

结合准静态挠度区间包络面的区间可靠度评估*

方圣恩^{1,2}, 黄继源¹

(1. 福州大学土木工程学院 福州, 350108)

(2. 福州大学土木工程防震减灾信息化国家地方联合工程研究中心 福州, 350108)

摘要 由于在实际工程中难以获取结构随机参数充分的概率信息, 动态荷载也增加了概率可靠度评估的难度, 因此将移动荷载简化为准静态荷载, 结合挠度曲线和位移影响线提出了准静态挠度曲面的概念, 通过虚功原理推导挠度曲面的力学表达式。采用区间变量体现结构几何尺寸、材料特性与外荷载的不确定性, 将挠度曲面拓展为准静态挠度区间包络面。以简支钢箱梁为例, 根据梁的实测准静态挠度曲面与区间包络面之间的关系, 提出了一种准静态区间可靠度指标, 以评估梁损伤前后的可靠度。分析结果表明, 准静态挠度区间包络面可以有效考虑结构参数与荷载的不确定性, 同时区间可靠度指标值随着箱梁损伤程度的增加而降低。

关键词 准静态挠度曲面; 准静态挠度区间包络面; 准静态区间功能函数; 准静态区间可靠度指标

中图分类号 U441; TU312

引言

土木结构长期运营后不可避免地存在性能退化等问题, 根据现场测试数据并结合可靠度分析评价结构的当前状态, 以可靠度指标来体现安全性, 是较为切实可行的途径^[1-2]。传统的可靠度分析过程一般基于概率统计理论进行结构或构件的极限状态设计^[3], 其间假设结构随机参数服从一定概率分布, 以考虑不确定性因素^[4-5]。由于土木工程实践中往往难以获取足够的参数概率统计信息, 经常只能假设参数的概率分布, 这种主观假设偏差对可靠度指标的计算有着不利影响, 因此考虑采用非概率理论计算结构可靠度, 作为有益补充^[6]。此外, 实践中更关心结构参数、响应和外荷载的极值, 即变化区间范围比区间内的分布形式更为重要。由于极值信息相对容易获取和测量, 采用区间变量替代概率变量更具实用性, 因此近年来基于区间算法的非概率可靠度分析逐渐受到重视^[7-12]。具体应用上, 可采用凸集模型描述结构的不确定性, 通过区间变量表示不确定参数^[7]并提出非概率可靠性指标, 根据功能函数的复杂性, 将其转换为一元方程或有等式约束的优化问题进行求解^[8]。基于水平削减策略和体积比理论建立可靠度评估模型^[9], 通过序列单循环优化算法提高求解效率^[10]。对于线性离散化的结构系统, 可

建立区间可靠度函数进行评估^[11]。此外, 还可以基于区间有限元理论, 采用区间蒙特卡罗模拟和区间一次可靠度方法计算结构的广义可靠度^[12]。目前, 土木领域的区间可靠度研究还比较缺乏, 同时实际结构承受的是动态荷载, 分析难度和计算量大。此外, 经典区间计算存在区间扩张的固有缺陷^[13], 计算得到的区间往往大于真实区间。

笔者将移动荷载简化为准静态集中荷载, 结合土木领域常用的挠度曲线和位移影响线, 提出了一种准静态挠度曲面的概念^[14], 并引入区间变量, 将挠度曲面拓展为准静态挠度区间包络面, 以此建立结构的准静态区间功能函数, 并提出相应的准静态区间可靠度指标。最后, 通过试验验证了该方法的可行性。

1 准静态挠度曲面和挠度区间包络面

1.1 准静态挠度曲面

位移影响线和挠度曲线是土木工程实践中常用的曲线, 用于表征结构在荷载作用下的变形特性, 二者的力学意义有所差异, 但有着相似的几何形状。以梁式结构为例, 影响线是单位荷载沿梁纵向移动时截面内力、挠度和支座反力等响应随着荷载位置的改变而发生变化的曲线, 而挠度曲线是某固定荷

* 国家自然科学基金资助项目(51578158); 福州大学贵重仪器设备开放测试基金资助项目(2020T036)

收稿日期: 2021-01-14; 修回日期: 2021-03-13

载作用下梁发生平面内弯曲变形时的轮廓。笔者针对移动荷载情况,提出了准静态挠度曲面的概念(简称为挠度曲面)^[14],可看作是经典挠度曲线和位移影响线的集合,其本质是移动荷载作用下挠度曲线按照荷载位置排列而成的曲面,或是所有截面的广义挠度影响线按照截面的位置顺序连成的曲面,后者是挠度影响线乘以实际荷载的幅值,即一个挠度曲面包含了所有可能的挠度曲线和广义挠度影响线。

挠度曲面函数为 $\Delta(x, y)$,其中: x 为荷载位置; y 为响应位置。该函数包含了任意荷载作用下所有可能的挠度曲线和挠度影响线。图1为单个集中荷载作用下的单跨简支梁计算简图。其中: y 为某个梁截面到左支座中心的距离; x 为集中荷载 P 到左支座中心的距离; L 为简支梁的计算长度。任意荷载均可表示为不同集中荷载的组合,因此采用集中荷载进行示例,不失普遍性。

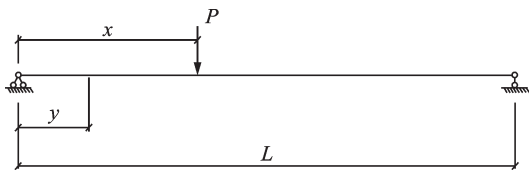


图1 单跨简支梁计算简图

Fig.1 Schematic diagram of a simply-supported beam

对欧拉-伯努利梁而言,弯矩对挠度起主导作用,剪力和轴力对挠度的影响可以忽略。因此,应用虚功原理计算梁挠度时只须考虑弯矩引起的挠度

$$\Delta_P(x, y) = \sum \int \frac{M_P \bar{M}}{EI} ds \quad (1)$$

其中: M_P 和 \bar{M} 分别为实际荷载 P 与虚拟单位力($P=1$)作用下的弯矩函数; E 为弹性模量; I 为截面惯性矩。

根据图1绘制 M_P 和 \bar{M} 的弯矩图,得到二者的分段函数表达式为

$$M_P = \begin{cases} M_1 = \frac{P(L-x)s}{L} & (0 \leq s \leq x) \\ M_2 = \frac{Px(L-s)}{L} & (x \leq s \leq L) \end{cases} \quad (2)$$

$$\bar{M} = \begin{cases} \bar{M}_1 = \frac{(L-y)s}{L} & (0 \leq s \leq y) \\ \bar{M}_2 = \frac{y(L-s)}{L} & (y \leq s \leq L) \end{cases} \quad (3)$$

其中: s 为梁上任意截面到左支座的距离。

简支梁的几何参数、材料特性和外荷载已知时, $\Delta_P(x, y)$ 是一个以 x, y 为自变量的二元函数,式(1)变为

$$\Delta_P(x, y) = \frac{1}{EI} \int M_P(x) \bar{M}(y) ds \quad (4)$$

根据实际荷载 P 与虚拟单位力的位置关系,将曲面函数展开为2部分。将式(2),(3)代入式(4),结合图乘法推导得到 $\Delta_P(x, y)$ 的表达式为

$$\Delta_P(x, y) = \begin{cases} \frac{yP(x-L)(y^2+x^2-2Lx)}{6EIL} & (0 \leq y \leq x \leq L) \\ \frac{xP(y-L)(x^2+y^2-2Ly)}{6EIL} & (0 \leq x \leq y \leq L) \end{cases} \quad (5)$$

式(5)为连续函数,而实际工程中的测点数目有限,因此采用挠度矩阵的形式。该矩阵可视为挠度曲面上取点得到,即根据测点位置或结构网格,将曲面沿 x, y 坐标轴划分成 n 份(不要求必须等间距),则 $\Delta_P(x, y)$ 在 $x-y$ 平面上的投影被分割成 $n \times n$ 个网格,包含 $(n+1)^2$ 个点。再将这些点的函数值按坐标顺序排列,形成 $(n+1)$ 阶的挠度矩阵 $\mathbf{\Delta}_{ij}$ 。 $\Delta_P(x, y)$ 上点的函数值与 $\mathbf{\Delta}_{ij}$ 矩阵中元素的关系为

$$\mathbf{\Delta}_{ij} = \Delta_P\left(\frac{i-1}{n}L, \frac{j-1}{n}L\right) \quad (6)$$

反之,通过拟合实测得到挠度矩阵来获取 $\Delta_P(x, y)$,这里限于篇幅不再详述,具体见文献[14]。需要说明的是,因为支座处无竖向挠度变形,其在 $\mathbf{\Delta}_{ij}$ 中对应的元素为0。

1.2 挠度区间包络面

采用区间变量表示结构参数和外荷载的不确定性时, $\Delta_P(x, y)$ 就由确定性曲面拓展为包络面形式。假设图1中简支梁的计算跨径 $L=2$ m,集中荷载 $P=[192, 212]$ N,截面惯性矩 $I=[1.5, 1.82] \times 10^{-8}$ m⁴,弹性模量 $E=[190, 210]$ GPa。 P, I 和 E 所对应的区间中值分别为202 N, 1.66×10^{-8} m⁴和200 GPa。将3个区间变量代入式(5),为避免区间扩张,结合模态区间分析^[15]得到挠度区间包络面 $\hat{\Delta}_P(x, y)$ 的函数表达式为

$$\hat{\Delta}_P(x, y) = \begin{cases} [4.19, 6.19] \times 10^{-3} y(x-2)(y^2+x^2-4x) & (0 \leq y \leq x \leq 2) \\ [4.19, 6.19] \times 10^{-3} x(y-2)(y^2+x^2-4y) & (0 \leq x \leq y \leq 2) \end{cases} \quad (7)$$

其中: $\hat{\Delta}_P$ 表示挠度区间变量; x, y 分别为 P 和某截面到左支座中心的距离,为确定值。

简支梁准静态挠度区间包络面如图2所示,由上下限曲面包络而成,二者在 x - y 平面内相交重合。上限曲面给出不确定性影响下梁挠度的最大值,下限曲面为最小值。上下限曲面间形成了包络空间,结构实测挠度曲面在此空间内安全性有一定保障。由于存在不确定性因素的影响,若超过包络空间,则安全性很可能存在问题。

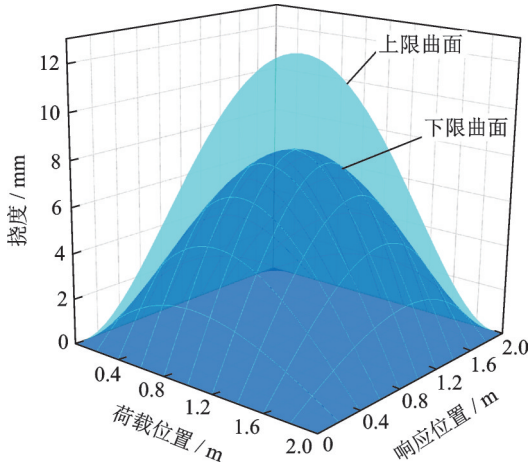


图2 简支梁准静态挠度区间包络面

Fig.2 Quasi-static deflection interval enveloping surface of the simply-supported beam

2 区间可靠度评估

2.1 区间可靠度

我国规范将影响结构承载能力的参数和荷载效应视为服从一定概率分布的随机变量^[3],结合分项系数来计算抗力 R 和荷载效应 S ,得到结构的功能函数的一般表达式 $Z = R - S$, $Z < 0$ 时结构失效。若采用区间变量来考虑 R 和 S ,则 Z 变为区间功能函数。

对一个区间数 $\hat{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$ (\underline{x} 和 \bar{x} 表示上下界),其区间中值 x^c 和半径 x^r 分别为 $x^c = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}$, $x^r = \frac{|\bar{x} - \underline{x}|}{2}$ 。其中:上标符号 c 和 r 分别为区间中值和半径。

引入标准化区间变量 $\delta \in [-1, 1]$,将 R 和 S 用区间变量 \hat{R} 和 \hat{S} 表示,相应的 Z 表达式变为

$$\hat{Z} = \hat{R} - \hat{S} = (R^c - S^c) + R^r \delta_R - S^r \delta_S \quad (8)$$

其中: $\hat{R} = R^c + R^r \delta_R$; $\hat{S} = S^c + S^r \delta_S$ 。

区间功能函数中值 $Z^c = R^c - S^c$; 半径 $Z^r = R^r + S^r$ 。

定义区间可靠度指标 $\hat{\beta}$ 为

$$\hat{\beta} = \frac{Z^c}{Z^r} = \frac{R^c - S^c}{R^r + S^r} \quad (9)$$

其中: $\hat{\beta}$ 为 \hat{Z} 中值和半径的比值,其表达式相似于传统概率可靠度指标 $\beta = (\mu_R - \mu_S) / \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$ 。

在概率可靠度指标中,均值 μ 不变时,标准差 σ 越小,说明参数变化的范围(随机性)越小,可靠度值就越大。方差 σ^2 不变时, $\mu_R - \mu_S$ 越大,即抗力均值超过荷载效应均值越多,结构可靠度就越高。类似的,在 Z^c 不变的情况下, R^r 或 S^r 越小,则 $\hat{\beta}$ 越高;在 Z^r 不变的情况下, $R^c - S^c$ 越大,则结构区间可靠度越高。

2.2 准静态区间可靠度指标

借鉴式(9),笔者定义区间功能函数中值 Z^c 为 $\hat{\Delta}_p(x, y)$ 中最不利曲面(上限曲面)与最保守曲面(下限曲面)间所有点的距离和,区间功能函数半径 Z^r 为每个实测挠度曲面与最不利曲面间所有点的距离和。结构每次加载均可获得一个实测挠度曲面,因此可以计算一次 $\hat{\beta}$,为无量纲的确定值。

由于实际加载时测点数目有限,得到的是挠度的数据点阵,因此可在 $\hat{\Delta}_p(x, y)$ 上对应坐标处取点,得到与实测矩阵阶数一致的矩阵,其中每个元素坐标对应实际加载的荷载位置和响应位置。基于2个矩阵的对比,提出了一种准静态区间可靠度指标

$$\hat{\beta} = \frac{Z^c}{Z^r} = \frac{\sum_{i=1, j=1}^n \frac{h_{i,j}^* - h_{i,j}^k}{\Delta h_{i,j}}}{\sum_{i=1, j=1}^n \Delta h_{i,j}} \quad (10)$$

其中: $h_{i,j}$ 为矩阵中的元素; i, j 为对应的加载点和测点位置编号;上标*和 k 分别为 $\hat{\Delta}_p(x, y)$ 的上限曲面和损伤工况, $k=0$ 表示无损伤工况; $\Delta h_{i,j}$ 为 $\hat{\Delta}_p(x, y)$ 上下限曲面间对应点的垂直距离。

为便于实际应用,对式(10)进一步正则化

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1, j=1}^n \frac{h_{i,j}^* - h_{i,j}^k}{\Delta h_{i,j}}}{(n - m)^2} \quad (11)$$

其中: n 为矩阵维度; m 为与挠度同方向的结构约束数目; $n - m$ 为挠度测点数目。

由式(10)和(11)可知, $\hat{\beta}$ 的值不再是区间,而是一个实数,以便和传统可靠度指标相对应,便于工程应用。当实测挠度曲面在 $\hat{\Delta}_p(x, y)$ 内时, $\hat{\beta}$ 的值处于 $[0, 1]$ 。 $\hat{\beta}$ 趋近于 1,表明实测挠度曲面越接近 $\hat{\Delta}_p(x, y)$ 的下限曲面,结构越安全; $\hat{\beta}$ 趋近于 0,则实

测挠度曲面越接近 $\hat{\Delta}_p(x, y)$ 的上限曲面, 结构的安全性越低。当实测挠度曲面在 $\hat{\Delta}_p(x, y)$ 之外时, $\hat{\beta}$ 为负值, 结构处于不安全状态。需要说明的是, 完好结构的 $\hat{\beta}$ 也可能不等于 1, 而是相对于损伤结构来说更接近 1。理论上仅当完好结构的实测曲面与下限曲面重合时, $\hat{\beta} = 1$ 。

3 试验验证

图 3 为试验简支钢箱梁示意图。截面惯性矩为 $I = 1.66 \times 10^{-8} \text{ m}^4$, 钢材弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$, 密度为 $8\,059 \text{ kg/m}^3$ 。沿梁长均匀布设 9 个测点, 测点下方安装有位移计。采用重物挂载模拟移动集中荷载, 重物由钢管和 2 个砝码组成, 总质量为 20.63 kg , 试验中沿测点顺序移动, 每个荷载步都记录所有测点的竖向挠度。试验通过切割梁截面的方式来模拟损伤, 图 4 为简支钢箱梁静力加载方式和损伤模拟。切口长度为 2 cm , 高度和宽度为 1 cm 。共设置 2 个损伤工况: 单损伤切口距离左支座 1.05 m , 双损伤工况新增距左支座 0.6 m 处的切口。

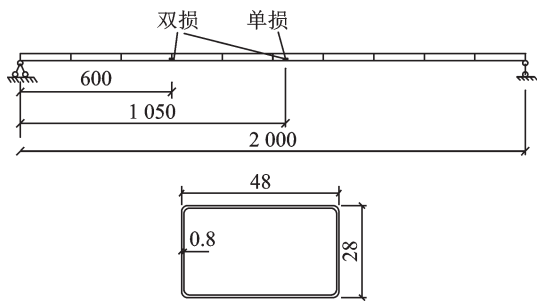
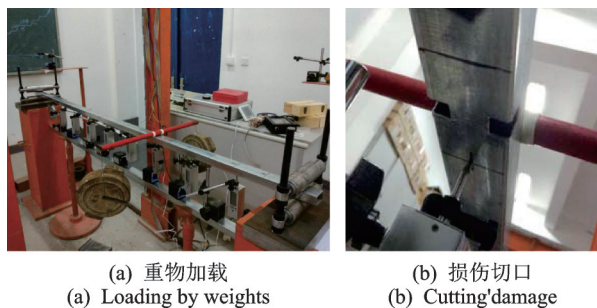


图 3 试验简支钢箱梁示意图(单位:mm)

Fig.3 Schematic diagram of the experimental simply-supported steel box beam (unit: mm)



(a) 重物加载 (a) Loading by weights
(b) 损伤切口 (b) Cutting/damage

图 4 简支钢箱梁静力加载方式和损伤模拟

Fig.4 Static loading and damage simulation of the simply-supported steel box beam

假设不确定性存在于外荷载 P 、截面惯性矩和弹性模量中。为了更好地演示, 假设 $P = [192,$

$212] \text{ N}$, $I = [1.5, 1.82] \times 10^{-8} \text{ m}^4$, $E = [190, 210] \text{ GPa}$, 得到式(7)所示准静态挠度区间包围面 $\hat{\Delta}_p(x, y)$ 的函数表达式。图 5 为简支钢箱梁准静态挠度区间包围面与实测挠度曲面。可见, 无损梁、损伤梁的实测挠度曲面均处于区间包围面内。需要说明的是, 随着 P, I, E 的区间假设变化, 损伤梁的实测挠度曲面有可能突破 $\hat{\Delta}_p(x, y)$ 。单损伤、双损伤梁的实测挠度曲面逐渐接近 $\hat{\Delta}_p(x, y)$ 的上限曲面, 说明梁的安全性在不断降低。

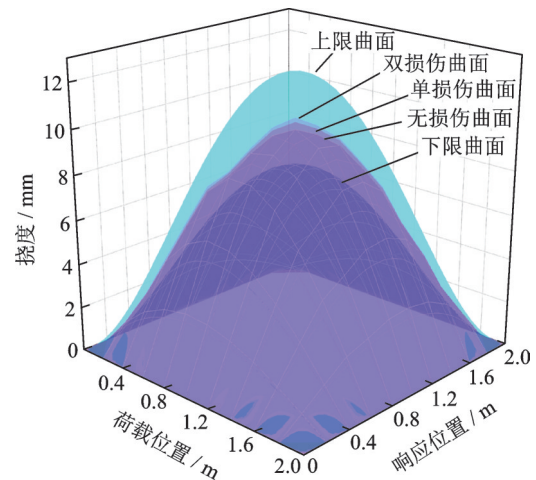


图 5 简支钢箱梁准静态挠度区间包围面与实测挠度曲面
Fig.5 Quasi-static deflection interval enveloping surface and measured deflection surface of the simply-supported steel box beam

支座竖向约束 $m = 2$, 测点数目为 9, 实测挠度矩阵维数 $n = m + 9 = 11$ 。连同实测挠度曲面数据一起代入式(11), 计算得到简支钢箱梁准静态区间可靠度指标 $\hat{\beta}$ 如图 6 所示。可见, 梁在损伤后可靠度不断下降。单损伤和双损伤分别使 $\hat{\beta}$ 下降了 7.3% 和 15% , 说明本研究方法能有效描述结构损伤前后发生的可靠度变化。

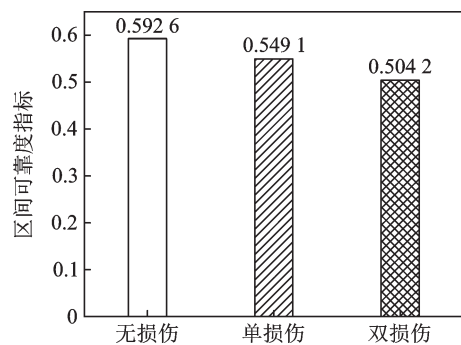


图 6 简支钢箱梁准静态区间可靠度指标

Fig.6 Quasi-static interval reliability index of the simply-supported steel box beam

4 结束语

基于笔者提出的准静态挠度曲面,进一步考虑结构几何尺寸、材料特性与外荷载的不确定性,通过区间变量将挠度曲面拓展为准静态挠度区间包络面。根据实测挠度曲面与区间包络面的关系,建立准静态区间功能函数,提出了一种准静态区间可靠度指标,用于评估损伤前后结构的可靠度。研究发现,挠度区间包络面可以有效含括梁结构的不确定性,随着梁损伤程度的加剧,实测挠度曲面逐步靠近甚至超过准静态区间包络面的上限曲面,同时准静态区间可靠度指标值不断减小,说明该指标能有效体现梁在不确定性影响下损伤前后的可靠度变化。

参 考 文 献

- [1] DITLEVSEN O, MADSEN H O. Structural reliability methods[M]. 2nd ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2007:2-10.
- [2] 张尚荣,谭平,杜永峰,等.层间隔震体系可靠度的灵敏度分析[J].振动、测试与诊断,2016,36(1):102-107.
ZHANG Shangrong, TAN Ping, DU Yongfeng, et al. Reliability sensitivity analysis of inter-story isolation system[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2016, 36(1):102-107. (in Chinese)
- [3] GB 50068—2018 建筑结构可靠度设计统一标准[S].北京:中国建筑工业出版社,2018.
- [4] 赵国藩,贡金鑫,赵尚传.我国土木工程结构可靠性研究的一些进展[J].大连理工大学学报,2000,40(3):253-258.
ZHAO Guofan, GONG Jinxin, ZHAO Shangchuan. Developments of reliability research for civil engineering structure in China[J]. Journal of Dalian University of Technology, 2000, 40(3):253-258. (in Chinese)
- [5] BIONDINI F, FRANGOPOL D M. Life-cycle performance of deteriorating structural systems under uncertainty [J]. Journal of Structural Engineering, 2016, 142(9):2233-2244.
- [6] BEN-HAIM Y. A non-probabilistic concept of reliability [J]. Structural Safety, 1994, 14(4):227-245.
- [7] 郭书祥,吕震宙,冯元生.基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J].计算力学学报,2001,18(1):56-60.
GUO Shuxiang, LV Zhenzhou, FENG Yuansheng. A non-probabilistic model of structural reliability based on interval analysis[J]. Journal of Computational Mechanics, 2001, 18(1):56-60. (in Chinese)
- [8] 郭书祥,张陵,李颖.结构非概率可靠性指标的求解方法[J].计算力学学报,2005,22(2):227-231.
GUO Shuxiang, ZHANG Ling, LI Ying. Procedures for computing the non-probabilistic reliability index of uncertain [J]. Journal of Computational Mechanics, 2005, 22(2): 227-231. (in Chinese)
- [9] WANG L, XIONG C, YAO W Y. A novel methodology of reliability-based multidisciplinary design optimization under hybrid interval and fuzzy uncertainties [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 337(1):439-457.
- [10] SHI Y, LU Z, HUANG Z L. Time-dependent reliability-based design optimization with probabilistic and interval uncertainties [J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, 80: 268-289.
- [11] MUSCOLINO G, SANTORO R, SOFI A. Reliability analysis of structures with interval uncertainties under stationary stochastic excitations [J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2016, 300:47-69.
- [12] 吕大刚,宋彦,辛瑞娇.基于区间有限元的结构广义可靠度分析[J].中国科学,2018,48(1):79-90.
LV Dagang, SONG Yan, XIN Ruijiao. Generalized reliability analysis of structures based on interval finite element [J]. Science China, 2018, 48(1): 79-90. (in Chinese)
- [13] MOORE R E, KEARFOTT R B, CLOUD M J. Introduction to interval analysis [M]. Siam: [s. n.], 2009:1-17.
- [14] 方圣恩,黄继源.基于准静态挠度曲面的桥梁无模型损伤定位[J].振动、测试与诊断,2022,42(2):270-276.
FANG Sheng'en, HUANG Jiyuan. Model-free damage localization method based on quasi-static deflection surfaces of bridges [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2022, 42(2): 270-276. (in Chinese)
- [15] SAINZ M A, ARMENGOL J, CALM R, et al. Modal interval analysis [M]. [S. l.]: Springer, 2014: 121-158.



第一作者简介:方圣恩,男,1980年8月生,博士、教授。主要研究方向为结构健康监测与损伤识别。曾发表《Probabilistic damage identification incorporating approximate Bayesian computation with stochastic response surface》(《Mechanical Systems and Signal Processing》2019, Vol.128)等论文。

E-mail: shengen.fang@fzu.edu.cn