的分析,但在数学上也给出了求解参数方程表达的任意椭圆面积的简捷方法。下面利用参数定理对文献[14]中的面积定理进行证明。

如图2所示,任一阶椭圆轨迹可以分解为同阶正进动圆轨迹和同阶反进动圆轨迹。

椭圆轨迹的方程如式(3)所示。

正进动圆轨迹的半径为

$$r_+ = \frac{1}{2} [(x_c + y_s) + j(y_c - x_s)] \quad (12)$$

反进动圆轨迹的半径为

$$r_- = \frac{1}{2} [(x_c - y_s) + j(y_c + x_s)] \quad (13)$$

文献[14]所述的面积定理为:转子任何一阶进动轨迹所围的面积等于该阶正、反进动圆轨迹所围面积之差的绝对值,即

$$A = |A_+ - A_-| \quad (14)$$

其中: A 为转子进动椭圆轨迹所围的面积; A_+ 为对应的正进动圆轨迹所围面积; A_- 为对应的反进动圆轨迹所围的面积。

证明:由式(12)和式(13)可得正进动圆轨迹所围的面积为

$$A_+ = \frac{1}{4} \pi [(x_c + y_s)^2 + (y_c - x_s)^2] \quad (15)$$

反进动圆轨迹所围的面积为

$$A_- = \frac{1}{4} \pi [(x_c - y_s)^2 + (y_c + x_s)^2] \quad (16)$$

正、反进动圆轨迹所围面积之差的绝对值为

$$\begin{aligned} |A_+ - A_-| &= \frac{1}{4} \pi [(x_c + y_s)^2 + (y_c - x_s)^2 - \\ & [(x_c - y_s)^2 + (y_c + x_s)^2]] = \\ & \pi |x_c y_s - x_s y_c| = \pi abs \left(\begin{vmatrix} x_c & x_s \\ y_c & y_s \end{vmatrix} \right) = A \quad (17) \end{aligned}$$

上述利用进动轨迹参数定理对面积定理的证明适合于任意阶次和任意方向的椭圆轨迹,证明了面积定理的普适性。

2 转子进动轨迹矢径所扫面积的时不变定理

当转速恒定时,转子进动轨迹矢径在单位时间内所扫过的面积是恒定的,即转子进动轨迹矢径所扫面积的瞬时变化率为常数, $dA/dt = C_{\text{const}}$ 。

证明:如图3所示,在时间 dt 内,轨迹矢径所扫过的面积为 dA ,则有

$$dA = \frac{1}{2} \dot{\theta} r^2 dt \quad (18)$$

其中: $\dot{\theta}$ 为转子进动角速度。

当转速恒定时,根据式(14)可得

$$dA = |dA_+ - dA_-| = \frac{1}{2} |r_+^2 - r_-^2| \Omega dt \quad (19)$$

或

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |r_+^2 - r_-^2| \Omega = C_{\text{const}} \quad (20)$$

定理2表明,即使转子恒速运转,若其进动轨迹为椭圆轨迹,则进动角速度仍是时变的。

3 复向量的内积法则

任意两个欧拉复向量 $\sigma e^{j\alpha}$ 和 $\delta e^{j\beta}$ 的内积为

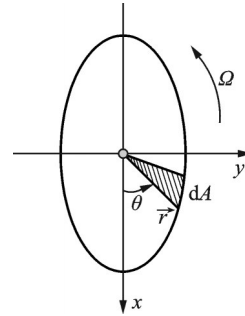


图3 转子进动扫过的面积

Fig.3 The area swept by the precessional motion of the rotor

$$x = \sigma e^{j\alpha} \delta e^{j\beta} = \delta e^{j\beta} \sigma e^{j\alpha} = \sigma \delta \cos(\alpha - \beta) \quad (21)$$

其中: $j = \sqrt{-1}$; σ 和 δ 为任意实数; α 和 β 为任意角度。

证明如下

$$\begin{aligned} x &= \sigma e^{j\alpha} \delta e^{j\beta} = \\ & \sigma (\cos\alpha + j\sin\alpha) \delta (\cos\beta + j\sin\beta) = \\ & \delta (\cos\beta + j\sin\beta) \sigma (\cos\alpha + j\sin\alpha) = \\ & \sigma \delta (\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) = \sigma \delta \cos(\alpha - \beta) \quad (22) \end{aligned}$$

特别注意, j 与 j 的内积为1,即 $jj=1$ 。

在转子动力学中,常用欧拉复向量来表征转子的进动和作用在转子上的力^[1-2,4,9]。在转子进动过程中,作用力所做的功是判定转子响应特征的重要度量。上述的内积法则为确定作用力做功提供了简捷的算法。

现运用内积法则补充证明文献[14]所提出的作用力做功的正交性定理。转子上作用力的某一频率分量可表示为

$$F = F_+ e^{j\Omega t} + F_- e^{-j\Omega t} \quad (23)$$

其中: F_+ 为正进动作用力力幅; F_- 为反进动作用力力幅; Ω 为力作用的频率。

设转子对应的同频率进动轨迹为

$$r = r_+ + r_- = r_+ e^{j(\Omega t + \beta_+)} + r_- e^{-j(\Omega t + \beta_-)} \quad (24)$$

其中: r_+ 为转子正进动轨迹分量; r_- 为转子反进动轨迹分量; r_+ 为转子正进动轨迹半径; r_- 为转子反进动轨迹半径; β_+ 为正进动相角; β_- 为反进动相角。

作用力所做的微功为

$$dW = (F_+ e^{j\Omega t} + F_- e^{-j\Omega t}) dr = (F_+ e^{j\Omega t} + F_- e^{-j\Omega t}) (dr_+ + dr_-) \quad (25)$$

$$dr = [j\Omega r_+ e^{j(\Omega t + \beta_+)} - j\Omega r_- e^{-j(\Omega t + \beta_-)}] dt \quad (26)$$

$$dr_+ = j\Omega r_+ e^{j(\Omega t + \beta_+)} dt \quad (27)$$

$$dr_- = -j\Omega r_- e^{-j(\Omega t + \beta_-)} dt \quad (28)$$

其中: dr_+ 和 dr_- 分别为正、反进动轨迹上的微位移。

由欧拉公式, j 可表示为

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (29)$$

式(27)和式(28)变为

$$dr_+ = \Omega r_+ e^{j(\Omega t + \frac{\pi}{2} + \beta_+)} dt \quad (30)$$

$$dr_- = \Omega r_- e^{-j(\Omega t + \frac{\pi}{2} + \beta_-)} dt \quad (31)$$

正进动作用力所做的微功为

$$dW_+ = F_+ e^{j\Omega t} dr = F_+ e^{j\Omega t} (dr_+ + dr_-) \quad (32)$$

将式(27)和式(28)代入式(32),并运用内积法则,可得

$$dW_+ = F_+ e^{j\Omega t} \cdot dr = dW_{++} + dW_{+-} = -[\Omega F_+ r_+ \sin\beta_+ + \Omega F_+ r_- \sin(2\Omega t + \beta_-)] dt \quad (33)$$

其中

$$dW_{++} = -\Omega F_+ r_+ \sin\beta_+ dt \quad (34)$$

$$dW_{+-} = -\Omega F_+ r_- \sin(2\Omega t + \beta_-) dt \quad (35)$$

dW_{++} , dW_{+-} 分别为正进动作用力在正、反进动轨迹上所做的微功。

转子进动一周,正进动作用力在正进动轨迹上所做的功为

$$W_{++} = \int_0^{2\pi} dW_{++} = -\int_0^{2\pi} F_+ r_+ \sin\beta_+ d(\Omega t) = -2\pi F_+ r_+ \sin\beta_+ \quad (36)$$

W_{++} 分别与正进动作用力力幅 F_+ 和转子正进动轨迹半径 r_+ 成正比,且与正进动轨迹的相角相关。当 $\beta_+ \neq k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $W_{++} \neq 0$, 即正进动作用力在正进动轨迹上会做功。

转子进动一周,正进动作用力在反进动轨迹上所做的功为

$$W_{+-} = \int_0^{2\pi} dW_{+-} = -\int_0^{2\pi} F_+ r_- \sin(2\Omega t + \beta_-) d(\Omega t) = \frac{1}{2} F_+ r_- \cos(2\Omega t + \beta_-) \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (37)$$

可见,正进动作用力在反进动轨迹上所做的功始终为0。

同理,可得到转子进动一周反进动作用力在反进动轨迹上所做的功为

$$W_{--} = \int_0^{2\pi} dW_{--} = -\int_0^{2\pi} F_- r_- \sin\beta_- d(\Omega t) = -2\pi F_- r_- \sin\beta_- \quad (38)$$

转子进动一周,反进动作用力在正进动轨迹上所做的功为 $W_{-+} = 0$ 。

4 应用示例

4.1 不平衡力的分解与做功

转子不平衡是转子上最常见的激振力。不平衡力在 x 和 y 方向的分量分别为

$$F_{x\epsilon} = m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t + \beta) \quad (39)$$

$$F_{y\epsilon} = m\epsilon\Omega^2 \sin(\Omega t + \beta) \quad (40)$$

写成进动作用力形式为

$$F_\epsilon = F_{x\epsilon} + jF_{y\epsilon} = F_+ e^{j\Omega t} = m\epsilon\Omega^2 e^{j\Omega t} e^{j\beta} \quad (41)$$

其中: $F_+ = m\epsilon\Omega^2 e^{j\beta}$ 为正进动作用力。

这说明转子不平衡只会产生正进动作用力。

在不平衡力作用下,转子的进动轨迹为

$$\mathbf{r} = r_+ e^{j(\Omega t + \beta_+)} + r_- e^{-j(\Omega t + \beta_-)} \quad (42)$$

根据内积法则,转子自转一周内不平衡力所做的功为

$$W_\epsilon = \int_0^T F_\epsilon d\mathbf{r} = \int_0^T F_+ d\mathbf{r}_+ = \int_0^{2\pi} m\epsilon\Omega^2 r_+ \cos(\beta - \beta_+ - \frac{\pi}{2}) d(\Omega t) = 2\pi m\epsilon\Omega^2 r_+ \sin(\beta - \beta_+) \quad (43)$$

其中: T 为转子振动的周期。

由式(43)可见,当不平衡力相位超前于正进动轨迹矢量 \mathbf{r}_+ , 即 $\beta > \beta_+$ 时,不平衡力做正功;当不平衡力相位滞后于正进动轨迹矢量 \mathbf{r}_+ , 即 $\beta < \beta_+$ 时,不平衡力做负功;当不平衡力与正进动轨迹矢量 \mathbf{r}_+ 同相位,即 $\beta = \beta_+$ 时,不平衡力不做功。

4.2 间隙激振力的分解与所做的功

在汽轮机、轴流压缩机及航空发动机等机械中,当转子轴线偏离机匣中心时,密封间隙或叶尖间隙会对转子产生间隙气动激振力。间隙激振力^[12]可表达为

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} \\ s_{yx} & s_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (44)$$

其中: F_x 和 F_y 为间隙激振力在 x 和 y 方向的分量; s_{xx} 和 s_{yy} 为主刚度; $s_{xy} = -s_{yx}$ 为反对称交叉刚度。

转子的轴心进动轨迹为

$$\mathbf{r} = r_+ e^{j\Omega t} + r_- e^{-j\Omega t} \quad (45)$$

可将间隙激振力分解成正、反进动作用力的形式,即

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = F_x + jF_y &= -s_0 \mathbf{r} - \Delta s_0 \mathbf{r}^* + s_{xy} j \mathbf{r} = \\ &= -s_0 [r_+ e^{j\Omega t} + r_- e^{-j\Omega t}] + s_{xy} j [r_+ e^{j\Omega t} + r_- e^{-j\Omega t}] - \\ &= \Delta s_0 [r_+^* e^{-j\Omega t} + r_-^* e^{j\Omega t}] = (js_{xy} r_+ - s_0 r_+ - \Delta s_0 r_+^*) e^{j\Omega t} + \\ &= (js_{xy} r_- - s_0 r_- - \Delta s_0 r_-^*) e^{-j\Omega t} = F_+ e^{j\Omega t} + F_- e^{-j\Omega t} \end{aligned} \quad (46)$$

其中: \mathbf{r}_+^* 为正进动轨迹矢量 \mathbf{r}_+ 的共轭矢量; \mathbf{r}_-^* 为反进动轨迹矢量 \mathbf{r}_- 的共轭矢量。

$$s_0 = \frac{1}{2} (s_{xx} + s_{yy}) \quad (47)$$

$$\Delta s_0 = \frac{1}{2} (s_{xx} - s_{yy}) \quad (48)$$

$$F_+ = (js_{xy} - s_0) \mathbf{r}_+ - \Delta s_0 \mathbf{r}_+^* \quad (49)$$

$$F_- = (js_{xy} - s_0) \mathbf{r}_- - \Delta s_0 \mathbf{r}_-^* \quad (50)$$

根据作用力做功正交性定理和内积法则,转子振动一个周期内,间隙激振力所做的功为

$$W = \int_0^T \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} F_+ j r_+ d\theta -$$

$$\int_0^{2\pi} F_- j r_- d\theta = 2\pi s_{xy} [r_+^2 - r_-^2] \quad (51)$$

由式(51)可见,间隙激振力所做的功与轨迹所围的面积和反对称交叉刚度成正比。当正进动占优时,即 $|r_+| > |r_-|$ 时,则间隙激振力做正功, $W > 0$,反对称交叉刚度会使得转子失稳。

但对于支承各向异性的转子,当在水平与垂直临界转速之间运行时,即 $\omega_y < \Omega < \omega_x$ 时,反进动占优, $|r_-| > |r_+|$ 。此时,间隙激振力做负功, $W < 0$ 。这表明反对称交叉刚度将会抑制转子反进动失稳,发挥镇定作用。

上述2个示例说明,应用内积法则很容易求得激振力所做的功。其物理意义是,正进动作用力只会影响转子正进动的稳定性,而反进动作用力只影响转子反进动的稳定性,这为诊断转子故障提供了重要准则。

5 结 论

1) 介绍了转子进动分析的基本理论,提出并证明了转子运动轨迹所围面积的参数定理。利用轨迹面积的参数定理对文献[14]提出的转子进动面积定理进行了证明,证明了其普适性。同时,提出并证明了关于转子轨迹所围面积时不变特征的新定理。提出了复向量的内积法则,对证明文献[14]的做功正交定理更加简捷、清晰,并具有普适性。

2) 提出了关于转子进动轨迹的2个定理。定理1表明,转子进动的任一阶轨迹分量所围面积可直接由同阶频率成分构成的轨迹方程系数矩阵行列式求得。定理1虽起源于对转子进动轨迹的分析,但在数学上也给出了求解参数方程表达的任意椭圆面积的简捷方法。

3) 定理2证明,转子进动轨迹矢径在单位时间内所扫过的面积是恒定的,而与起始点无关。这表明,若转子进动轨迹为椭圆轨迹,即使转子恒速运转,则进动角速度仍是时变的。同时,提出了欧拉复向量的内积法则,即2个欧拉复向量的内积等于两个复向量的幅值与欧拉角之差的余弦之积,且符合交换律。

4) 利用2个定理和内积法则对转子进动理论进行了补充和完善,并给出了应用示例。结果表明,在转子的运动中,作用力所做的功关于转子的进动是正交的。

参 考 文 献

- [1] GASCH R, NORDMANN P, PFÜTZNER H. Rotordynamik[M]. Berlin: Springer, 2002:32-40.
 [2] 廖明夫. 航空发动机转子动力学[M]. 西安:西北工业

大学出版社,2015:68-74.

- [3] SHANMUGAM A, PADAMANABHAN C. A fixed-free interface component mode synthesis method for rotordynamic analysis[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 297(3):664-679.
 [4] GASCH R, PFÜTZNER H. Rotordynamik[M]. Berlin: Springer, 1975:22-28.
 [5] LIAO M, GASCH R. Crack detection in rotating shafts—an experimental study[C]//Institution of Mechanical engineers Conference Publications. [S. l.]: Medical Engineering Publication LTD, 1992.
 [6] GASCH R, LIAO M F. Verfahren zur frueherkennung eines Risses in einer rotierender welle: Germany, DE 4229340[P]. 1992-09-04.
 [7] GASCH R. A survey of the dynamic behavior of a simple rotating shaft with a transverse crack[J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 160(2):313-332.
 [8] 廖明夫. 裂纹转子动力学特性及其监测技术研究[D]. 西安:西北工业大学, 1995.
 [9] GASCH R, LIAO M F. Verfahren zur frueherkennung eines risses in einer rotierender welle: Europe, EP 0585623 B1[P]. 1996-12-27.
 [10] GASCH R, LIAO M F. Process for early detection of a crack in a rotating shaft: United States, 5533400 [P]. 1996-07-09.
 [11] 杨伸记, 廖明夫. 旋转机械状态监测与故障诊断系统[J]. 测控技术, 2000, 19(1):56-58.
 YANG Shengji, LIAO Mingfu. Computer aided monitoring and diagnosis system [J]. Measurement & Control Technology, 2000, 19(1):56-58. (in Chinese)
 [12] 廖明夫, ANDREAS E, MARKUS S. 一种识别支承各向异性的转子轴上裂纹的方法: 中国, ZL 95 115465.6 [P]. 2002-03-13.
 [13] 廖明夫, 邓小文. 诊断转子支座松动故障的一种新方法[J]. 振动、测试与诊断, 1999, 19(4):359-363.
 LIAO Mingfu, DENG Xiaowen. A new approach to diagnosing the loosening of support of a rotor [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnose, 1999, 19(4):359-363. (in Chinese)
 [14] 廖明夫, 汪玉, 谭大力. 转子进动分析的4个定理[J]. 航空动力学报, 2008, 23(2):281-285.
 LIAO Mingfu, WANG Yu, TAN Dali. 4 theorems on whirl transform of rotor vibration [J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(2):281-285. (in Chinese)



第一作者简介:廖明夫,男,1960年2月生,教授、博士生导师。主要研究方向为航空发动机结构动力学、发动机状态监测与故障诊断。曾发表《航空发动机高压转子的结构动力学设计方法》(《航空动力学报》2014年第29卷第7期)等论文。

E-mail: mfliao@nwpu.edu.cn