

直齿轮副齿面接触安全条件及安全盆*

李正发, 苟向锋, 朱凌云, 石建飞

(天津工业大学机械工程学院 天津, 300387)

摘要 为研究齿面接触疲劳对齿轮副安全特性的影响,考虑直齿轮副含单/双齿啮合、脱啮和齿背接触等啮合状态,根据 Hertz 接触理论建立其齿面接触强度的安全条件。基于胞映射理论,计算考察域内吸引域随参数变化的演变过程。判断共存吸引子在所建安全条件下的安全特性,分析系统安全盆的演变规律,研究安全盆的侵蚀与分岔机理。结果表明:考察域内的共存吸引子在齿面接触安全条件下的安全特性不同;吸引子的出现或消失是安全盆分岔的主要原因;多初值分岔图中的跳跃和分岔导致安全盆分岔。该结果可为齿轮系统的参数选择和故障预测提供参考。

关键词 直齿轮副;多状态啮合;齿面接触强度;安全盆;多初值分岔

中图分类号 TH132.41

引言

齿侧间隙、阻尼和时变啮合刚度等使齿轮传动系统表现出典型的非线性特性,齿面摩擦和重合度使其动态响应更加复杂。郜浩冬等^[1]研究了摩擦因数对齿轮系统动力学的影响。Shi 等^[2]研究了含时变摩擦因数和重合度齿轮系统中单双齿交替及啮合力突变。尹桩等^[3]发现啮合力的周期或混沌突变改变齿轮系统的运动状态。文献[4-5]发现,啮合力和运动状态的变化会破坏齿轮传动系统的安全运行。

安全盆理论被应用于非线性系统安全特性的研究。Erdem 等^[6]运用安全盆理论计算出了拖网渔船安全工作的浪高和风速。Wei 等^[7]研究了白噪声对电力系统安全盆侵蚀的影响。尚慧琳等^[8]利用时滞位置反馈控制转子系统的混沌运动和安全盆侵蚀。龚璞林等^[9]获得了安全盆中的安全点和逃逸点,研究了弱参数扰动对非线性振荡器安全盆的影响。刘志亮等^[10]提出了确定安全域边界的惩罚参数选择算法,对滚动轴承的安全盆进行了研究。

系统安全条件的建立是采用安全盆理论研究系统安全特性的基础。齿轮传动通过齿面摩擦传递扭矩和运动,齿面接触疲劳破坏系统的安全运行。根据齿面接触强度建立安全条件,研究齿轮传动系统中共存吸引子和周期解的安全特性,可预测齿轮系统的故障。唐进元等^[11]根据 Hertz 接触应力解析式和有限元方法,研究了面齿轮接触应力的变化规律。

张广玉等^[12]通过 Hertz 接触理论建立了小模数齿轮齿面接触应力的数学模型,得到其应力分布规律。现有研究主要采用 Hertz 接触理论考察齿面接触强度^[13]。

笔者根据齿面接触强度建立判断齿轮副接触安全性的安全条件,研究随系统参数变化时考察域内的吸引子及其演变过程。通过吸引子及建立的安全条件,判断共存吸引域的安全特性,得到考察域内的安全盆,分析安全盆的侵蚀与分岔。

1 单自由度齿轮传动系统动力学模型

直齿轮副的物理简化模型如图 1 所示。其中: R_{bj} , θ_j , T_j 和 I_j ($j=m, n$) 分别为齿轮 j 的基圆半径、转角位移、转矩和转动惯量; $k(t)$ 和 c_g 分别为啮合刚度和啮合阻尼; $e(t)$ 为综合传递误差; $2\bar{D}$ 为齿侧间隙。齿轮副的系统参数见文献[2]。

图 2 为齿轮副齿面啮合与齿背接触的示意图。齿面啮合时,齿轮 m 为主动轮 p , 齿轮 n 为从动轮 g ; 齿背接触时则相反。 N_1N_2 为齿面啮合线, M_1M_2 为齿背接触线。 R_{pi} 和 R_{gi} ($i=1, 2$) 分别为主动轮 p 和从动轮 g 中第 i 对轮齿上啮合点到齿轮中心的距离。

含单/双齿啮合、脱啮和齿背接触的齿轮副无量纲动力学模型^[2-3]为

$$\ddot{x} + 2\xi\text{sign}(x)\dot{x} + \bar{k}(t)M(t)f(x) = F_m + F_h(t) \quad (1)$$

* 国家自然科学基金资助项目(51365025);天津市自然科学基金资助项目(18JCYBJC88800)

收稿日期:2020-03-15;修回日期:2020-04-24

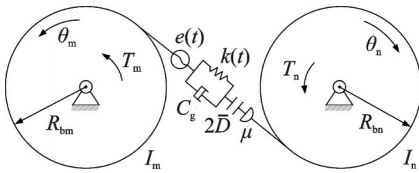
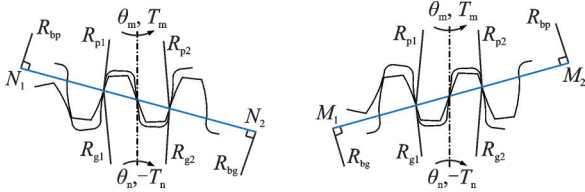


图1 直齿轮副物理简化模型

Fig.1 Simplified physical model of the spur gear pair

其中: x 为轮齿的相对位移;“ \cdot ”表示对时间求导; t 为无量纲时间; $\xi=c_g/(m_e\omega_e)$ 为无量纲阻尼; $m_e=I_m I_n/(R_{bm}^2 I_n + R_{bn}^2 I_m)$,为等效质量; $\omega_e=\sqrt{k_0/m_e}$,为系统的固有频率; $\omega=\omega_n/\omega_e$,为无量纲啮合频率; ω_n 为啮合频率; $\bar{k}(t)=[1+k\cos(\omega t)]$,为无量纲啮合刚度; k 为无量纲刚度波动幅值; $F_m=(R_{bm} I_n T_m + R_{bn} I_m T_n)/[(R_{bm}^2 I_n + R_{bn}^2 I_m)m_e b_c \omega_e^2]$,为无量纲外载荷力;特征尺寸 $b_c=0.1\text{ mm}$; $F_h(t)=-m_e \ddot{e}(t)/b_c=\varepsilon\omega^2 \cos(\omega t)$; ε 为无量纲综合传递误差幅值; $\text{sign}(x)$ 为阻尼力的方向函数; $f(x)$ 为齿侧间隙函数; $M(t)$ 为啮合状态函数,可根据文献[2-3]计算得到。



(a) 齿面啮合 (a) Drive-side engaging (b) 齿背接触 (b) Back-side contacting

图2 直齿轮副齿面啮合与齿背接触示意图

Fig.2 Schematic diagram of system engagement states

2 齿面接触安全条件的建立

齿面接触应力超过齿面许用接触应力,造成齿面接触疲劳。以齿面接触应力小于齿面许用接触应力为依据,建立其安全条件。齿面许用接触应力为

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{Hlim} Z_{NT} Z_L Z_V Z_R Z_W Z_X}{S_{Hmin}} \quad (2)$$

齿轮取渗氮处理调质钢,其参数^[13]为 $\sigma_{Hlim}=1500\text{ MPa}$; $Z_{NT}=1.6$; $Z_L Z_V Z_R=1$; $Z_W=Z_X=1$; $S_{Hmin}=1.1$,则 $\sigma_{HP}=2200\text{ MPa}$ 。

由式(1)得到无量纲、有量纲动态啮合力分别为

$$\bar{F}_n = 2\xi \text{sign}(x) \dot{x} + (1+k\cos(\omega t)) f(x) \quad (3)$$

$$F_n = \bar{F}_n m_e \omega_e^2 b_c \quad (4)$$

各齿沿啮合线方向的啮合力 F_{n1} 和 F_{n2} 为

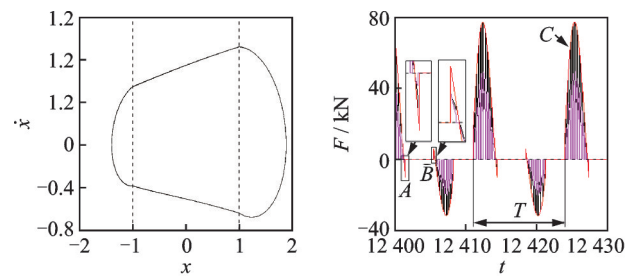
$$F_{ni} = F_n Y_i(t) \quad (i=1,2) \quad (5)$$

系统初值取 $(x, \dot{x})=(0.841104, 0.896444)$,得到系统相图及啮合力如图3所示。图3(a)中,虚线为 $x=\pm D$ 。相轨迹位于 $x=D$ 右侧时,系统为齿面啮合状态,齿轮 m 受 $N_2 N_1$ 方向的啮合力。相轨迹位于2条虚线之间时,系统为脱啮。相轨迹位于 $x=-D$ 左侧时,系统为齿背接触,齿轮 m 受 $M_1 M_2$ 方向的啮合力。

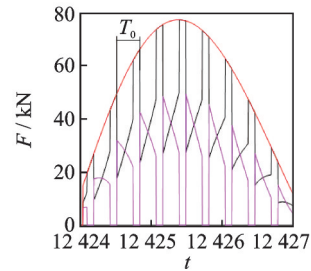
图3(b)中, F_n 的变化过程为:当 $F_n > 0$ 时,齿面啮合; F_n 逐渐减小到0并沿负方向增加,最后突变为0,如图3(b)中的A区域所示,此时系统由齿面啮合变为脱啮;当 $F_n = 0$ 时,系统脱啮。之后红线由 $F_n = 0$ 经过 $F_n > 0$ 变为 $F_n = 0$,最后 $F_n < 0$,如图3(b)中的B区域。系统由脱啮变为齿背接触。由于 $F_{n1} \neq F_{n2}$,应分别计算啮合轮齿1和2上的最大齿面接触应力。

图3(c)为图3(b)在C方向的放大图。齿面啮合时, $F_n > 0$;轮齿脱啮时, $F_n = 0$;齿背接触时, $F_n < 0$ 。当 $F_n = F_{n1} \cup F_{n2} = 0$ 时,为单齿啮合;当 $F_n = F_{n1} + F_{n2}$ 时,为双齿啮合。图3中,啮合周期 $T=2\pi/\omega_m$;一次单、双齿交替啮合的时间 $T_0=2\pi/(Z_m \omega_m)$ 。

图4为轮齿接触带半宽的计算示意图。将啮



(a) 相图 (a) Phase diagram (b) 啮合力随t的变化规律 (b) Variation of meshing force with t



(c) C方向放大图 (c) Enlarged diagram along C

— F_n ; — F_{n1} ; — F_{n2}

图3 系统相图及啮合力随无量纲时间 t 变化历程
Fig.3 Phase diagram and curves of meshing force via dimensionless time

合点2接触的轮齿分别视为半径为 R_{21} 和 R_{22} 的圆柱体。主动轮齿受 N_2N_1 方向的啮合力 $-F_{n2}$, 被动轮齿受 N_1N_2 方向的啮合力 F_{n2} , 轮齿上形成接触带宽为 $2B$ 的接触平面。

接触带半宽 $B_i(t)(i=1, 2)$ 为

$$B_i(t) = 1.128 \sqrt{\frac{2|F_{ni}|R_{i1}(t)R_{i2}(t)(1-\gamma^2)}{Eb(R_{i1}(t)+R_{i2}(t))}} \quad (6)$$

其中:泊松比 $\gamma = 0.3$;弹性模量 $E = 207 \text{ GPa}$ 。

啮合点处的最大接触应力 $\sigma_{ni}(t)$ 为

$$\sigma_{ni}(t) = 4F_{ni} / [2\pi b B_i(t)] \quad (i=1, 2) \quad (7)$$

将式(5)中的啮合力 F_{ni} 代入式(7), 得到 σ_{n1} 和 σ_{n2} 随无量纲时间 t 的变化曲线, 如图5所示。齿面接触应力变化情况和啮合力变化情况一致。当齿面接触应力大于许用接触应力 σ_{HP} 时, 产生接触疲劳, 则齿面接触强度的安全条件为

$$\sigma_{ni}(t) \leq \sigma_{HP} \quad (8)$$

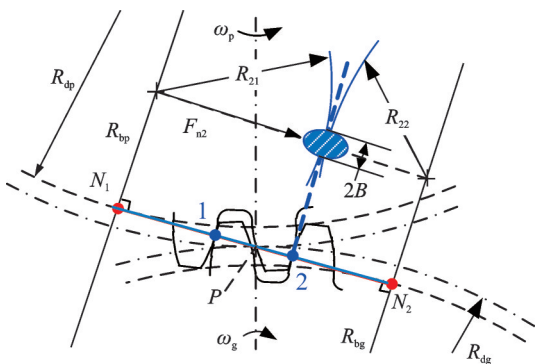
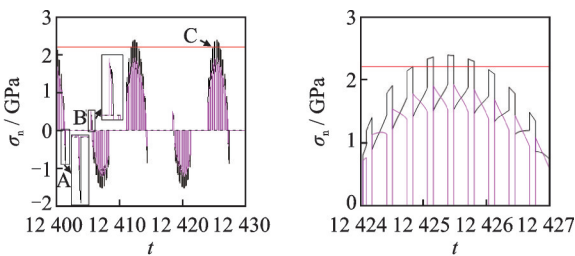


图4 轮齿接触带半宽计算示意图

Fig.4 Schematic diagram of the calculation for the half width of the teeth contact belt



(a) 随无量纲时间 t 变化的 σ_{n1} 和 σ_{n2}
(b) C 方向放大图
(a) σ_{n1} and σ_{n2} via dimensionless t
(b) Enlarged diagram along C

图5 σ_{n1} 和 σ_{n2} 随无量纲时间 t 变化曲线

Fig.5 Curves of σ_{n1} and σ_{n2} via dimensionless time t

在安全盆中, 以不同吸引子为初值计算啮合点处的齿面接触应力, 再与 σ_{HP} 进行比较。当 $\sigma_{ni}(t) > \sigma_{HP}$ 时, 该吸引子及其吸引域不安全; 反之, 则安全。

3 齿面接触安全条件下的系统安全盆侵蚀与动力学分析

安全盆侵蚀指安全盆内吸引域面积和形状的改变, 其运动类型不变。安全盆分岔是指安全盆内吸引域的消失或出现, 以及安全盆拓扑结构的改变。

3.1 参数 ω 对系统安全盆侵蚀与分岔的影响

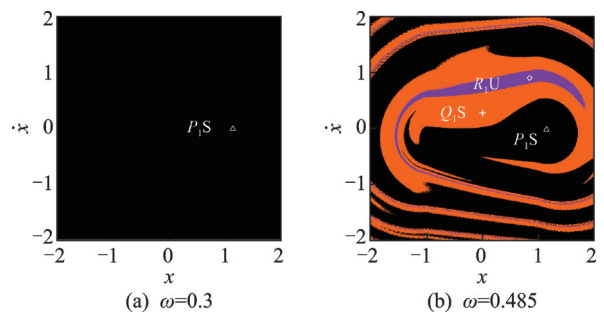
系统参数 $\xi = 0.1, k = 0.1, F_m = 0.1, \epsilon = 0.2, D = 1.0$; 考察域 $H_1 = \{-2.0 \leq x \leq 2.0, -2.0 \leq \dot{x} \leq 2.0\}$ 。 ω 在 $(0.2, 1.2)$ 内增大时的共存吸引子如表3所示。图6为 ω 增大时安全盆侵蚀与分岔过程。图中: $P_i(i=1, 2, 4)$ 表示系统为周期 i 运动; P_N 表示混沌运动; S 为满足接触强度安全条件的吸引域; U 为不满足接触强度安全条件的吸引域。图7为以吸引域内吸引子为初值计算得到的 σ_{n1} 和 σ_{n2} 。

根据表1和图6(a), 当 $\omega \in (0.2, 0.459)$ 时, H_1 内只有 P_1 吸引子, 以该吸引子中的 $(x, \dot{x}) = (1.1078, 0.00017)$ 为初值, 计算 σ_{n1} 和 σ_{n2} 如图7(a)所示, 图中 σ_{n1} 和 σ_{n2} 均小于 σ_{HP} , 满足齿面接触强度的安全条件,

表1 ω 增大时的共存吸引子

Tab.1 The coexistence attractors with increasing of ω

ω 的值	图例	安全吸引子	不安全吸引子
$\omega \in (0.2, 0.459)$	图6(a)	P_1	—
$\omega \in [0.459, 0.615)$	图6(b), (c)	P_1, Q_1	R_1
$\omega \in [0.615, 0.652)$	图6(d)	Q_1	R_1
$\omega \in [0.652, 0.741)$	图6(e)	Q_1	P_N
$\omega \in [0.741, 0.797)$	—	Q_1	—
$\omega \in [0.797, 0.836)$	图6(f)	Q_1, P_2	—
$\omega \in [0.836, 0.945)$	图6(g)	Q_2, P_2	—
$\omega \in [0.945, 0.962)$	图6(h)	P_4, P_2	—
$\omega \in [0.962, 1.005)$	图6(i)	P_4, Q_4	—
$\omega \in [1.005, 1.019)$	图6(j)	R_2, Q_4	—
$\omega \in [1.019, 1.031)$	图6(k)	R_2, P_8	—
$\omega \in [1.045, 1.2)$	图6(l)	Q_N	—



(a) $\omega=0.3$

(b) $\omega=0.485$

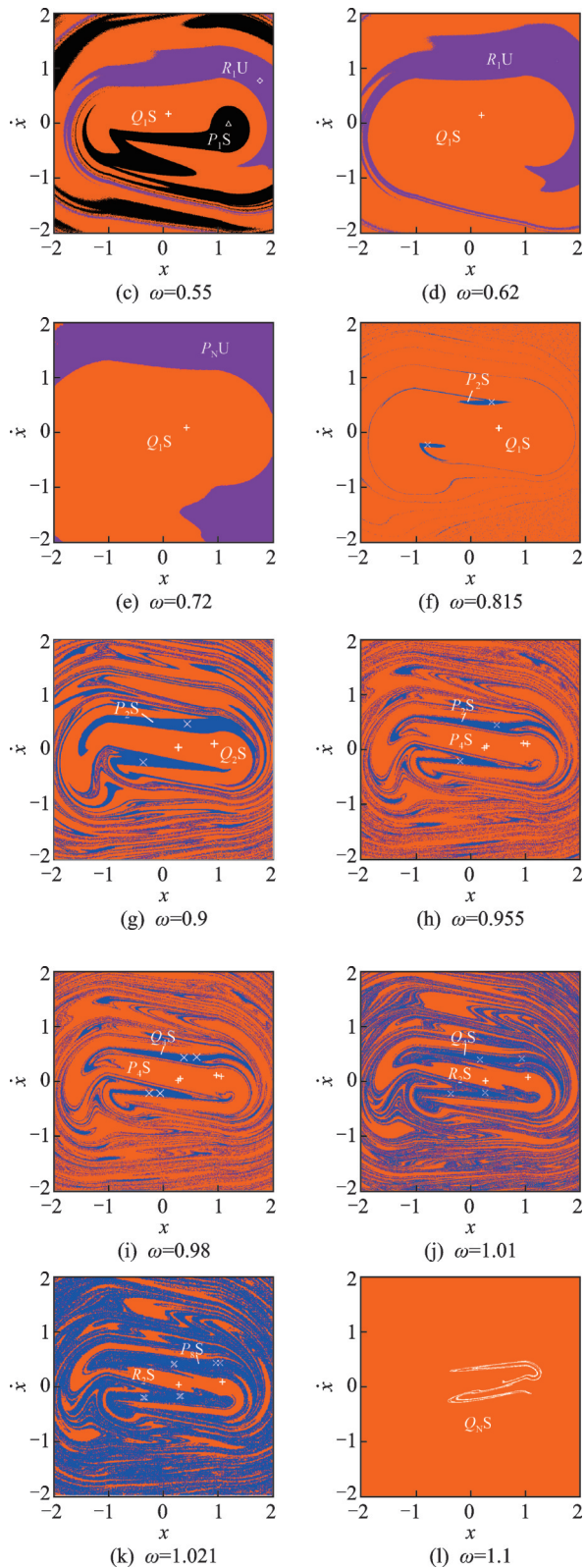


图 6 ω 增大时安全盆侵蚀与分岔过程

Fig.6 Erosion and bifurcation of safe basins via ω

将其吸引域标为 P_1S 。随着 ω 的增大,安全盆中出现 Q_1 (橘色) 和 R_1 (紫色) 吸引子。当 $\omega \in [0.459, 0.615]$ 时,吸引子 P_1, Q_1 和 R_1 共存。安全盆拓扑结构的变化导致安全盆在 $\omega=0.459$ 分岔,

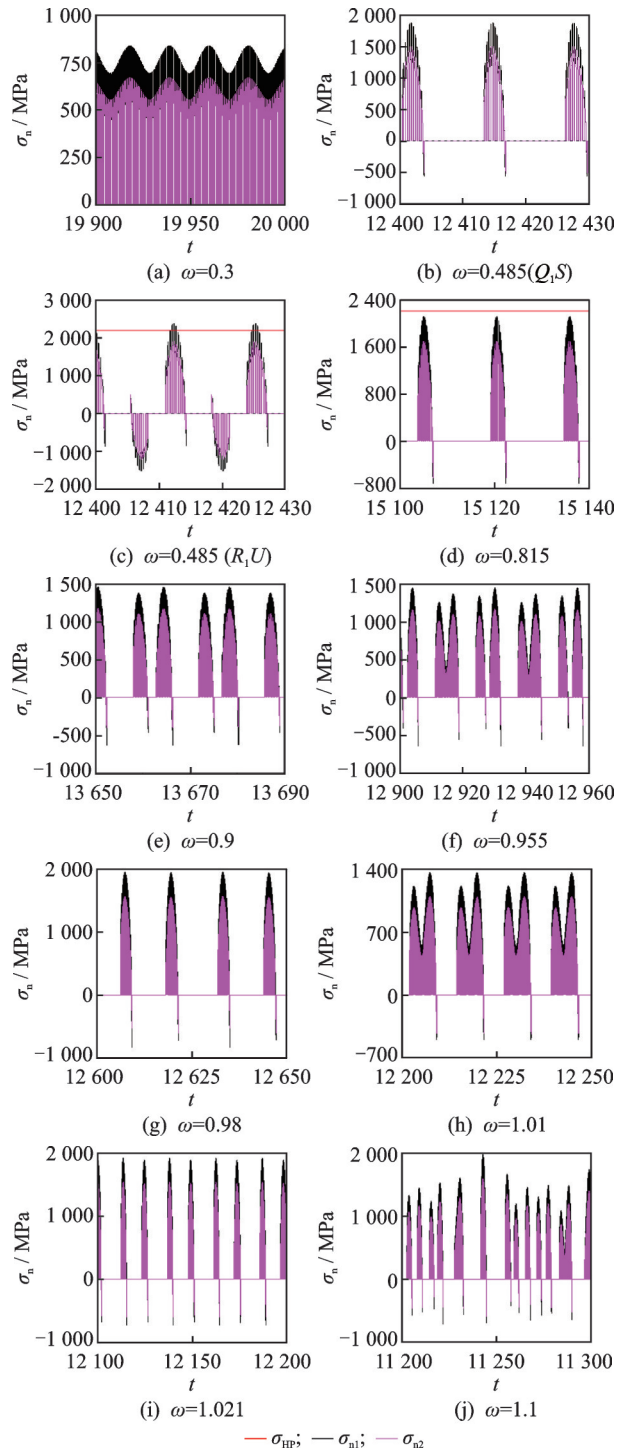


图 7 以吸引域内的吸引子为初值计算得到 σ_{n1} 和 σ_{n2}

Fig.7 σ_{n1} and σ_{n2} via dimensionless time t

图 6(b) 为 $\omega = 0.485$ 的安全盆。以 Q_1 的 $(x, \dot{x}) = (0.21, 0.136\ 667)$ 和 R_1 的 $(x, \dot{x}) = (0.841\ 104, 0.896\ 444)$ 为初值, 得到图 7(b) 和 (c)。图 6(b) 中橘色吸引域为 Q_1S , 紫色吸引域为 R_1U 。当 $\omega \in (0.459, 0.615)$ 时, P_1S 的面积减小, Q_1S 和 R_1U 的面积增大(如图 6(b)~(c) 所示)。安全盆内运动拓扑结构不变, 仅由系统初值导致 P_1S 被 R_1U 和 Q_1S

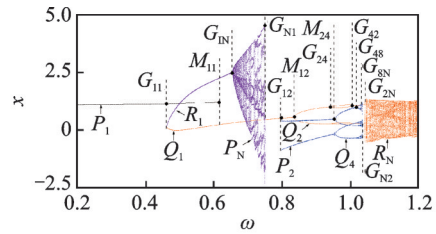
侵蚀,即发生了安全盆侵蚀。当 $\omega = 0.615$ 时, P_1S 被完全侵蚀而消失(如图 6(d)所示),图中 R_1 吸引子超出考察域。当 $\omega = 0.652$ 时, R_1 吸引子分岔为 P_N 吸引子。图 6(e)为 $\omega = 0.72$ 的安全盆,图中 P_NU 与 Q_1S 共存, P_NU 在 $\omega = 0.741$ 消失。

当 $\omega = 0.797$ 时,安全盆中出现 P_2 吸引子(图 6(f)),以 P_2 的 $(x, \dot{x}) = (-0.77, -0.23)$ 为初值得到图 7(d),图 6(f)中蓝色吸引域为 P_2S 。 Q_1 吸引子在 $\omega = 0.836$ 分岔为 Q_2 (图 6(g)),以 Q_2 的 $(x, \dot{x}) = (0.268, 0.036)$ 为初值得到图 7(e),图 6(g)中橘色吸引域为 Q_2S 。当 $\omega = 0.945$ 时, Q_2 吸引子倍化为 P_4 (图 6(h)),以 P_4 的 $(x, \dot{x}) = (0.97, 0.103\ 333)$ 为初值得到图 7(f),图 6(h)中橘色吸引域为 P_4S 。 P_2 吸引子在 $\omega = 0.962$ 倍化为 Q_4 (图 6(i)),以 Q_4 吸引子 $(x, \dot{x}) = (0.37, 0.43)$ 为初值得到图 7(g),图 6(i)中蓝色吸引域为 Q_4S 。当 $\omega = 1.005$, P_4 吸引子变为 R_2 (图 6(j)),以 R_2 的 $(x, \dot{x}) = (1.063\ 333, 0.076\ 667)$ 为初值得到图 7(h),其橘色吸引域为 R_2S 。当 $\omega = 1.019$ 时, Q_4 吸引子变为 P_8 (图 6(k)),以 P_8 的 $(x, \dot{x}) = (0.294\ 286, -0.191\ 429)$ 为初值得到图 7(i),其蓝色吸引域为 P_8S 。当 $\omega \in (1.031, 1.045)$ 时, H_1 内共存混沌吸引子和 R_2 吸引子。 R_2 吸引子在 $\omega = 1.045$ 分岔为 Q_N 吸引子。图 6(l)为 $\omega = 1.1$ 的安全盆,以 Q_N 的 $(x, \dot{x}) = (0.73, 0.032\ 2)$ 得到图 7(j),图中 σ_{n1} 和 σ_{n2} 始终小于 σ_{HP} ,吸引子安全。

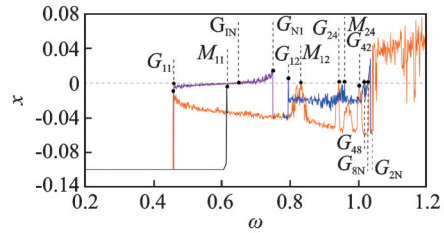
可见,在齿面接触强度安全条件下,安全盆中共存吸引域的安全特性不同。图 6 中共存吸引子的吸引域构成了安全盆,其分岔和侵蚀过程与吸引子的演变过程密切相关。吸引子的出现或消失改变安全盆内的运动类型及拓扑结构,导致安全盆分岔。

多初值分岔图可清晰反映系统运动转迁过程。图 8 为系统随 ω 增大的多初值分岔图及对应的最大 Lyapunov 指数(top Lyapunov exponent, 简称 TLE)图。图 8(a)中, P_n, Q_n 和 R_n 为分岔曲线的运动周期数; G_{11}, M_{12} 等为分岔点。由图 8 可知,在 $G_{11}(\omega = 0.459)$ 左侧,只有黑色分岔曲线 P_1 ,对应的 TLE 值小于 0,安全盆中只存在 P_1S (图 6(a))。在 G_{11} 附近,图 8(a)中发生周期跳跃出现橘色 Q_1 和紫色 R_1 分岔曲线,在 $G_{11} \sim M_{11}$ 内, P_1, Q_1 和 R_1 共存,对应安全盆如图 6(b)~(c)所示。

在 $M_{11}(0.615)$ 附近, P_1 (对应图 6(c)~(d)中黑色吸引域 P_1S)消失。在 $G_{1N}(\omega = 0.625)$ 附近,紫色 TLE 值近似等于 0,之后大于 0,紫色 R_1 鞍结分岔为 P_N ,图 6(d)~(e)中紫色吸引域由 R_1U 变为 P_NU 。在 G_{N1}



(a) Diagram of multi-initial bifurcation with increasing of ω



(b) Diagram of multi-initial TLE with increasing of ω
 — P_1 ; — Q_1 ; — R_1 ; — P_2

图 8 随 ω 增大的多初值分岔图和 TLE 图

Fig.8 Diagrams of multi-initial bifurcation and TLE via ω

右侧,橘色分岔曲线由 Q_1 在 $M_{12}(\omega = 0.836)$ 分岔为 Q_2 , Q_2 在 $G_{24}(\omega = 0.945)$ 分岔为 P_4 , P_4 在 $G_{42}(\omega = 1.005)$ 分岔为 R_2 ,图 6(f)~(k)中橘色吸引域由 Q_1S 变为 Q_2S 再变为 P_4S ,最后变为 R_2S 。蓝色分岔曲线 P_2 出现在 $G_{12}(\omega = 0.797)$, P_2 在 $M_{24}(\omega = 0.962)$ 变为 Q_4 , Q_4 在 $G_{48}(\omega = 1.019)$ 变为 P_8 ,图 6(f)~(k)中蓝色吸引域由 P_2S 变为 Q_4S 再变为 P_8S 。在 $G_{8N}(\omega = 1.031)$ 右侧,系统出现短暂的混沌运动和 R_2 运动, R_2 在 $G_{2N}(\omega = 1.045)$ 经过鞍结分岔进入混沌运动(对应图 6(l))。

共存运动的出现、消失和转迁(图 8(a)中出现周期跳跃、倍化分岔和鞍结分岔),改变安全盆中的共存子,系统安全盆发生分岔。例如, P_1 在 G_{11} 经周期跳跃为 Q_1 和 R_1 ,安全盆中出现吸引域 Q_1S 和 R_1U (图 6(a), (b)); Q_1 在 M_{12} 倍化为 Q_2 ,导致安全盆中橘色吸引域由 Q_1S 变为 Q_2S (图 6(f)~(g));紫色 R_1 在 G_{1N} 鞍结分岔为 P_N ,导致安全盆中紫色吸引域由 R_1U 变为 P_NU (图 6(d)~(e))。

3.2 参数 k 对系统安全盆侵蚀与分岔的影响

系统参数 $\xi = 0.06, \omega = 1.7, F_m = 0.2, \epsilon = 0.2, D = 1.0$;考察域 $H_2 = \{-3.0 \leq x_1 \leq 3, -3.0 \leq x_2 \leq 3\}$ 。 k 在 $(0, 0.3)$ 内减小时的共存吸引子如表 2 所示。图 9 为 k 减小时的安全盆侵蚀与分岔,图中 P_Q 为概周期运动。以安全盆中吸引子初值计算得到无量纲时间 t 变化的 σ_{n1} 和 σ_{n2} ,如图 10 所示。

图 9(a)为 $k = 0.28$ 时的安全盆。以灰色吸引域中 $(x, \dot{x}) = (0.844\ 28, -1.564\ 286)$ 计算其相图和

表 2 k 减小时的共存吸引子

Tab.2 The coexistence attractors with decreasing of k

k 的值	图例	安全吸引子	不安全吸引子
$k \in (0.265, 0.3)$	图 9(a)	P_1	P_Q
$k \in (0.228, 0.265]$	图 9(b)	P_1, P_2	P_Q
$k \in (0.196, 0.228]$	图 9(c)	Q_2, P_2	P_Q
$k \in (0.186, 0.196]$	图 9(d)	Q_2, P_2	P_3, P_Q
$k \in (0.149, 0.186]$	图 9(e)	P_2	P_3, P_Q
$k \in (0.136, 0.149]$	图 9(f)	P_2	P_3, Q_3, P_Q
$k \in (0.114, 0.136]$	图 9(g)	P_2	P_3, Q_3, P_Q, P_{12}
$k \in (0.109, 0.114]$	图 9(h)	P_2	P_3, Q_3, P_Q
$k \in (0.079, 0.109]$	图 9(i)	P_4	P_3, Q_3, P_Q
$k \in (0.032, 0.079]$	图 9(j)	P_N	P_3, Q_3, P_Q
$k \in (0.031, 0.032]$	—	P_N	P_3, Q_3, R_2
$k \in (0.026, 0.031]$	图 9(k)	P_N	P_3, P_6, R_2
$k \in (0, 0.026]$	图 9(l)	P_N	P_3, P_6

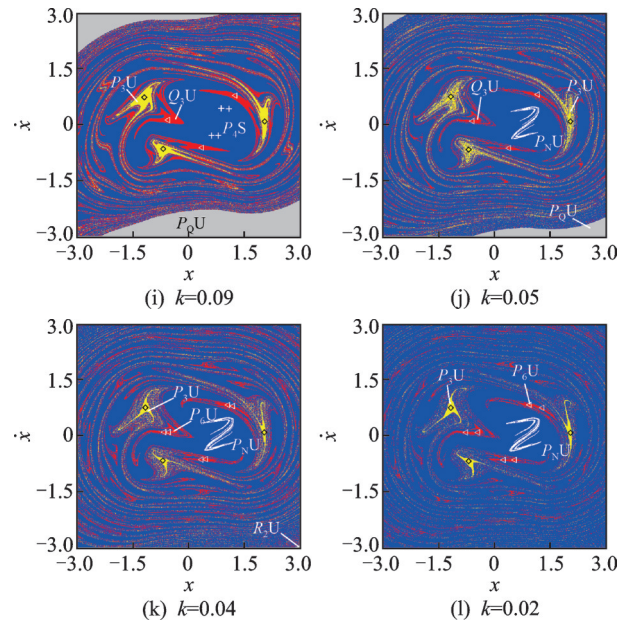
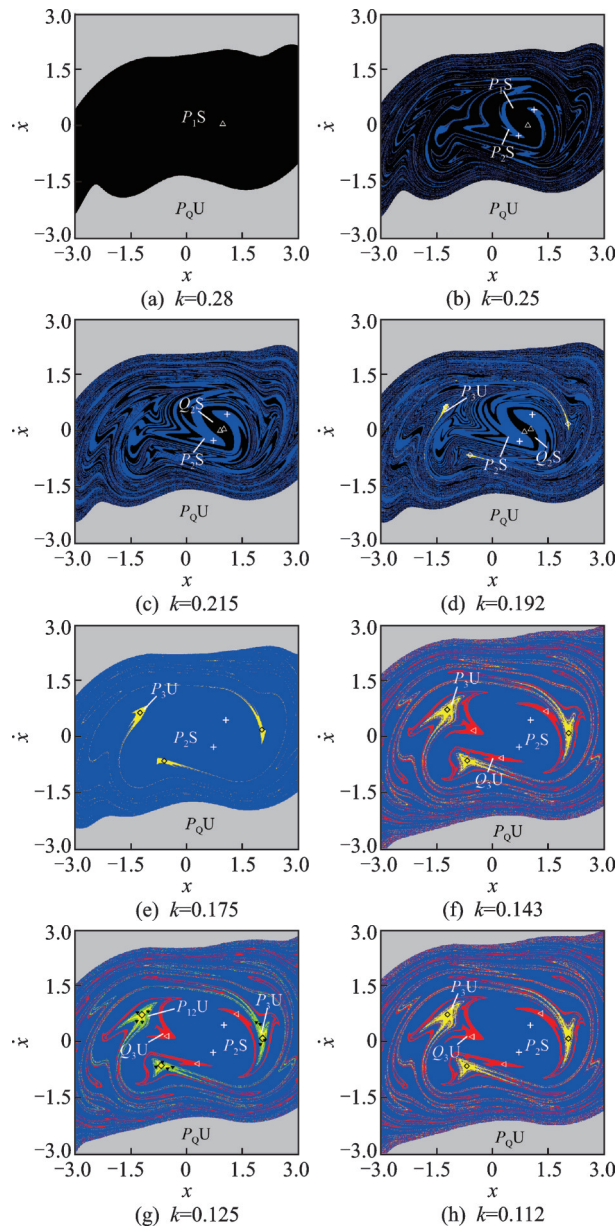


图 9 k 减小的安全盆侵蚀与分岔

Fig.9 Erosion and bifurcation of safe basins via k

Poincaré 映射图 (图 10(a)), 图 10(a) 的灰色吸引域为概周期运动。当 $k > 0.265$ 时, P_1 与 P_Q 吸引子共存。以 P_1 的 $(x, \dot{x}) = (0.964\ 286, 0.055\ 714)$ 和 P_Q 的 $(x, \dot{x}) = (0.844\ 286, -1.564\ 286)$ 为初值, 得到图 10(b)、图 10(c), 图 9(a) 中黑色吸引域为 P_1S , 灰色吸引域为 P_QU 。当 k 减小至 $k = 0.265$ 时, 安全盆中出现 P_2 吸引子和蓝色吸引域 (如图 9(b)), 以 P_2 的 $(x, \dot{x}) = (0.708\ 75, -0.251\ 25)$ 为初值得到图 10(d), 图 9(b) 中蓝色吸引域为 P_2S 。 P_1 吸引子在 $k = 0.228$ 分岔为 Q_2 吸引子 (如图 9(c)), 以 Q_2 的 $(x, \dot{x}) = (0.896\ 25, 0.033\ 75)$ 为初值得到图 10(e), 图 9(c) 中黑色吸引域为 Q_2S 。

当 $k = 0.196$, 安全盆出现 P_3 吸引子和黄色吸引域, 如图 9(d) 所示。以 P_3 的 $(x, \dot{x}) = (-0.604\ 28, -0.638\ 51)$ 为初值得到图 10(f), 图 9(d) 中黄色吸引域为 P_3U 。当 $k = 0.186$ 时, Q_2S 被完全侵蚀 (图 9(e))。当 $k = 0.149$ 时, 安全盆中出现 Q_3 吸引子和红色吸引域 (图 9(f)), 以 Q_3 的 $(x, \dot{x}) = (0.227\ 143, -0.561\ 429)$ 为初值得到图 10(g), 图 9(f) 中红色吸引域为 Q_3U 。当 $k = 0.136$ 时, 安全盆中出现 P_{12} 吸引子和绿色吸引域 (图 9(g)), 以 P_{12} 的 $(x, \dot{x}) = (-0.371\ 45, -0.693\ 75)$ 为初值得到图 10(h), 图 9(g) 中绿色吸引域为 $P_{12}U$, 该吸引子在 $k = 0.114$ 消失 (图 9(h))。

当 $k = 0.109$ 时, 蓝色吸引域中 P_2 吸引子倍化为 P_4 (图 9(i)), 以 P_4 的 $(x, \dot{x}) = (-0.693\ 75, 0.431\ 25)$ 为初值得到图 10(i), 图 9(i) 中蓝色吸引域为 P_4S 。

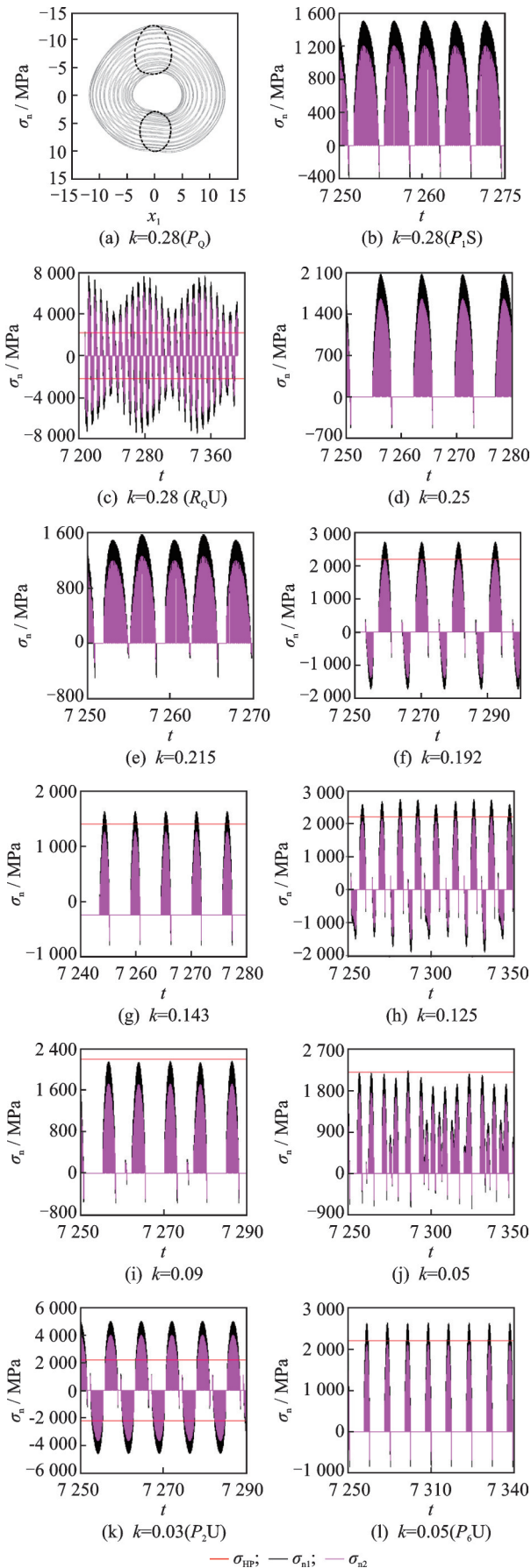


图 10 随无量纲时间 t 变化的 σ_{n1} 和 σ_{n2}
 Fig.10 σ_{n1} and σ_{n2} via dimensionless time t

当 $k=0.079$ 时, P_4 吸引子变为 P_N (图 9(j)), 以 P_N 的 $(x, \dot{x}) = (0.88125, -0.25875)$ 为初值得到图 10(j), 图 9(j) 中蓝色吸引域为 $P_N U$ 。

P_Q 吸引子在 $k=0.032$ 时变为 R_2 吸引子, Q_3 吸引子在 $k=0.031$ 时变为 P_6 吸引子。当 $\omega \in (0.026, 0.031]$ 时, P_N, P_3, P_6 与 R_2 吸引子共存。图 9(k) 为 $k=0.03$ 时的安全盆, 以 R_2 的 $(x, \dot{x}) = (2.961429, -2.97)$ 为初值得到图 10(k), 图 9(k) 中灰色吸引域为 $R_2 U$ 。以 P_6 的 $(x, \dot{x}) = (0.321429, -0.638571)$ 为初值得到图 10(l), 图 9(k) 中红色吸引域为 $P_6 U$ 。当 $k=0.026$ 时, 灰色吸引域消失 (图 9(l))。

图 11 为 k 减小的多初值分岔图 and TLE 图。在 $G_{12} (k=0.265)$ 右侧, 黑色 P_1 和灰色 P_Q 分岔曲线共存, 黑色 TLE 值小于 0, 灰色 TLE 值在 0 附近波动。在 G_{12} , 图 11(a) 中出现蓝色 P_2 分岔曲线, 在 $G_{12} \sim M_{12}$ 内, P_1, P_2 和 P_Q 分岔曲线共存。在 $M_{12} (k=0.228)$, P_1 倍化为 Q_2 , 图 9(b)~(c) 中, 黑色吸引域由 $P_1 S$ 变为 $Q_2 S$ 。在 $G_{23} (k=0.196)$, 图 11(a) 中出现黄色 P_3 分岔曲线, 图 9(d) 中出现黄色吸引域 $P_3 U$ 。在 $G_{22} (k=0.186)$, 图 11(a) 中黑色 Q_2 分岔曲线消失, 图 9(e) 中黑色吸引域 $Q_2 S$ 消失。在 $M_{23} (k=0.149)$, 图 11(a) 中出现红色 Q_3 分岔曲线, 图 9(f) 中出现红色吸引域 $Q_3 U$ 。图 11(a) 中绿色 P_{12} 分岔曲线出现在 $G_{3T} (k=0.136)$, 消失于 $G_{T3} (k=0.114)$, 安全盆如图 9(g)~(h) 所示。蓝色分岔曲线 P_2 在 $G_{24} (k=0.109)$ 变为 P_4 , P_4 在 $G_{4N} (k=0.079)$ 变为 P_N , 图 9(h)~(l) 中, 蓝色吸引域由 $P_2 S$ 变为 $P_4 S$ 再变为 $P_N U$ 。 P_Q 在 $G_{Q2} (k=0.032)$ 分岔为 R_2 ,

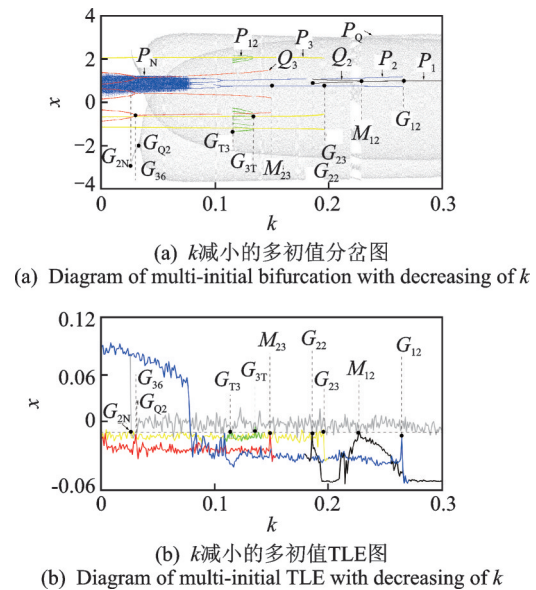


图 11 k 减小的多初值分岔图 and TLE 图
 Fig.11 Diagrams of multi-initial bifurcation and TLE with decreasing of k

Q_3 在 G_{36} ($k=0.031$)倍化为 P_6 。 $G_{36} \sim G_{2N}$ 内, P_N, P_3, P_6 和 R_2 分岔曲线共存,安全盆如图9(k)所示。在 G_{2N} ($k=0.026$)附近, R_2 跳跃为 P_N ,安全盆中灰色吸引域完全被蓝色吸引域侵蚀,如图9(l)所示。

综上,随 k 减小的多初值分岔图中出现周期跳跃和分岔(倍化分岔、鞍结分岔、Hopf分岔),改变安全盆中吸引子的共存,引起安全盆分岔。

4 结 论

1) 齿面接触强度安全条件下,安全盆中共存运动吸引域的安全特性不同;保证系统的初始激励处于安全的吸引域内,可避免齿面接触疲劳的产生。

2) 安全盆中吸引子的出现、消失或数量的变化改变安全盆的运动拓扑结构,导致安全盆分岔。

3) 多初值分岔图中出现周期跳跃、倍化分岔、Hopf分岔或鞍结分岔,改变系统的共存周期解,引起吸引子数量或类型的变化,从而诱发安全盆分岔。

参 考 文 献

- [1] 郜浩冬,张以都. 含摩擦的汇流传动齿轮非线性动力学分析[J]. 振动、测试与诊断,2014,34(4):737-743.
GAO Haodong, ZHANG Yidu. Nonlinear dynamics analysis of convergent transmission gear containing friction[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2014, 34(4): 737-743. (in Chinese)
- [2] SHI J F, GOU X F, ZHU L Y. Modeling and analysis of a spur gear pair considering multi-state mesh with time-varying parameters and backlash[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 134: 582-603.
- [3] 尹桩,苟向锋,朱凌云. 考虑齿面冲击及摩擦的单级齿轮系统动力学建模及分析[J]. 振动工程学报, 2018, 31(6): 974-983.
YIN Zhuang, GOU Xiangfeng, ZHU Lingyun. Dynamic modeling and analysis of single-stage gear system considering tooth surface impact and friction[J]. Journal of Vibration Engineering, 2018, 31(6): 974-983. (in Chinese)
- [4] JAFARI S, PHAM Y T. The relationship between chaotic maps and some chaotic systems with hidden attractors [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2016, 26: 650211.
- [5] SOLIVIO L T, SOUZA D, CALDAS I L. Sudden changes in chaotic attractors and transient basins in a model for rattling in gearboxes[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2004, 21(3): 763-772.
- [6] ERDEM Ü. Examination of the stability of trawlers in beam seas by using safe basins[J]. Ocean Engineering, 2011, 38: 1908-1915.
- [7] WEI D Q, ZHANG B, LUO X S, et al. Effect of noise on erosion of safe basin in power system[J]. Nonlinear Dynamics, 2010, 61: 477-482.
- [8] 尚慧琳,韩元波,李伟阳. 时滞位置反馈对一类非线性相对转动系统混沌运动和安全盆侵蚀的控制[J]. 物理学报, 2012, 63(11): 88-95.
SHANG Huilin, HAN Yuanbo, LI Weiyang. Suppression of chaos and basin erosion in a nonlinear relative rotation system by delayed position feedback [J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(11): 88-95. (in Chinese)
- [9] 龚璞林,徐健学,孙政策. 弱的参数周期扰动对一非线性系统安全域的影响与分形侵蚀安全域的控制[J]. 物理学报, 2001, 50(5): 841-846.
GONG Pulin, XU Jianxue, SUN Zhengce. The influence of weak parametric periodic perturbation on safe basin and the control of the fractal erosion basin [J]. Acta Physica Sinica, 2001, 50(5): 841-846. (in Chinese)
- [10] 刘志亮,刘仕林,李兴林,等. 滚动轴承安全域建模方法及其在高速列车异常检测中的应用[J]. 机械工程学报, 2017, 53(10): 116-124.
LIU Zhiliang, LIU Shilin, LI Xinglin, et al. Safety domain modelling of rolling bearings and its application to anomaly detection for high-speed rail vehicles [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(10): 116-124. (in Chinese)
- [11] 唐进元,刘艳平. 直齿面齿轮加载啮合有限元仿真分析[J]. 机械工程学报, 2012, 48(5): 124-131.
TANG Jinyuan, LIU Yanping. Loaded meshing simulation of face-gear drive with spur involute pinion based on finite element analysis [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(5): 124-131. (in Chinese)
- [12] 张广玉,齐立群,董慧娟,等. 空间飞行器小模数齿轮接触分析及实验研究[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2011, 39(11): 65-70.
ZHANG Guangyu, QI Liqun, DONG Huijuan, et al. Contact analysis and experimental investigation of small module gear in spacecraft [J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition), 2011, 39(11): 65-70. (in Chinese)
- [13] 闻邦椿. 机械设计手册(卷2)[M]. 北京:机械工业出版社, 2010: 45.



第一作者简介:李正发,男,1995年8月生,硕士生。主要研究方向为齿轮传动系统非线性动力学。
E-mail: lzf122909@163.com

通信作者简介:苟向锋,男,1974年6月生,教授、博士生导师。主要研究方向为齿轮传动系统非线性动力学。
E-mail: gouxiangfeng@tiangong.edu.cn