

# 基于准静态挠度曲面的桥梁无模型损伤定位\*

方圣恩<sup>1,2</sup>, 黄继源<sup>1</sup>

(1. 福州大学土木工程学院 福州, 350108)

(2. 福州大学土木工程防震减灾信息化国家地方联合工程研究中心 福州, 350108)

**摘要** 为简化损伤识别流程,避免动力模型修正的复杂性,首先,将挠度曲线和位移影响线相结合,针对移动荷载作用下的中小跨径桥梁结构提出准静态挠度曲面的概念;其次,基于虚功原理推导挠度曲面的解析表达式,并给出实际应用时的矩阵表达方式;然后,以简支梁和连续箱梁桥为例,提出采用梁损伤前后的挠度曲面差来定位损伤;最后,对一变截面连续箱梁桥的上部结构模型进行静力加载,通过实测挠度数据构建箱梁桥损伤前后的挠度曲面,根据挠度曲面差实现对损伤的定位。结果表明:所提出方法对变截面箱梁同样适用,损伤定位只需根据结构损伤前后的实测挠度数据;挠度差曲面的峰值对应于损伤位置,峰值高低一定程度上体现了损伤程度的变化。

**关键词** 损伤定位;静力移动荷载;准静态挠度曲面;挠度曲面差;连续箱梁桥模型

**中图分类号** U446;U447

## 引言

桥梁结构经过长期运营后必然发生性能退化和损伤,存在安全隐患,有必要通过健康监测系统实时评估桥梁的安全状态<sup>[1]</sup>。损伤识别是桥梁监测系统的核心功能之一<sup>[2]</sup>,可以及时发现并定位桥梁由于外部因素或自身缺陷所造成的损伤,以便及时维修和加固,延长桥梁的使用寿命<sup>[3-4]</sup>。常见的桥梁损伤识别方法一般基于振动测试数据<sup>[5]</sup>,通过时域信号或频域信息构建目标函数,再基于模型修正和优化算法实现对结构参数的识别<sup>[6]</sup>。时域方面,可以采用小波变换<sup>[7]</sup>或将小波包分解和重构信号的样本熵相结合的方式<sup>[8]</sup>,构建损伤指标;频域方面,可以基于模态分析获取桥梁结构的频率<sup>[9]</sup>、振型<sup>[10]</sup>及二者衍生的模态柔度<sup>[11-12]</sup>,或直接根据频率响应函数建立损伤判别方法<sup>[13]</sup>。实际工程中振动信号容易受到测试噪声和环境因素的影响,使得基于振动的损伤识别方法难以有效应用。同时对复杂结构而言,模型修正过程容易碰到病态矩阵导致难以收敛,或反向优化求解工作量大等问题。相对于动力响应来说,静力测试数据受环境和噪声的影响相对小,测试结果比较稳定,因此基于静力数据如挠度和转角的损伤识别方法也获得了关注<sup>[14-17]</sup>。

土木工程实践中,挠度曲线和位移影响线常用于分析静态或准静态荷载作用下结构的位移响应。

可以结合挠度曲线样条插值和应变能损伤定位指标来判断可能损伤的单元<sup>[15]</sup>,或利用挠度影响线的一、二阶导数(曲率)来识别损伤,常通过中心差分法来计算导数<sup>[17]</sup>。采用桥梁损伤前后挠度影响线变化作为指标,基于多影响线信息融合来增强损伤定位的准确性<sup>[18]</sup>。此外,根据截面转角测量结果,通过桥梁损伤前后的转角影响线差来识别损伤<sup>[16]</sup>,可以仅在桥梁前后端布设测点<sup>[19]</sup>。实际应用时挠度影响线的导数对测试和环境噪声极为敏感,数据的微小扰动都会对识别结果造成显著影响,同时转角测试难度大,精度难以保证,因此亟需提出更可靠的静力损伤识别方法。

考虑到成本因素,结构健康监测系统往往布设于大跨径桥梁。笔者针对中小跨径桥梁的损伤识别,首先,把桥梁上移动的车辆荷载简化为准静态荷载,不考虑惯性力效应;其次,将挠度曲线和挠度影响线相结合,提出一种准静态挠度曲面(后文简述为挠度曲面)的概念,本质是桥梁上所有测点在移动荷载作用下的影响线集合,也包括荷载分别作用在每个测点上所得到的挠度曲线集合;然后,通过虚功原理推导了挠度曲面的分段解析表达式;最后,对桥梁损伤前后的实测挠度曲面做差,得到挠度曲面差,以此判断损伤位置。所提出的方法力学概念清晰,使

\* 国家自然科学基金面上资助项目(51578158);福州大学“旗山学者”奖励支持计划资助项目(XRC-1688)

收稿日期:2020-05-14;修回日期:2020-06-05

用方便,无需结构的有限元模型,是一种无模型的损伤定位方法。

### 1 准静态挠度曲面

#### 1.1 挠度曲面解析表达式

桥梁上车辆荷载的轴重可以认为是施加于桥面板的集中荷载,沿着桥梁纵向移动。笔者以单跨等截面简支梁为例(见图 1),利用虚功原理中的单位荷载法<sup>[20]</sup>,将简支梁在移动集中荷载  $P$  作用下的挠度求解过程进行简化,并结合图乘法进行计算。

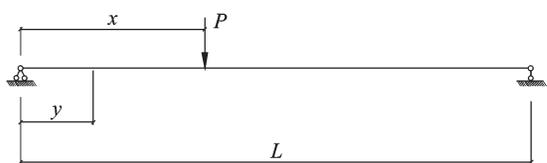


图 1 单跨简支梁计算简图

Fig.1 Calculation diagram of a single-span simply supported beam

图 1 中: $x,y$  分别表示  $P$  与梁上某截面到左支座中心的距离, $L$  为简支梁计算长度。桥梁上部结构一般处于弹性工作状态,类似欧拉-伯努利梁,此时弯矩对挠度的贡献占主要地位,可以忽略剪力和轴力的影响。因此,应用虚功原理计算挠度时只考虑弯矩引起的挠度。

根据图 1 绘制  $P$  和虚拟单位力  $\bar{P}=1$  作用下的弯矩图  $M_p$  和  $\bar{M}$ ,如图 2 所示。得到弯矩图的分段函数表达式为

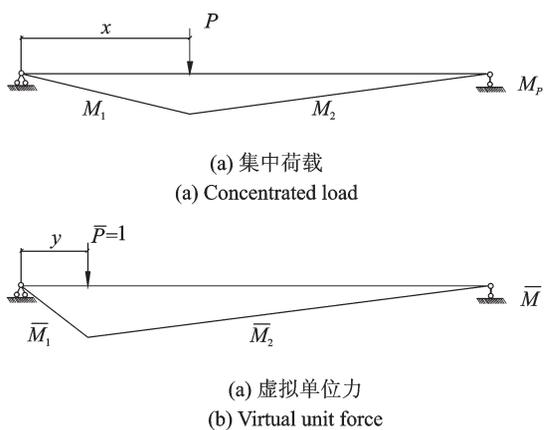


图 2 集中荷载和虚拟单位力作用下的简支梁弯矩图  
Fig.2 Bending moment diagram of the simply supported beam under a concentrated load or a virtual unit force

$$M_p = \begin{cases} M_1 = \frac{P(L-x)s}{L} & (0 \leq s \leq x) \\ M_2 = \frac{Px(L-s)}{L} & (x \leq s \leq L) \end{cases} \quad (1)$$

$$\bar{M} = \begin{cases} \bar{M}_1 = \frac{(L-y)s}{L} & (0 \leq s \leq y) \\ \bar{M}_2 = \frac{y(L-s)}{L} & (y \leq s \leq L) \end{cases} \quad (2)$$

挠度曲面  $\Delta_p(x,y)$  的表达式为

$$\Delta_p(x,y) = \frac{1}{EI} \int M_p(x) \bar{M}(y) ds \quad (3)$$

其中: $E$  为弹性模量; $I$  为截面惯性矩。

按照  $x,y$  的坐标位置关系,可将  $\Delta_p(x,y)$  分为两个部分,并将式(1)、式(2)代入式(3),结合图乘法得到无损梁的  $\Delta_p(x,y)$  表达式为

$$\Delta_p(x,y) = \begin{cases} \frac{yP(x-L)(y^2+x^2-2Lx)}{6EIL} & (0 \leq y \leq x \leq L) \\ \frac{xP(y-L)(y^2-2Ly+x^2)}{6EIL} & (0 \leq x \leq y \leq L) \end{cases} \quad (4)$$

由式(4)可知,挠度曲面上任意一点  $(x_0,y_0)$  表示  $P$  作用于  $x_0$  位置时, $y_0$  位置产生的挠度。同时  $x,y$  具有交换对称性,即二元函数  $\Delta_p(x,y)$  的三维曲面图是关于  $x=y$  坐标平面对称的。例如,假设梁的参数与外荷载为  $E=200 \text{ GPa}, I=2.04 \times 10^{-8} \text{ m}^4, L=2 \text{ m}, P=1 \text{ kN}$ ,对应的挠度曲面如图 3 所示。由图可见,无损简支梁的三维挠度曲面关于  $x=y$  坐标平面呈对称。

#### 1.2 挠度曲面差

仍以图 1 简支梁为例,若梁上距离左支座 48 cm 处存在损伤,损伤梁段长度为 2 cm,抗弯刚度  $EI$  降低 25% (采用  $E$  降低模拟,比如  $E'=150 \text{ GPa}$ ),此时  $M_p$  和  $\bar{M}$  如图 4 所示。

为求解梁上任意一点(截面)的挠度值,根据实际荷载  $P$ 、虚拟单位力  $\bar{P}=1$  和损伤的位置关系,将式(3)积分曲面分为图 5 所示的 12 个部分。

由于简支梁为静定结构,局部刚度的改变不会引起内力重分布,因此计算损伤梁的挠度仍可沿用无损梁的弯矩图,只是积分计算过程中需要考虑损伤和完好梁段的弹性模量不同,进行分段积分。因此,分别对图 5 每个区域进行积分,损伤后的  $\Delta_p(x,y)$  表达式包含有 12 个部分。将梁参数与荷载信息代入表达式,将其与无损梁的挠度曲面做差,

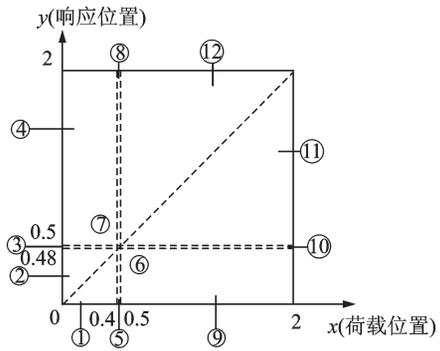
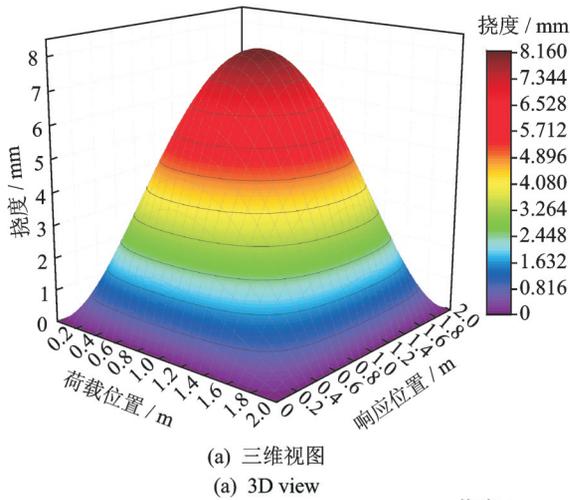


图 5 简支梁损伤后挠度曲面函数积分区域(单位:m)

Fig.5 Domain of integration of deflection surface formula of the damaged simply supported beam (unit:m)

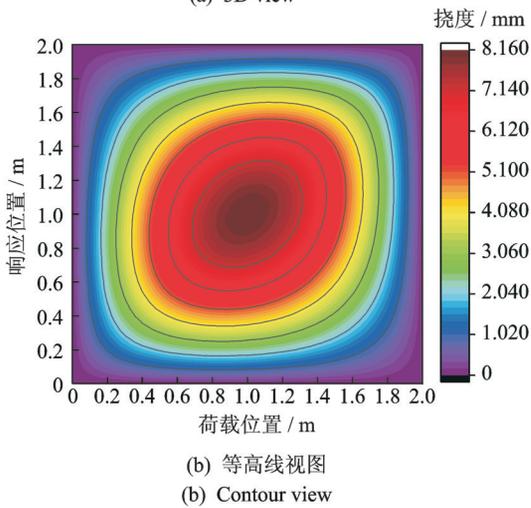


图 3 单跨简支梁挠度曲面

Fig.3 Deflection surface of the single-span simply supported beam

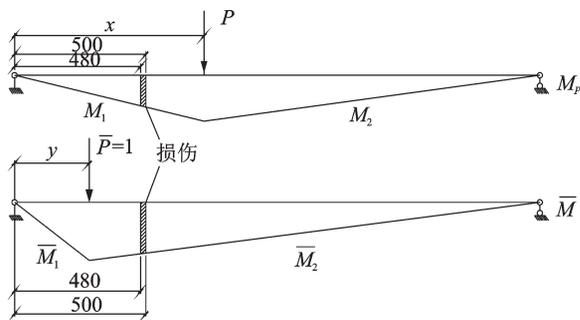


图 4 简支梁损伤后弯矩图(单位:mm)

Fig.4 Bending moment diagrams of the damaged simply supported beam (unit:mm)

即得到挠度曲面差  $\tilde{\Delta}_P$  如图 6 所示。

相同荷载作用下,损伤梁各截面的挠度值都会变大,但幅度不同。挠度测试截面的位置、加载位置与损伤越近,挠度增幅就越大。图 6 中挠度曲面差三维图上形成了一个尖峰,处于坐标(0.5, 0.5)位置,与假设损伤的位置相同,验证了挠度曲面差可以用于损伤

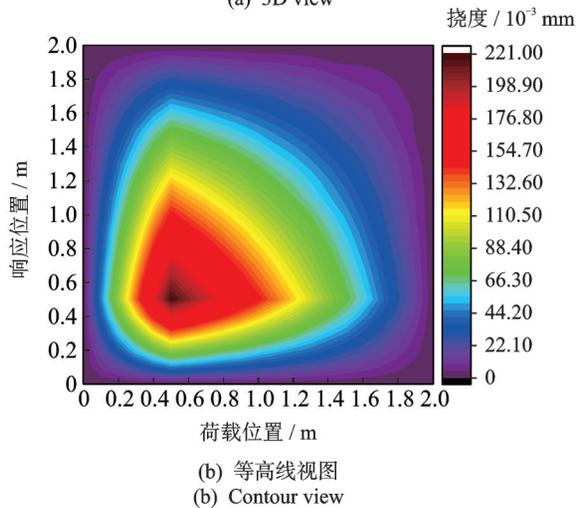
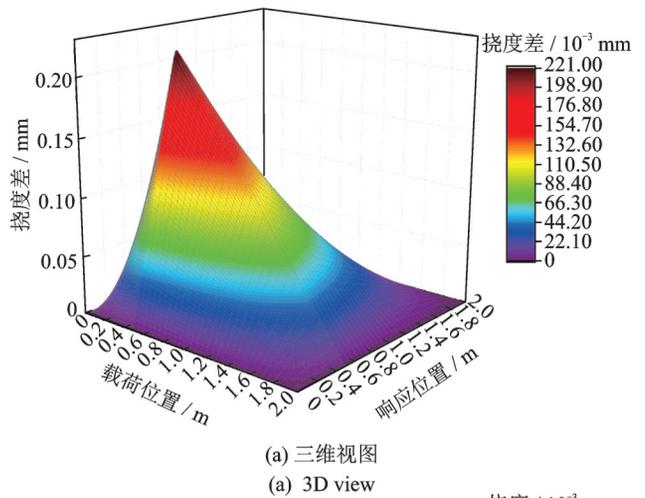


图 6 简支梁挠度曲面差(解析形式)

Fig.6 Difference of deflection surfaces of the simply supported beam (analytical form)

定位。进一步来说,荷载  $P$  沿梁纵向移动,当  $P$  位于损伤处时,发生的挠度差最大,差值依次向梁端支座递减,说明梁上各点的位移影响线和挠度曲线对损伤的敏感度不同,且敏感度与损伤的位置有关,这有利于损伤定位。

### 1.3 挠度曲面的矩阵表示

实际工程上的桥型往往更复杂,难以通过理论推导获取式(4)所示的解析解,构建连续曲面。此外,考虑测试难度和成本因素,通常只能布设一定数目的挠度测点,因此可以采用矩阵形式来表示挠度曲面。不失一般性,此时无需建立桥梁的有限元模型或力学模型,只须对无损和损伤桥梁进行移动荷载加载,并记录测试点截面的挠度,比起解析解来说更为实用和方便。若需要更光滑的挠度曲面,只须增加测点数目即可。

比如将图 1 简支梁划分为 20 梁段,布设 21 个测点(1 和 21 号点为支座处,竖向挠度恒为 0),如图 7 所示。分别求得无损和损伤梁在移动荷载  $P$  作用下的挠度值,组成  $21 \times 21$  阶的挠度矩阵。对损伤前后的挠度矩阵做差,得到挠度矩阵差,也为一个同维度矩阵。由于挠度矩阵中每个元素都包含有挠度测试位置与荷载位置信息,因此可以采用挠度矩阵差来绘制挠度曲面差,如图 8 所示。

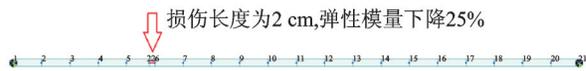


图 7 单跨简支梁梁段划分和测点布设

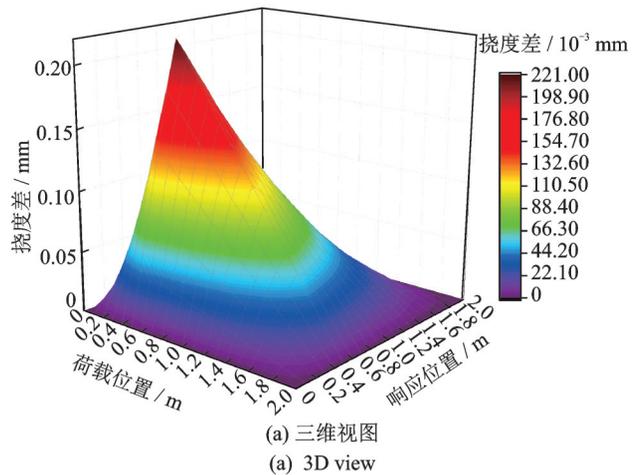
Fig.7 Beam segment layout and measurement points of the single-span simply supported beam

对比图 7、图 8 可见,两个挠度曲面差一致,图 8 曲面尖峰的位置仍位于坐标(0.5, 0.5)处,与解析法的结果相同,说明了采用挠度矩阵表示挠度曲面的可行性。

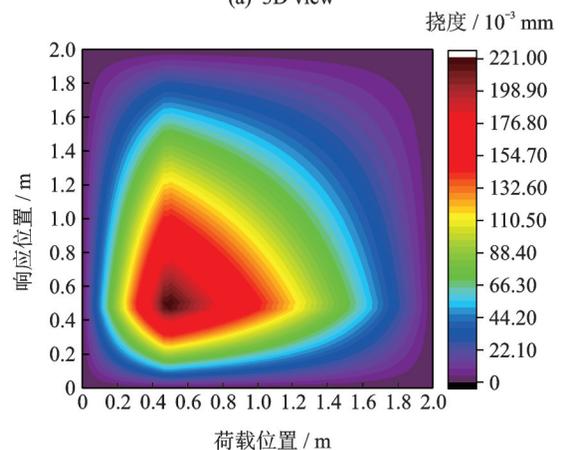
## 2 连续箱梁桥挠度曲面差

对于更复杂的桥梁形式,可以采用 1.3 节所述的挠度矩阵来绘制挠度曲面,本节采用有限元模拟建立桥梁中常见的连续变截面箱梁桥的上部结构模型(见图 9),研究挠度曲面差损伤定位的可行性。

该箱梁桥的上部结构模型计算长度为 2 m,沿纵向共划分 22 个梁段(单元),共设有 21 个测点,荷载  $P=200$  N 沿着测点依次移动。梁材料弹性模量为 2.75 GPa,密度为 1 200 kg/m<sup>3</sup>,截面几何尺寸见第 3 节试验部分。假设单损伤和双损伤两个工况,位于 [0.3, 0.4] m 和 [1.6, 1.7] m 区域,损伤梁段(单元)的弹性模量降低 25%。通过有限元计算得到无损梁和损伤梁的各截面挠度,构建挠度矩阵并做差,进而绘制挠度曲面差,如图 10 所示。由图可见,不论是单损伤还是双损伤工况,挠度曲面差的峰值位



(a) 三维视图  
(a) 3D view



(b) 等高线视图  
(b) Contour view

图 8 简支梁挠度曲面差(矩阵形式)

Fig.8 Difference of deflection surfaces of the simply supported beam (matrix form)

置均处于设定的梁段,说明挠度曲面差同样可以对变截面箱梁桥进行损伤定位。

由图 10 还可发现,连续梁结构与简支梁不同,当移动荷载作用在前者的某一跨时,会在该跨的挠度曲面上形成一个峰,同时相邻跨的挠度曲面上生成一个谷。这是由于荷载作用跨的挠度是向下的,相邻跨会产生一个向上的反拱变形,即负挠度现象(挠度以向下为正)。与简支梁相同的是,当荷载作用在损伤处时,会使此处梁截面的挠度变大,挠度差以此截面为中心向两侧支座发生递减,同时损伤越严重,则峰越高,谷越深。

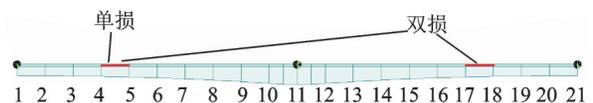


图 9 两跨变截面连续箱梁桥上部结构有限元模型

Fig.9 Finite element model of the superstructure of a two-span variable cross-section continuous box girder bridge

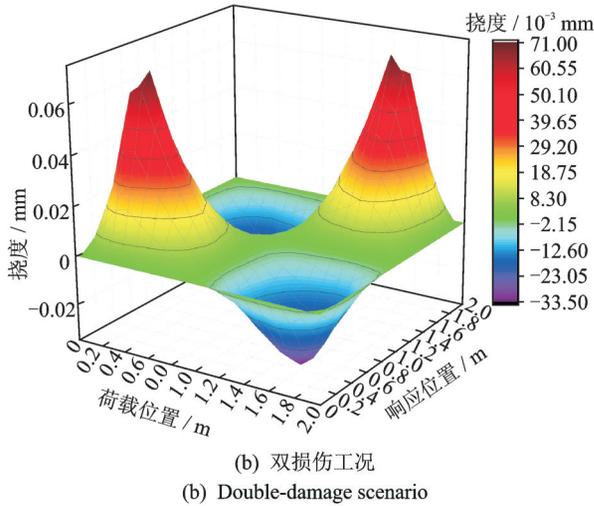
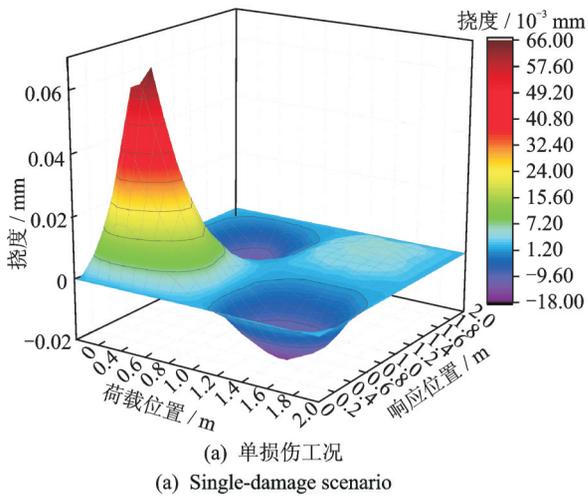


图10 变截面连续箱梁桥挠度曲面差

Fig.10 Difference of deflection surfaces of the variable cross-section continuous box girder bridge

### 3 试验验证

#### 3.1 变截面连续箱梁桥模型

笔者采用有机玻璃制作了一个变截面连续箱梁桥上部结构的模型,并进行了静载试验。两跨箱梁计算长度为2 m,每跨包含0.85 m的变截面段(改变腹板高度),立面线形为二次抛物线(见图11)。有机玻璃材料的弹性模量为2.75 GPa,密度为1 200 kg/m<sup>3</sup>。沿梁长方向每0.2 m布置1个测点,共8个挠度测点,测点下布设位移计,此时3个支座测点的挠度默认为0,无需布设位移计。采用钢棒加重物(约108 N)方式模拟集中荷载,按测点顺序依次移动加载,每个荷载步下记录所有位移计的示数,作为各梁截面的挠度,然后将获得的挠度数据按照加载次序和测点位置次序排列成矩阵形式,挠度矩阵包含了支座的0挠度值数据,进而绘制挠度曲面,完成

一次完整的试验流程。根据完好梁和损伤梁的挠度曲面矩阵,计算得到挠度曲面差。

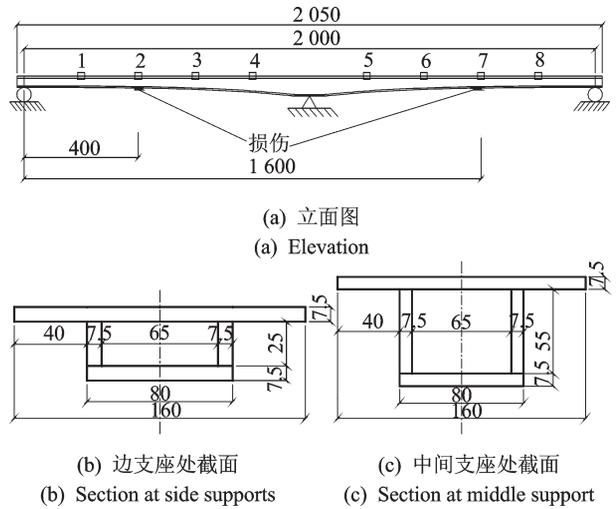


图11 变截面连续箱梁桥上部结构模型(单位:mm)

Fig.11 Superstructure model of a variable cross-section continuous box girder bridge (unit:mm)

该梁采用切割梁底板的方式模拟损伤,如图12所示。共设置3个损伤工况:①单损伤,将2号测点处梁底板厚度削弱1.5 mm,宽度为底板全宽,长度为沿箱梁桥模型纵向20 mm;②将2号测点处梁底板厚度进一步削弱到4.0 mm,宽度和长度保持不变;③模拟双损伤,进一步将7号测点处梁底板厚度削弱4.0 mm,宽度仍为底板全宽,长度为沿箱梁桥模型纵向20 mm。



图12 变截面连续箱梁桥模型试验和损伤切口

Fig.12 Experiment of the variable cross-section continuous box girder bridge model with the damage notch

变截面连续梁的挠度曲面差如图13所示,前2个工况挠度曲面差的峰值都出现在0.4 m坐标处,且峰值随着底板削弱厚度的增加而升高,直观体现了损伤程度的增加,即挠度曲面差可以根据峰值的高低来判断损伤的程度。工况3时发现1.6 m坐标处出现了新的峰值,说明双损伤情况得到了很好的识别。综上所述,本研究方法很好地定位了3种损

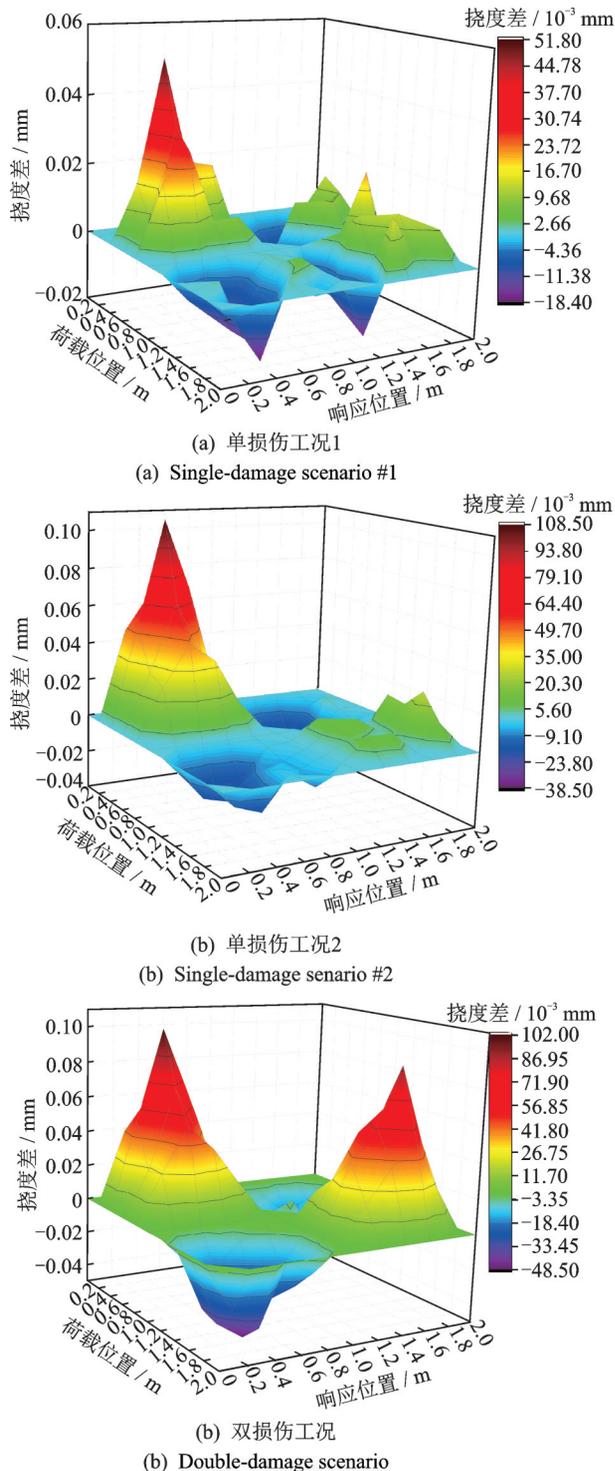


图13 变截面连续箱梁桥模型挠度曲面差

Fig.13 Difference of deflection surfaces of the variable cross-section continuous box girder bridge model

伤工况的梁底切口位置,特别是损伤定位过程无需建立结构的有限元模型,是一种无模型识别方法,非常便于工程实际应用。

### 3.2 结果讨论

由数值和试验模型算例可见,损伤的存在均会

导致简支梁和连续梁结构的挠度曲面差生成峰,峰的坐标对应了损伤的位置,峰的个数也代表了损伤数目,且峰值随着损伤程度的增加而增加,如图13(a,b)所示。

对试验箱梁桥模型的单损伤情况而言,由于测试误差的存在,完好跨的挠度曲面上也可能产生许多小的局部峰值,但远小于损伤所导致的峰值,不影响对损伤的整体判断。

此外,试验箱梁桥模型为了更贴近实际工程中传感器数目有限的情况,测点数目比数值箱梁桥少一半,但并不影响损伤定位的效果,说明本方法具有较好的鲁棒性。现实中为了得到更光滑的挠度曲面,在布设难度和测试成本允许的情况下,增加桥梁的测点数目,有助于实现更好的判别。

## 4 结论

1) 对梁式桥来说,桥梁形式(简支、连续)和截面形状(等截面、变截面)不影响本研究方法的识别效果,且识别过程无需建立桥梁有限元模型,属于一种正向求解方法,避免了如模型修正所需的反问题求解过程,极大地方便了实际工程应用。

2) 通过挠度差曲面的峰值位置可以准确判断损伤的位置,峰值高低也一定程度体现了损伤程度。

3) 挠度曲面的构建采用静力挠度数据,对测点数目具有一定鲁棒性,但实际应用时为获得更好的曲面形状和识别精度,可以增设挠度测点。

## 参 考 文 献

- [1] WENZEL H. Health monitoring of bridges[M]. United Kingdom: John Wiley & Sons Ltd., 2009:7-18.
- [2] FARRAR C R, WORDEN K. An introduction to structural health monitoring [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A, 2007, 365: 303-315.
- [3] 吴向男,徐岳,梁鹏,等.桥梁结构损伤识别研究现状与展望[J].长安大学学报(自然科学版),2013,33(6): 49-58.  
WU Xiangnan, XU Yue, LIANG Peng, et al. Research status and prospect of bridge structure damage identification[J]. Journal of Chang'an University (Natural Science Edition), 2013,33(6):49-58. (in Chinese)
- [4] 刘景良,高源,廖飞宇,等.移动荷载作用下时变简支钢桥损伤识别[J].振动、测试与诊断,2020,40(1): 12-19.  
LIU Jingliang, GAO Yuan, LIAO Feiyu, et al. Dam-

- age detection of a time-varying simply supported steel bridge under moving load [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2020, 40(1):12-19. (in Chinese)
- [5] MAGALHÃES F, CUNHA A, CAETANO E. Vibration based structural health monitoring of an arch bridge: from automated OMA to damage detection [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, 28: 212-228.
- [6] FANG S E, PERERA R. Damage identification by response surface based model updating using D-optimal design [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, 25(2):717-733.
- [7] HESTER D, GONZÁLEZ A. A wavelet-based damage detection algorithm based on bridge acceleration response to a vehicle [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, 28:145-166.
- [8] 孙增寿, 李晓鹏, 韩培琰, 等. 基于小波包样本熵的连续梁桥损伤识别 [J]. *振动、测试与诊断*, 2018, 38(5): 916-921.  
SUN Zengshou, LI Xiaopeng, HAN Peiyan, et al. Damage identification for continuous girder bridge based on wavelet packet sample entropy [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2018, 38(5): 916-921. (in Chinese)
- [9] MAAS S, ZÜRBE S A, WALDMANN D, et al. Damage assessment of concrete structures through dynamic testing methods, part 2: bridge tests [J]. *Engineering Structures*, 2012, 34:483-494.
- [10] WICKRAMASINGHE W R, THAMBIRATNAM D P, CHAN T H T, et al. Vibration characteristics and damage detection in a suspension bridge [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 375:254-274.
- [11] WICKRAMASINGHE W R, THAMBIRATNAM D P, CHAN T H T. Damage detection in a suspension bridge using modal flexibility method [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2020, 107: 104194.
- [12] 唐盛华, 周楠, 方志, 等. 基于振型加权模态柔度的梁桥损伤识别方法 [J]. *地震工程与工程振动*, 2017, 37(6):98-106.  
TANG Shenghua, ZHOU Nan, FANG Zhi, et al. Damage identification method for beam bridge based on mode shape weighted modal flexibility [J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2017, 37(6): 98-106. (in Chinese)
- [13] DILENA M, LIMONGELLI M P, MORASSI A. Damage localization in bridges via the FRF interpolation method [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2015(52/53):162-180.
- [14] REN W X, FANG S E, DENG M Y. Response surface based finite element model updating using structural static responses [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 2011, 137(4):248-257.
- [15] 欧阳煜, 徐超, 杨万锋. 基于静力挠度的梁结构损伤识别两阶段方法 [J]. *力学季刊*, 2017, 38(3):458-467.  
OUYANG Yu, XU Chao, YANG Wanfeng. A two-stage method for beam damage identification based on static deflection [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2017, 38(3):458-467. (in Chinese)
- [16] HUSEYNOV F, KIM C, OBRIEN E J, et al. Bridge damage detection using rotation measurements-experimental validation [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 1351: 106380.
- [17] 杜永峰, 刘云帅, 王晓琴. 基于挠度差值影响线曲率的简支梁桥损伤识别 [J]. *桥梁建设*, 2009(4):84-87.  
DU Yongfeng, LIU Yunshuai, WANG Xiaoqin. Damage identification of simply-supported beam bridges based on influence line curvature of deflection differential values [J]. *Bridge Construction*, 2009(4): 84-87. (in Chinese)
- [18] 陈志为, 杨维彪, 程棋锋, 等. 基于桥梁影响线的损伤识别方法及其试验验证 [J]. *武汉理工大学学报*, 2017(5):69-73,88.  
CHEN Zhiwei, YANG Weibiao, CHENG Qifeng, et al. Influence line-based damage detection method and experimental verification [J]. *Journal of Wuhan University of Technology*, 2017(5):69-73,88. (in Chinese)
- [19] ALAMDARI M M, KILDASHTI, K, SAMALI B, et al. Damage diagnosis in bridge structures using rotation influence line: validation on a cable-stayed bridge [J]. *Engineering Structures*, 2019, 185:1-14.
- [20] 龙驭球, 包世华, 袁驷. *结构力学* [M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2018:130-160.



**第一作者简介:**方圣恩,男,1980年8月生,博士、教授。主要研究方向为结构健康监测。曾发表《Probabilistic damage identification incorporating approximate Bayesian computation with stochastic response surface》(《Mechanical Systems and Signal Processing》2019, Vol.128)等论文。

E-mail: shengen.fang@fzu.edu.cn