

# 齿轮粗糙界面时变啮合刚度算法与特性分析\*

吴嘉州, 肖会芳, 杨德斌  
(北京科技大学机械工程学院 北京, 100083)

**摘要** 基于粗糙界面的分形接触模型, 引入曲面接系数来表征齿轮在啮合过程中曲率和基体变形对啮合界面微凸体分布函数的影响, 提出了一种考虑齿轮啮合界面粗糙形貌的齿轮时变啮合刚度修正算法, 获得了表面形貌参数、材料特性参数和输入转矩对齿轮时变啮合刚度特性的影响规律。结果表明, 齿轮时变啮合刚度随着表面粗糙度的增大而减小, 随着材料强度和输入转矩递增。

**关键词** 齿轮时变啮合刚度; 分形理论; 粗糙形貌; 曲面接系数  
**中图分类号** TH132.41

## 引言

传动齿轮是航空、航海和风力发电等不可缺少的结构和功能部件。齿轮啮合界面是齿轮传动系统的工作界面, 其特征是相互啮合的轮齿具有粗糙形貌, 在接触区形成线接触。齿轮啮合界面的粗糙形貌直接影响传动系统的时变啮合刚度, 对系统的传动精度、啮合平稳性和可靠性具有决定性影响。

近年来, 齿轮时变啮合刚度的研究获得了广泛关注, 主要集中在不同故障类型、制造误差和运行工况等因素下齿轮啮合刚度建模与计算<sup>[1-3]</sup>。Xie 等<sup>[4]</sup>改进了齿轮基体变形刚度算法, 运用有限元验证了算法的准确性。文献[5-7]提出了考虑齿轮齿廓修形和基于齿根圆圆心所在位置的啮合刚度修正模型, 有效减小了啮合刚度的计算误差。文献[8-10]研究了含点蚀、剥落及裂纹等不同齿轮故障的啮合刚度模型及其对啮合刚度的影响规律。王旭等<sup>[11]</sup>建立了含裂纹故障的齿轮啮合刚度与动力学模型, 计算了正常和含裂纹时的啮合刚度与故障特征。Tang 等<sup>[12]</sup>提出了基于势能积分法的直齿轮与斜齿轮啮合刚度算法。以上研究都将齿轮接触界面简化为光滑曲面间的赫兹接触, 未考虑粗糙形貌等小尺度特征对接触刚度的影响。

同时, 表面粗糙形貌对齿轮接触特性的影响也引起了重视。Yang 等<sup>[13]</sup>基于改进的分形接触模型, 建立了考虑摩擦的渐开线弧面圆柱齿轮接触刚度计算模型。刘鹏等<sup>[14]</sup>建立了考虑摩擦因素的微线段齿

轮法向接触刚度模型, 分析了摩擦因数及接触形式对齿轮接触特性的影响。杨荣松等<sup>[15]</sup>提出了一种考虑摩擦因数的摆线针轮接触刚度模型。文献[16]采用有限元仿真分析与分形理论相结合的方法建立了考虑齿面粗糙的时变刚度计算模型, 其有限元模型按光滑齿面处理, 未考虑齿面形貌对载荷的影响。以上研究多为齿轮接触区的接触刚度、接触载荷与真实接触面积之间的关系分析, 未考虑接触刚度的变化及对齿轮时变啮合刚度的影响。

笔者基于粗糙表面分形接触模型, 提出了一种考虑齿轮啮合界面粗糙形貌的齿轮时变啮合刚度修正算法, 克服了目前基于光滑曲面赫兹接触模型计算齿面接触刚度而无法表征齿面粗糙形貌引起的小尺度扰动的缺点, 获得了啮合界面粗糙形貌、材料特性和输入转矩对齿轮时变啮合刚度特性的影响规律, 弥补了目前考虑粗糙形貌的齿轮接触模型未能获得表面形貌对齿轮时变啮合刚度影响特性的不足。该研究结果为齿轮系统啮合刚度和动力学响应的精准预测提供基础。

## 1 齿轮粗糙啮合界面的啮合刚度

### 1.1 齿轮时变啮合刚度

考虑轮齿啮合界面的粗糙表面形貌, 图 1 为齿轮啮合接触示意图。等效半径分别为  $\rho_1, \rho_2$  的主/从动轮在转矩  $T$  的作用下相互啮合, 产生垂直于接触表面的法向载荷  $F$ , 其方向与  $N_1, N_2$  方向一致。

\* 国家自然科学基金资助项目(51775037)  
收稿日期: 2020-09-07; 修回日期: 2021-03-16

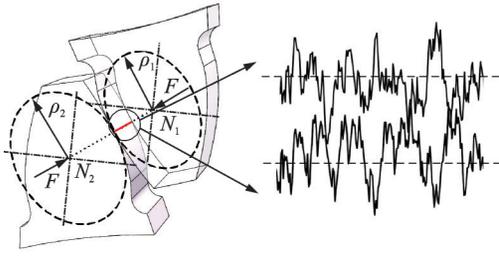


图1 齿轮啮合接触示意图

Fig.1 Schematic of gear meshing

在法向载荷  $F$  的作用下, 啮合轮齿发生弯曲、剪切和轴向压缩变形而分别产生弯曲刚度  $k_b$ 、剪切刚度  $k_s$  和轴向压缩刚度  $k_c$ 。同时, 齿轮基体部分也发生弹性形变, 产生齿轮基体变形刚度  $k_f$ 。此外, 轮齿啮合界面的粗糙微凸体相互作用, 引起粗糙微凸体产生变形, 且变形量随着啮合过程变化, 形成时变的啮合界面粗糙表面接触刚度  $k_h$ 。轮齿的总啮合刚度<sup>[5]</sup>表示为

$$k_{12} = 1 / \left[ \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{c1}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{c2}} + \frac{1}{k_{f2}} + \frac{1}{k_h} \right] \quad (1)$$

其中:  $k_{b1}$  和  $k_{b2}$  分别为主、从动轮弯曲刚度;  $k_{s1}$  和  $k_{s2}$  分别为主、从动轮剪切刚度;  $k_{c1}$  和  $k_{c2}$  分别为主、从动轮轴向压缩刚度;  $k_{f1}$  和  $k_{f2}$  分别为主、从动轮基体变形刚度。

$k_b$ 、 $k_s$  和  $k_c$  采用变截面悬臂梁模型计算, 表达式<sup>[11]</sup>分别为

$$\frac{1}{k_s} = \sum_{i=1}^n \frac{1.2e_i \cos^2 \alpha}{G_e \bar{A}_i} \quad (2)$$

$$\frac{1}{k_b} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\cos^2 \alpha (2e_i^3 + 3e_i^2 d_i)}{6E_e \bar{I}_i} + \frac{(d_i \cos^2 \alpha - h \cos \alpha \sin \alpha)(e_i^2 + 2e_i d_i)}{2E_e \bar{I}_i} \right] \quad (3)$$

$$\frac{1}{k_c} = \sum_{i=1}^n \frac{e_i \sin^2 \alpha}{E_e \bar{A}_i} \quad (4)$$

其中:  $e_i$  为微元截面宽度;  $h$  为载荷作用点半齿厚;  $d_i$  为载荷作用点到微元的距离;  $\alpha$  为载荷与齿厚方向夹角;  $E_e$  和  $G_e$  分别为等效弹性模量与剪切模量;  $\bar{I}_i$  和  $\bar{A}_i$  分别为等效截面模量与等效截面积<sup>[11]</sup>。

齿轮基体变形刚度  $k_f$  的表达式<sup>[3]</sup>为

$$k_f = 1 / \left\{ \frac{\cos^2 \beta}{WE_e} \left[ L^* \left( \frac{U_f}{S_f} \right)^2 + P^* (1 + Q^* \tan^2 \beta) + M^* \left( \frac{U_f}{S_f} \right) \right] \right\} \quad (5)$$

目前, 轮齿啮合界面的接触刚度  $k_h$  通常采用理想光滑圆柱体间的赫兹接触模型进行计算<sup>[7]</sup>, 即

$$k_h = \frac{F^{0.1} E_e^{0.8} W^{0.9}}{1.275} \quad (6)$$

式(6)显示, 轮齿啮合界面的接触刚度仅与齿宽和轮齿材料参数有关。然而, 实际的轮齿啮合界面在微观尺度上具有不同的表面形貌, 啮合界面为粗糙表面间的相互接触而非理想光滑接触。传统的接触刚度计算方法忽略了表面粗糙形貌对啮合刚度的影响, 导致其计算模型无法准确表征不同粗糙表面的啮合特性。

为了精确表征粗糙表面形貌对轮齿啮合刚度的影响, 基于粗糙界面的分形模型, 引入考虑啮合界面曲率和基体变形影响的曲面接触系数  $\lambda_c$ , 推导获得考虑粗糙表面形貌的轮齿啮合界面接触刚度。

## 1.2 粗糙表面形貌的齿轮啮合界面接触刚度

图2为粗糙表面接触模型。曲率半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  的两曲面接触可采用曲面与粗糙平面接触模型进行等效。轮齿啮合过程中, 具有一定分布特征的表面微凸体接触产生变形。

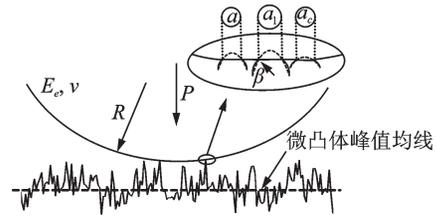


图2 粗糙表面接触模型

Fig. 2 Rough surface contact model

粗糙分形表面可以采用修正的 M-B 函数描述, 其表达式<sup>[17]</sup>为

$$Z(x) = G^{(D-1)} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n x)}{\gamma^{(2-D)n}} \quad (1 < D < 2) \quad (7)$$

其中:  $D$  为分形维数;  $G$  为分形粗糙度幅值;  $\gamma$  为缩放参数, 一般取  $\gamma = 1.5$ 。

表面分形维数  $D$  的物理意义是粗糙表面所占的空间程度大小,  $D$  值越大, 对应越密集的表面形态, 表面形貌越光滑。表面分形粗糙度幅值  $G$  是与频率无关的高度尺度参数,  $G$  值越大, 对应越粗糙的表面形貌。表面粗糙度  $R_a$  与分形维数  $D$  和粗糙度幅值  $G$  之间的关系<sup>[17]</sup>为

$$D = \frac{1.528}{R_a^{0.042}} \quad (8)$$

$$G = 10^{-\frac{5.26}{R_a^{0.042}}} \quad (9)$$

图3为不同分形维数下的表面轮廓。图3显示,对于相同的表面分形粗糙度幅值 $G$ ,增大分形维数 $D$ ,产生更光滑的表面形貌。

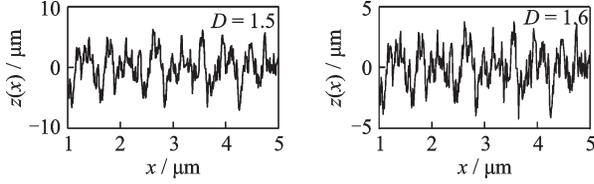


图3 不同分形维数下的表面轮廓

Fig.3 Surface profile with different fractal dimensions

### 1.2.1 单个微凸体接触刚度

图4为单个微凸体与刚性平面的接触示意图。假设粗糙体的形状为球体且各粗糙体的曲率半径均为 $\beta$ ,接触面积为 $a$ 。根据赫兹弹性接触理论,其法向接触刚度和载荷可分别表示为

$$k_n = \sqrt{2/\pi} E a^{1/2} \quad (10)$$

$$P_c(a) = 4\sqrt{\pi} E G^{D-1} a^{(3-D)/2}/3 \quad (11)$$

其中: $a$ 为单个微凸体接触面积; $E$ 为等效弹性模量, $1/E=(1-\nu^2)/E_1+(1-\nu^2)/E_2$ ; $E_1/E_2$ 为两齿轮弹性模量。

式(10)显示,弹性变形阶段,单个微凸体的接触刚度与接触面积呈非线性变化关系。

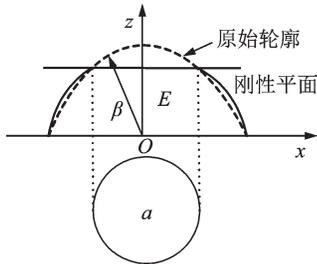


图4 单个微凸体与刚性平面接触

Fig.4 Geometry of single asperity contact

微凸体从塑性变形过渡到弹性变形的临界接触面积<sup>[17]</sup>为

$$a_c = \frac{G^2}{(k_\mu \phi/2)^{2/(D-1)}} \quad (12)$$

其中: $k_\mu$ 为齿轮硬度 $H$ 与屈服强度 $\sigma_y$ 的比值, $k_\mu=H/\sigma_y$ ; $\phi$ 为材料特性参数, $\phi=\sigma_y/E$ 。

当微凸体的接触面积小于临界接触面积时( $a_i < a_c$ ),齿轮接触面处于塑性变形状态,单个微凸体的塑性接触载荷可以表示为

$$P_p(a) = k_\mu \phi a \quad (13)$$

### 1.2.2 齿轮曲面接触界面粗糙微凸体分布函数

根据M-B接触模型,平面接触的表面微凸体分

布函数<sup>[13]</sup>为

$$n(a) = \frac{D}{2} a_i^{D/2} a^{-(D+2)/2} \quad (14)$$

其中: $a_i$ 为微凸体的最大接触面积。

对于齿轮曲面接触,啮合过程中啮合点等效曲率半径变化、曲面基体变形与微凸体接触相互影响,导致轮齿啮合曲面界面的粗糙微凸体分布函数发生改变。

为了表征啮合过程曲率和基体变形对轮齿啮合曲面界面微凸体分布函数的影响,引入曲面接触系数 $\lambda_c$ ,其表达式为

$$\lambda_c = \left[ \frac{\sqrt{4PWR_1R_2/\pi E(R_1+R_2)}}{\pi(R_1+R_2)} \right]^{(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})} \quad (15)$$

其中: $P$ 为单位线长度载荷; $R_1, R_2$ 为齿轮啮合点等效曲率半径。

式(15)显示,曲面接触系数 $\lambda_c$ 与接触点曲率半径、接触宽度、接触载荷及齿面材料相关。

考虑轮齿啮合界面啮合点曲率变化的齿轮接触曲面微凸体面积分布函数为

$$n'(a) = \frac{D}{2} \lambda_c \psi^{(2-D)/2} a_i^{D/2} a^{-(D+2)/2} \quad (16)$$

其中: $\psi$ 为域扩展因子。

$\psi$ 与 $D$ 存在以下关系<sup>[17]</sup>

$$\frac{\psi^{(2-D)/2} - (1 + \psi^{-D/2})^{-(2-D)/D}}{(2-D)/D} = 1 \quad (17)$$

### 1.2.3 齿轮啮合界面接触刚度

齿轮跑合实验结果显示:在跑合初期粗糙表面微凸体发生塑性变形,导致表面粗糙度和形貌发生改变;随着跑合时间增加,表面粗糙度和形貌特征逐渐趋于稳定<sup>[18]</sup>。因此,实际工作过程中经过跑合后,轮齿粗糙啮合界面微凸体塑性变形被消除,齿轮表面形貌趋于稳定,可以仅考虑界面的弹性接触。

轮齿啮合界面的弹性接触总刚度为

$$K_n = \int_{a_c}^{a_i} k_n n'(a) da \quad (18)$$

将式(10),(16)代入式(18),引入无量纲参数

$$K_n^* = \frac{K_n}{E\sqrt{A_a}}, A_r^* = \frac{A_r}{A_a}, a_{\mu c}^* = \frac{a_c}{A_a}, \text{则啮合界面无量纲法向刚度为}$$

量纲法向刚度为

$$K_n^* = \lambda_c \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{D^{\frac{2-D}{2}} (2-D)^{\frac{D}{2}}}{1-D} \psi^{\frac{(D-2)^2}{4}} A_r^{*\frac{D}{2}} \times \left[ \left( \frac{2-D}{D} \right)^{\frac{1-D}{2}} \psi^{\frac{-D^2+3D-2}{4}} A_r^{*\frac{1-D}{2}} - a_{\mu c}^{*\frac{1-D}{2}} \right] \quad (19)$$

其中: $A_r^*$ 为无量纲真实接触面积; $A_a$ 为名义接触面

积;  $A_r$  为真实接触面积;  $a_{\mu c}^*$  为无量纲临界接触面积。

式(19)表明, 轮齿啮合粗糙界面接触刚度与齿轮曲率半径、表面形貌和接触区材料等因素有关。

联立式(10)和式(15), 对微凸体面积分布函数积分, 得到啮合界面的无量纲法向载荷为

$$P_e^* = \frac{(P_n'(A_r^*) A_a E / \lambda_c)^{\frac{1}{1+\frac{1}{2}(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2})}}}{A_a E} \quad (20)$$

其中:  $P_n'(A_r^*)$  为粗糙平面无量纲法向接触载荷。

分以下 2 种情况:

1) 当  $D=1.5$  时

$$P_1'(A_r^*) = \sqrt{\pi} G^{*\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{16}} \left( \frac{A_r^*}{3} \right)^{\frac{3}{4}} \ln \left( \frac{A_r^*}{3\psi^{1/4} a_{\mu c}^*} \right) + \frac{3}{4} k_{\mu} \phi \psi^{\frac{1}{16}} \left( \frac{A_r^*}{3} \right)^{\frac{3}{4}} a_{\mu c}^{*\frac{1}{4}} \quad (21)$$

2) 当  $D \neq 1.5$  时

$$P_2'(A_r^*) = \frac{4\sqrt{\pi} G^{*D-1}}{3} g_2(D) \psi^{\frac{(D-2)^2}{4}} A_r^{*\frac{D}{2}} \times \left[ \left( \frac{(2-D)\psi^{\frac{(D-2)}{2}} A_r^*}{D} \right)^{\frac{3-2D}{2}} - a_{\mu c}^{*\frac{3-2D}{2}} \right] + k_{\mu} \phi g_3(D) \psi^{\frac{(D-2)^2}{4}} A_r^{*\frac{D}{2}} a_{\mu c}^{*\frac{2-2D}{2}} \quad (22)$$

$$g_2(D) = \frac{D}{3-2D} \left( \frac{2-D}{D} \right)^{\frac{D}{2}} \quad (23)$$

$$g_3(D) = \left( \frac{D}{2-D} \right)^{1-\frac{D}{2}} \quad (24)$$

其中:  $P_e^*$  为啮合轮齿无量纲法向载荷  $P_e^* = P / (A_a E)$ ;  $G^*$  为无量纲分形粗糙度幅值,  $G^* = G / \sqrt{A_a}$ 。

当  $a_i < a_c$  时, 接触区仅发生塑性变形, 即

$$P_p^* = k_{\mu} \phi A_r^* \quad (25)$$

式(19), (21)与式(22)表明,  $K_n^*$  与  $P_e^*$  均为  $A_r^*$  的函数。通过求解法获得啮合点真实接触面积, 即可获得啮合点接触刚度。

## 2 粗糙啮合界面的刚度变化特性

采用建立的考虑齿面粗糙形貌的轮齿啮合接触刚度算法, 分析不同表面粗糙形貌的啮合刚度变化特性。计算采用的齿轮粗糙度与对应分形参数如表 1 所示。计算采用的标准渐开线直齿轮参数如表 2 所示。材料屈服强度  $\sigma_y = 355 \text{ MPa}$ , 材料特性参数  $\phi = \sigma_y / E = 0.003$ , 扭矩  $T = 30 \text{ N}\cdot\text{m}$ , 转速  $n = 600 \text{ r/min}$ 。

表 1 齿轮粗糙度与对应分形参数

$R_a / \mu\text{m}$	$D$	$G / 10^{-11} \text{m}$
0.4	1.588	0.342
0.8	1.542	0.490
1.6	1.498	0.696
3.2	1.455	0.997
6.0	1.417	1.322

表 2 标准渐开线直齿轮参数<sup>[11]</sup>

参数	数值	参数	数值
主齿轮齿数	55	弹性模量/GPa	206
从齿轮齿数	75	齿宽/mm	20
模数/mm	2	压力角 $\alpha / (^\circ)$	20
压力角/ $^\circ$	20	密度/( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	7 800

### 2.1 曲面接触系数

图 5 为等效曲率半径随啮合角变化曲线。图 6 为曲面接触系数随啮合角变化曲线。可以看出: 主动轮等效曲率半径随着啮合角的增大而逐渐增大, 从动轮等效曲率半径随啮合角增大而逐渐减小; 曲面接触系数  $\lambda_c$  随主、从动轮等效曲率半径差值减小而增大, 最大值在主从动轮曲率半径差值最小处。

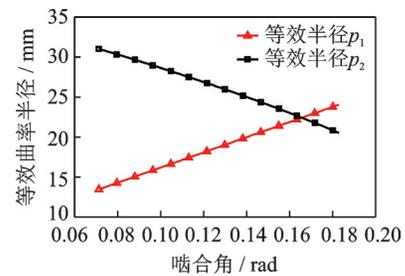


图 5 等效曲率半径随啮合角变化曲线

Fig.5 Variation of equivalent radius with meshing angel

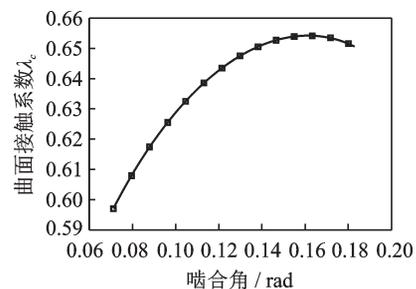


图 6 曲面接触系数随啮合角变化曲线

Fig.6 Curved surface contact coefficient with meshing angel

采用笔者建立的刚度模型,考虑粗糙形貌的齿面接触刚度与赫兹接触刚度对比如图7所示。齿轮的表面粗糙度为 $R_a=0.8\ \mu\text{m}$ 。赫兹接触模型计算获得的接触刚度为常值,不随啮合角的变化而变化。考虑粗糙表面形貌的啮合界面接触刚度随啮合角先增大后减小,且接触刚度小于赫兹接触模型的刚度计算结果。与图6对比可以看出,接触刚度曲线与曲面接触系数 $\lambda$ 的变化规律一致,表明曲面接触系数影响接触刚度的变化趋势。

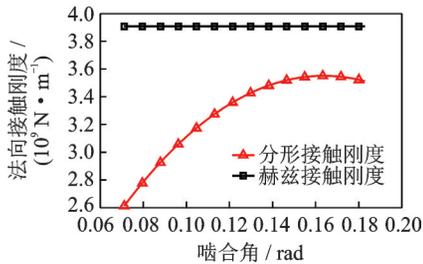


图7 考虑粗糙形貌的齿面接触刚度与赫兹接触刚度对比  
Fig.7 Comparison of gear rough surface contact stiffness with Hertzian contact stiffness

## 2.2 不同粗糙形貌参数

图8为不同表面粗糙度时啮合刚度曲线。可见,随着表面粗糙度 $R_a$ 增大,齿轮啮合刚度逐渐减小。与光滑表面计算结果相比,当表面粗糙度较小时( $R_a=0.4\ \mu\text{m}$ ),单齿啮合区和双齿区的啮合刚度相对偏差分别为 $0.13\times 10^8\ \text{N/m}$ 和 $0.22\times 10^8\ \text{N/m}$ 。当粗糙度较大时( $R_a=3.2\ \mu\text{m}$ ),单齿区和双齿区的啮合刚度相对偏差分别为 $0.99\times 10^8\ \text{N/m}$ 和 $1.62\times 10^8\ \text{N/m}$ 。随着表面粗糙度增大,接触区粗糙形貌对啮合刚度的影响已不能忽略。笔者建立的粗糙齿面刚度模型计算结果小于光滑赫兹接触模型计算结果,随着粗糙度减小,逐渐接近光滑接触结果。同时,啮合刚度随粗糙度增大而减小的规律与文献[16]的计算结果一致,验证了笔者所建立模型的准确性。

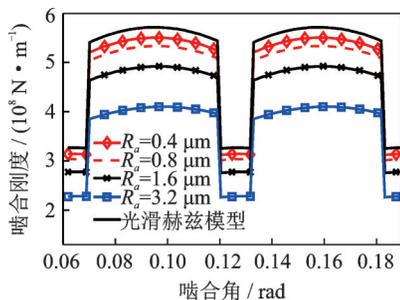


图8 不同表面粗糙度时啮合刚度曲线  
Fig.8 Meshing stiffness with different surface roughness

## 2.3 不同材料特性参数

图9为不同材料特性参数时啮合刚度曲线。参数为 $R_a=0.8\ \mu\text{m}$ , $T=30\ \text{N}\cdot\text{m}$ 。随着材料特性参数 $\phi$ 增大,齿轮啮合刚度增大。当材料特性参数 $\phi$ 从0.001增加到0.009时,单、双齿区的啮合刚度分别增加 $7.2\times 10^7\ \text{N/m}$ 和 $4.4\times 10^7\ \text{N/m}$ 。通过提高材料的屈服强度 $\sigma_y$ ,可提高齿轮的啮合刚度,与齿轮的表面强化措施一致。随着 $\phi$ 的增大,啮合刚度的增大幅度减小。

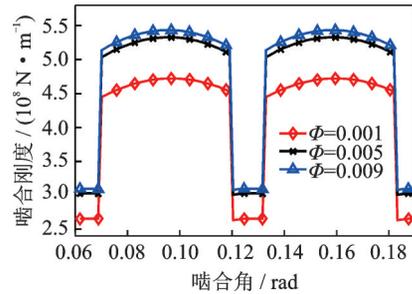


图9 不同材料特性参数时啮合刚度曲线  
Fig.9 Meshing stiffness with different material parameters

## 2.4 不同输入转矩

图10为不同输入转矩时啮合刚度曲线。参数为 $R_a=0.8\ \mu\text{m}$ , $\phi=0.003$ 。随着输入转矩增大,齿轮啮合刚度增大。当转矩从 $T=30\ \text{N}\cdot\text{m}$ 增大到 $T=130\ \text{N}\cdot\text{m}$ 时,单、双齿区的啮合刚度分别增加 $3.3\times 10^7\ \text{N/m}$ 和 $2.2\times 10^7\ \text{N/m}$ 。随着输入转矩的增大,啮合刚度增幅也逐渐减小。

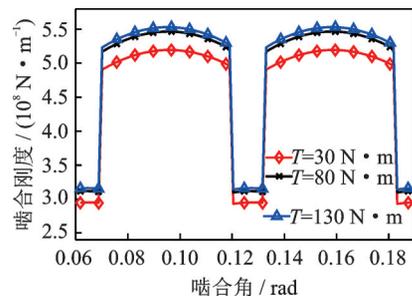


图10 不同输入转矩时啮合刚度曲线  
Fig.10 Meshing stiffness with different input torque

## 3 结论

1) 笔者基于粗糙表面的分形接触模型,引入曲面接触系数表征啮合曲面界面微凸体分布函数,提出了一种考虑啮合界面粗糙形貌的齿轮时变啮合刚度修正算法,获得了轮齿啮合表面粗糙形貌对齿轮啮合刚度的影响特性。

2) 曲面接触系数随着啮合角先增大后减小,最大值在主从动轮曲率半径差值最小处。

3) 轮齿啮合刚度随着表面粗糙度的增大而减小;随着材料特性参数和输入转矩的增大而递增,但增大幅度逐渐减小。

### 参 考 文 献

- [1] LIANG X H, ZHANG H S, ZUO M J, et al. Three new models for evaluation of standard involute spur gear mesh stiffness [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, 101: 424-434.
- [2] 林腾蛟, 赵子瑞, 江飞洋, 等. 考虑温度效应的斜齿轮时变啮合刚度解析算法[J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2020, 47(2): 6-13.  
LIN Tengjiao, ZHAO Zirui, JIANG Feiyang, et al. An analytic algorithm of time-varying mesh stiffness of helical gears considering temperature effect [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2020, 47(2): 6-13. (in Chinese)
- [3] CHEN Z G, ZHOU Z W, ZHAI W M, et al. Improved mesh stiffness calculation model of spur gear pair with tooth profile deviations [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2020, 149:103838.
- [4] XIE C Y, HUA L, LAN J, et al. Improved analytical models for mesh stiffness and load sharing ratio of spur gears considering structure coupling effect [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, 111: 331-347.
- [5] 万志国, 瞿艳阳, 曹宏瑞, 等. 时变啮合刚度算法修正与齿根裂纹动力学建模[J]. *机械工程学报*, 2013, 49(11):153-160.  
WAN Zhiguo, ZI Yanyang, CAO Hongrui, et al. Time-varying mesh stiffness algorithm correction and tooth crack dynamic modeling [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2013, 49(11):153-160. (in Chinese)
- [6] 张珂铭, 邵毅敏, 许晋, 等. 基于齿根圆角圆心所在位置的时变啮合刚度修正模型[J]. *振动与冲击*, 2019, 38(1): 229-237, 257.  
ZHANG Keming, SHAO Yimin, XU Jin, et al. A modified model for time-varying meshing stiffness based on location of tooth root fillet's center [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(1): 229-237, 257. (in Chinese)
- [7] SUN Y N, MA H, HUANGFU Y F, et al. A revised time-varying mesh stiffness model of spur gear pairs with tooth modifications [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2018, 129: 261-278.
- [8] CHEN T Y, WANG Y X, CHEN Z G. A novel distribution model of multiple teeth pits for evaluating time-varying mesh stiffness of external spur gears [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 129: 479-501.
- [9] LUO Y, BADDOUR N, LIANG M. A shape-independent approach to modelling gear tooth spalls for time varying mesh stiffness evaluation of a spur gear pair [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 120: 836-852.
- [10] CHEN Z G, ZHAI W M, SHAO Y M, et al. Analytical model for mesh stiffness calculation of spur gear pair with non-uniformly distributed tooth root crack [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2016, 66: 502-514.
- [11] 王旭, 伍星, 肖正明, 等. 含裂纹故障的齿轮系统动力学特性研究及其故障特征分析[J]. *振动与冲击*, 2017, 36(9): 74-79, 137.  
WANG Xu, WU Xing, XIAO Zhengming, et al. Dynamic characteristics of a gear system with crack fault and its fault feature analysis [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(9): 74-79, 137. (in Chinese)
- [12] TANG X L, ZOU L, YANG W, et al. Novel mathematical modelling methods of comprehensive mesh stiffness for spur and helical gears [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, 64: 524-540.
- [13] YANG W, LI H, MA D Q, et al. Sliding friction contact stiffness model of involute arc cylindrical gear based on fractal theory [J]. *International Journal of Engineering*, 2017, 30(1): 109-119.
- [14] 刘鹏, 赵韩, 黄康, 等. 线段齿轮法向接触刚度的改进分形模型研究[J]. *机械工程学报*, 2018, 54(7): 114-122.  
LIU Peng, ZHAO Han, HUANG Kang, et al. Research on normal contact stiffness of micro-segments gear based on improved fractal model [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 54(7): 114-122. (in Chinese)
- [15] 杨荣松, 张益铭, 孙少强. 分形理论模型的摆线针轮的接触刚度研究[J]. *工程科学与技术*, 2020, 52(1): 126-133.  
YANG Rongsong, ZHANG Yiming, SUN Shaoqiang. Research on contact stiffness of cycloid needle wheel based on fractal theory model [J]. *Advanced Engineering Sciences*, 2020, 52(1):126-133. (in Chinese)
- [16] ZHANG T, BI S X, LIU Z F, et al. Time-varying stiffness model of spur gear considering the effect of surface morphology characteristics [J]. *Journal of Process Mechanical Engineering*, 2019, 233(2): 242-253.
- [17] 葛世荣, 朱华. 摩擦学的分形[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005:159-164.
- [18] AKBARZADEH S, KHONSARI M M. Experimental and theoretical investigation of running-in [J]. *Tribology International*, 2011, 44(2): 92-100.



**第一作者简介:**吴嘉州,男,1995年6月生,硕士生。主要研究方向为齿轮动力学。

E-mail:18813055198@163.com

**通信作者简介:**肖会芳,女,1984年12月生,博士,副教授。主要研究方向为机械结构界面接触动力学。

E-mail: huifangxiao@ustb.edu.cn