

# 有色噪声激励下基于应变响应的频域拟合算法\*

陆翔宇<sup>1</sup>, 徐俊<sup>2</sup>, 陈怀海<sup>1</sup>, 郑荣慧<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室 南京, 210016)

(2. 中国航空综合技术研究所 北京, 100854)

**摘要** 提出了一种有色噪声激励下基于应变响应的工作模态参数识别方法。首先,从应变频响函数出发,将工作模态参数识别方法应用到有色激励下的应变响应信号,推导出仅利用应变响应的多自由度系统模态参数表达式;其次,对悬臂梁进行数值仿真,分析了模态识别误差并验证了该方法的有效性;最后,通过悬臂梁实验验证了在真实有色噪声环境中,该方法依然具有很高的识别精度。

**关键词** 有色噪声;模态参数识别;应变;工作模态

**中图分类号** TN911.7; O324

## 引言

工作模态参数识别是指在激励未知的情况下,仅利用系统响应来识别系统的模态参数。其优点在于操作简单,不需要大型的激振器,更接近于真实状态。相比于实验室模态分析,工作模态分析有独特优势。工作模态参数识别在土木工程、航空、航天及车辆工程等领域有广泛研究<sup>[1-3]</sup>。Al-Rousan 等<sup>[4]</sup>研究了复合结构建筑中弧形图书馆人行桥的振动水平,在时域中使用数据驱动的随机子空间识别算法提取结构动态特性。王江选<sup>[5]</sup>提出了一种描述时变结构的参数化模型,给出了一种最小二乘时频域时变结构工作模态振型辨识方法。Zhang 等<sup>[6]</sup>提出了频率空间域分解法,分别用于有限元模型验证的大跨度体育场屋盖、损伤检测的公路桥和结构健康监测的大跨度斜拉桥,均取得不错效果。Güne 等<sup>[7]</sup>基于增强频域分解法和随机子空间法,对 5 层砌体结构进行测量,利用 SAP2000v14 软件进行数值模拟,确定了结构的阻尼比、固有频率和振型。Ahmed 等<sup>[8]</sup>在无损条件下估算模态参数,使用有限元工具 SAP2000 对结果进行验证和更新。Hu 等<sup>[9]</sup>提出了一种基于应变的自动运行模态分析算法,用于跟踪水平风机在运行条件下的长期动态行为。Storti 等<sup>[10]</sup>对如何将工作模态参数识别法应用于旋转机械,以及结果可靠性进行分析。Brandt<sup>[11]</sup>研究了一种

基于整个信号离散傅里叶变换的方法,并与其他谱估计和相关估计方法进行了比较。结果表明,该方法不仅具有谱估计和相关函数估计的优点,还具有滤波、积分微分和谐波去除等优点。此外,还提出了一种利用谐波激励缩放模态模型的新方法<sup>[12]</sup>,将该方法推广到考虑多个系统激励和响应度的情况。Lu 等<sup>[13]</sup>对白噪声和有色噪声之间的差异进行研究,使用半功率带宽法确定了有色噪声激励下频率和阻尼比的识别误差范围。

国内外研究机构对工作模态辨识的研究主要还是围绕白噪声假设的加速度响应展开的。对于一般性结构,外部激励在很多情况下不是白噪声。对于有些薄壁零件,加速度传感器的安装会带来附加质量,振动数据测量困难且误差大。针对这些问题,根据矩阵论的相关知识,笔者提出了一种有色噪声激励下基于应变响应的工作模态参数识别方法,推导出了模态参数的表达式,并分析数值计算结果与实验结果,验证了所提方法的正确性。

## 1 理论方法

由模态的线性叠加定理,位移矢量可用模态坐标和振型表示为

$$\boldsymbol{x} = \sum_{r=1}^N q_r \boldsymbol{\varphi}_r \quad (1)$$

其中: $\boldsymbol{x}$  表示位移矢量  $q_r$  为第  $r^{\text{th}}$  模态坐标; $\boldsymbol{\varphi}_r$  为第

\* 航空科学基金资助项目(20200002041001)

收稿日期:2021-12-20;修回日期:2022-03-01

$r$  阶位移模态向量,对位移求偏导数之后即可得到应变。

例如, $\kappa$  方向上的应变可表示为

$$\epsilon_{\kappa} = \frac{\partial u}{\partial \kappa} = \sum_{r=1}^N q_r \varphi_r^{\epsilon} \quad (2)$$

其中: $\varphi_r^{\epsilon} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial \kappa}$ ,为应变向量。

当结构处于稳定状态时,频率和时间函数的模态坐标为

$$q_r = \frac{\varphi_r^T F e^{j\omega t}}{K_r - M_r \omega^2 + j\omega C_r} \quad (3)$$

其中: $K_r, M_r, C_r$  分别为系统的第  $r$  阶模态刚度、模态质量和模态阻尼比; $j = \sqrt{-1}$ ;  $F e^{j\omega t}$  为外部激励力向量;上标 T 表示矩阵转置。

将式(3)代入式(2),得到

$$\epsilon_x = \sum_{r=1}^N q_r \varphi_r^{\epsilon} = \sum_{r=1}^N \frac{\varphi_r^{\epsilon} \varphi_r^T F e^{j\omega t}}{K_r - M_r \omega^2 + j\omega C_r} \quad (4)$$

应变的频率响应函数可以写为

$$H_{\epsilon} = \sum_{r=1}^N \frac{\varphi_r^{\epsilon} \varphi_r^T}{K_r - M_r \omega^2 + j\omega C_r} \quad (5)$$

式(5)揭示了该矩阵是不对称的,不符合麦克斯韦互易定理,这与位移频响函数完全不同。

当外部激励为有色噪声时,频域中激励的自谱密度是不平坦的,表示为

$$G_{xx}(\omega) = \rho \omega^{\tau} \quad (6)$$

其中: $\rho$  为噪声量级; $\tau$  为噪声的激励指数; $\Omega$  为激励的频率。

单自由度系统在有色噪声作用下的响应自功率谱可表示为

$$G_{yy}(\omega) = \rho \omega^{\tau+s} |H_{\epsilon}|^2 = \frac{\rho}{m^2} \frac{\omega^s}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega)^2} = \frac{\rho}{m^2} \frac{1}{[\omega_n^4 + \omega^4 + (4\zeta^2 - 2)\omega_n^2 \omega^2]} \omega^{-s} \quad (7)$$

其中: $\zeta = \tau + s$ ;选用应变或位移作为原始数据时, $s$  为 0;选用加速度传感器采集信号作为原始数据时, $s$  为 2;选用位移信号时, $s$  为 1。

对式(7)两边同时取倒数,得到

$$G_{yy}^{-1}(\omega) = \frac{m^2}{\rho} [\omega_n^4 + \omega^4 + (4\zeta^2 - 2)\omega_n^2 \omega^2] \omega^{-s} \quad (8)$$

式(8)可以写为

$$\begin{bmatrix} G_{yy}^{-1}(\omega_1) \\ G_{yy}^{-1}(\omega_2) \\ \vdots \\ G_{yy}^{-1}(\omega_k)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m^2}{\rho} \\ \frac{m^2}{\rho} (4\zeta^2 - 2)\omega_n^2 \\ \vdots \\ \frac{m^2}{\rho} \omega_n^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^{4-s} & \omega_1^{2-s} & \omega_1^{-s} \\ \omega_2^{4-s} & \omega_2^{2-s} & \omega_2^{-s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_k^{4-s} & \omega_k^{2-s} & \omega_k^{-s} \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中: $\omega_1 \sim \omega_k$  为固有频率附近的  $k$  个点。

令

$$A = \begin{bmatrix} G_{yy}^{-1}(\omega_1) \\ G_{yy}^{-1}(\omega_2) \\ \vdots \\ G_{yy}^{-1}(\omega_k) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$B = \begin{bmatrix} \omega_1^{4-s} & \omega_1^{2-s} & \omega_1^{-s} \\ \omega_2^{4-s} & \omega_2^{2-s} & \omega_2^{-s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_k^{4-s} & \omega_k^{2-s} & \omega_k^{-s} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{m^2}{\rho} \\ \frac{m^2}{\rho} (4\zeta^2 - 2)\omega_n^2 \\ \vdots \\ \frac{m^2}{\rho} \omega_n^4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

则式(9)可以写为

$$A = BC \quad (13)$$

或

$$C = B^T (BB^T)^{-1} A \quad (14)$$

从式(12)可以看出矩阵  $C$  中的 3 个元素与模态频率和模态阻尼比之间的关系,即

$$\omega_n = \sqrt[4]{C_3/C_1} \quad (15)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{C_2 / (\sqrt{C_1 C_3}) + 2} \quad (16)$$

对于多自由度系统而言,假设激励之间互相独立,各个激励点的量级为  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ ,激励噪声指数为  $\tau$ ,激励的自谱矩阵为一个对角矩阵,可以写为

$$S_{dd} = \begin{bmatrix} \rho_1 \omega^{\tau} & & & \\ & \rho_2 \omega^{\tau} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \rho_n \omega^{\tau} \end{bmatrix} \quad (17)$$

响应谱可以写成频响函数与激励谱的乘积,即

$$Y = Hd \quad (18)$$

其中: $Y, H$  和  $d$  分别为响应谱、频响函数矩阵和激励

励谱。

在第  $r$  阶共振峰内,有色噪声激励下系统的响应谱矩阵可以写为

$$S_{yy}(\omega) = E(\mathbf{y}\mathbf{y}^{*T}) = E(\mathbf{H}\mathbf{d}\mathbf{d}^{*T}\mathbf{H}^{*T}) = \mathbf{H}\mathbf{S}_{dd}\mathbf{H}^{*T} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_r^{\varepsilon}\boldsymbol{\varphi}_r^{\varepsilon T}\mathbf{S}_{dd}\cdot(\boldsymbol{\varphi}_r^{\varepsilon}\boldsymbol{\varphi}_r^{\varepsilon T})^{*T}}{(K_r - M_r\omega^2)^2 + (\omega C_r)^2} = \frac{1}{(K_r - M_r\omega^2)^2 + (\omega C_r)^2} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{S}_{dd}\mathbf{R}^{*T}\mathbf{Q}^{*T} \quad (19)$$

其中:上标 ‘\*’ 表示矩阵的共轭; $E(\cdot)$  表示数学期望。

对  $\boldsymbol{\varphi}_r^{\varepsilon}\boldsymbol{\varphi}_r^{\varepsilon T}$  进行正交三角分解

$$\mathbf{Q}\mathbf{R} = \boldsymbol{\varphi}_r^{\varepsilon}\boldsymbol{\varphi}_r^{\varepsilon T} \quad (20)$$

其中: $\mathbf{Q}$  为酉矩阵; $\mathbf{R}$  为上三角矩阵。

根据矩阵论的相关知识,有

$$\text{rank}(\mathbf{Q}\mathbf{R}) = \text{rank}(\boldsymbol{\varphi}_r^{\varepsilon}\boldsymbol{\varphi}_r^{\varepsilon T}) = \text{rank}(\boldsymbol{\varphi}_r^{\varepsilon}) = 1 \quad (21)$$

其中: $\text{rank}(\cdot)$  为求解矩阵秩。

可以看出, $\mathbf{R}$  中只有一行以及  $\mathbf{Q}$  的第 1 列所代表的是应变模态振型,即

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{Q}_{i1} \quad (22)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (23)$$

在第  $r$  阶共振峰内,对  $S_{yy}(\omega)$  奇异值分解,可得

$$S_{yy}(\omega) \approx \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U}^{*T} = \mathbf{Q} \frac{1}{(K_r - M_r\omega^2)^2 + (\omega C_r)^2} \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{*T} \quad (24)$$

其中

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q} \quad (25)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{R}\mathbf{S}_{dd}\mathbf{R}^{*T}}{(K_r - M_r\omega^2)^2 + (\omega C_r)^2} = \frac{\omega^{\tau}}{(K_r - M_r\omega^2)^2 + (\omega C_r)^2} \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\sigma = \sum_{1 \leq i \leq n} \rho_i R_i^2 \quad (27)$$

结合式(25),(26)可以看出

$$S(1, 1, \omega) = \frac{\sigma}{M_r^2} \frac{\omega^{\tau}}{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_r\omega_r\omega)^2} \quad (28)$$

式(28)写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} S^{-1}(1, 1, \omega_1) \\ S^{-1}(1, 1, \omega_2) \\ \vdots \\ S^{-1}(1, 1, \omega_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M_r^2}{\sigma} \\ \frac{M_r^2}{\sigma} (4\zeta_r^2 - 2)\omega_r^2 \\ \vdots \\ \frac{M_r^2}{\sigma} \omega_r^4 \end{bmatrix} \quad (29)$$

式(29)可以写为

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Omega}\mathbf{Z} \quad (30)$$

求得矩阵  $\mathbf{Z}$  为

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{\Omega}^T \mathbf{\Omega})^{-1} \mathbf{\Omega}^T \mathbf{\Pi} \quad (31)$$

第  $r$  阶系统的模态参数为

$$\omega_r = (\mathbf{Z}_3 / \mathbf{Z}_1)^{\frac{1}{4}} \quad (32)$$

$$\zeta_r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathbf{Z}_2}{\sqrt{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3}}} + 2 \quad (33)$$

图 1 为基于应变的频域拟合算法流程图。

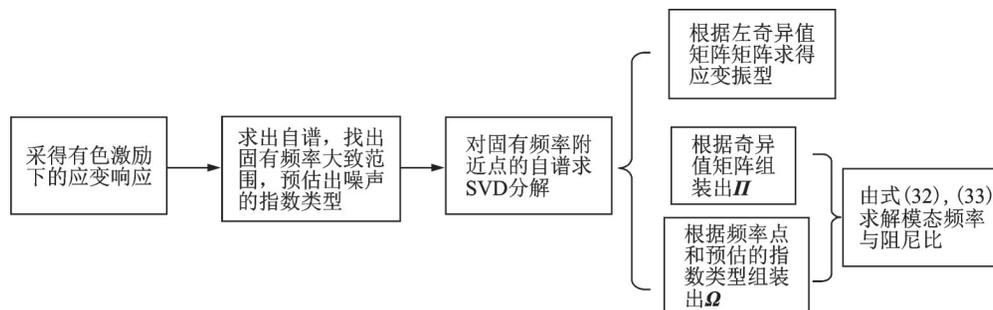
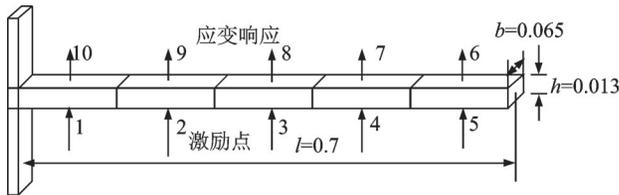


图 1 基于应变的频域拟合算法流程图

Fig.1 Flow chart of frequency domain fitting algorithm based on strain

## 2 数值验证

图2为用于模拟计算的悬臂梁示意图。梁的长宽高分别设置为0.7 m×0.13 m×0.065 m,弹性模量为 $7.1 \times 10^{10}$  GPa,密度为 $2\,700$  kg/m<sup>3</sup>,各阶模态的阻尼比均设置为0.002。用平面梁单元有限元法得到了5个点的应变响应。分析频带宽度为0~800 Hz,谱线数设置为1 600。



1~5为有色噪声激励点; 6~10为系统的应变响应点

图2 用于模拟计算的悬臂梁示意图(单位:m)

Fig.2 Schematic diagram of five degree of freedom cantilever beam(unit:m)

仿真使用紫色噪声作为激励,即噪声的指数等于2。数值计算中的噪声量级设置如表1所示。

表1 数值计算中的噪声量级设置

Tab.1 Noise level setting in numerical calculation

噪声量级	数值
$R_{11}$	$11 \times 10^{-10} \omega^2$
$R_{22}$	$13 \times 10^{-10} \omega^2$
$R_{33}$	$5 \times 10^{-10} \omega$
$R_{44}$	$16 \times 10^{-10} \omega^2$
$R_{55}$	$8 \times 10^{-10} \omega^2$

图3为有色噪声激励时频域信息。图4为悬臂梁应变响应频域信息。其他点的时频域特征类似,故不加以复述。表2为紫色噪声激励下辨识的频率和误差。表3为紫色噪声激励下辨识的阻尼比和误差。可以看出,频率的误差都在1%以内,阻尼比的误差在1.5%以内。图5为紫色噪声激励下悬臂梁

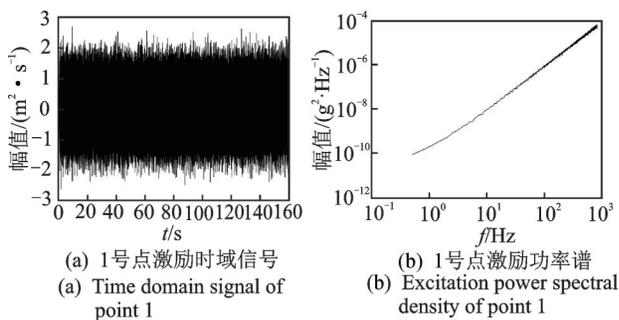


图3 有色噪声激励时频域信息

Fig.3 Information of colored noise excitation in time and frequency domain

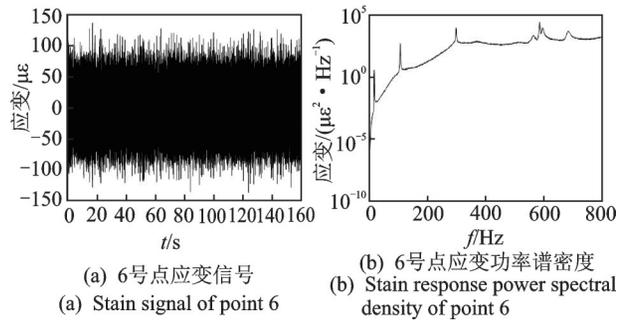


图4 悬臂梁应变响应频域信息

Fig.4 Response of cantilever strain in time and frequency domain

表2 紫色噪声激励下辨识的频率和误差

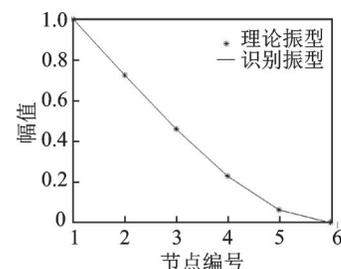
Tab.2 Frequencies and error of identification under purple noise excitation

阶次	理论频率/Hz	识别频率/Hz	误差/%
1	21.976	21.976	0.476
2	137.730	137.740	0.730
3	385.740	385.750	0.259
4	756.430	756.440	0.132

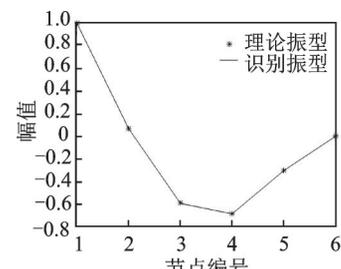
表3 紫色噪声激励下辨识的阻尼比和误差

Tab.3 Damping ratio and error of identification under purple noise excitation

阶次	理论阻尼比	识别阻尼比	误差/%
1	0.2	0.197 3	-1.35
2	0.2	0.197 6	-1.25
3	0.2	0.199 8	-0.08
4	0.2	0.200 1	0.04



(a) 第1阶模态振型  
(a) The first mode shape



(b) 第2阶模态振型  
(b) The second mode shape

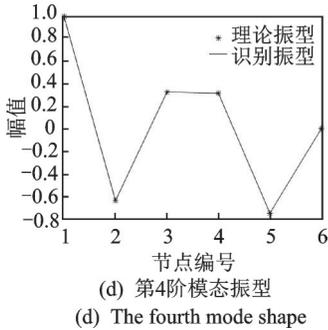
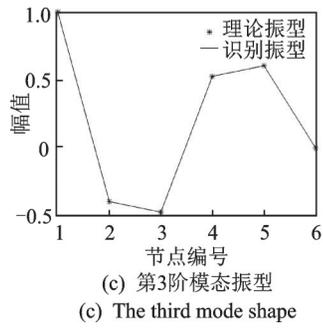


图5 紫色噪声激励下悬臂梁的应变振型

Fig.5 Strain mode shapes of cantilever beams excited by purple noise

的应变振型。前4阶的悬臂梁应变振型识别效果良好,可见,该方法对仅利用应变响应识别模态参数有效。

### 3 实验

图6为基础激励下悬臂梁模型示意图。梁的自由尺寸为0.2 m×0.02 m×0.01 m,相邻两应变片的间距为0.04 m。有色噪声激励由三轴向振动台提供。选用Agilent VXI作为信号发送和数据采集器,采样频率为2 560 Hz。实验以粉色噪声和蓝色噪声为激励,有效值为1 g。

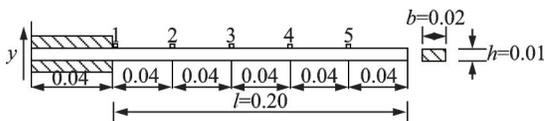


图6 基础激励下悬臂梁模型示意图(单位:m)

Fig.6 Schematic diagram of cantilever beam model under foundation excitation(unit:m)

实验的参照组,即悬臂梁的模态是在白噪声激励下,根据传统工作模态参数识别的方法得到。图7为粉色激励下悬臂梁的应变响应。图8为不同噪声激励下的模态振型。蓝色激励下的识别情况与粉色类似,故不再复述。利用传统的工作模态识别方法和笔者提出的应变工作模态识别算法分别对加速度

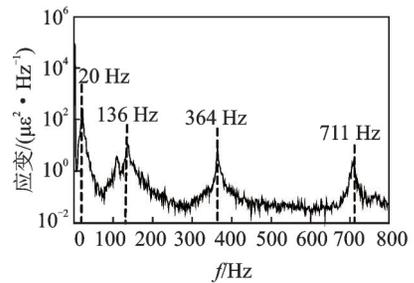
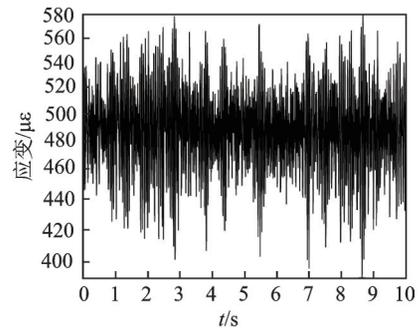


图7 粉色激励下悬臂梁的应变响应

Fig.7 Strain response of cantilever beams excited by pink noise

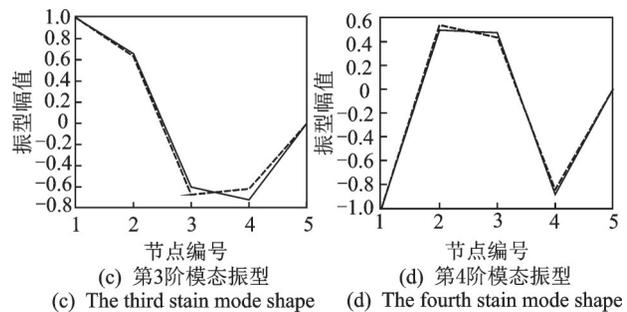
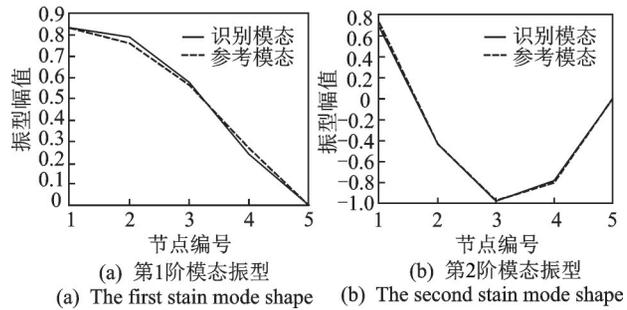


图8 不同噪声激励下的模态振型

Fig.8 Stain mode shape under different noise

信号与应变信号进行处理,对0~800 Hz内的前4阶模态进行分析,谱线数为800。表4, 5分别为前5阶应变模态频率识别结果和阻尼比识别结果。识别出的频率之差小于1%,阻尼比的最大差值为2%。可见,笔者提出的方法是可行的。

表4 前5阶应变模态频率识别结果

Tab.4 Results of first five order strain modal frequency identification

模态	f/Hz		误差/%
	参考值	识别值	
1	19.26	19.28	0.10
2	134.30	135.43	0.84
3	364.30	363.80	-0.14
4	712.70	710.85	-0.26

表5 前5阶应变模态阻尼比识别结果

Tab.5 Identification results of the damping ratio of the first five strain modes %

模态	阻尼比		误差
	参考值	识别值	
1	11.50	11.73	-0.59
2	1.80	1.71	0.59
3	0.42	0.49	-2.00
4	0.60	0.69	-1.43

## 4 结束语

提出了一种基于有色噪声激励应变响应的模态参数识别方法,将激励之间的相关性考虑在内。采用矩阵理论的相关知识和最小二乘拟合技术对应变模态进行解耦,得到各阶应变的模态频率、模态阻尼比和振型,推导得到模态参数的计算公式。用悬臂梁进行仿真和实验测试,其误差均在接受范围之内,证实了该方法的合理性。

## 参 考 文 献

- [1] BRINCKER R, VENTURA C. Introduction to operational modal analysis[M]. [S. l.]: John Wiley and Sons, 2015:52-90.
- [2] RAINIERI C, FABBROCINO G. Operational modal analysis of civil engineering structures: an introduction and guide for applications [M]. [S. l.]: Springer, 2014: 103-150.
- [3] AU S. Operational modal analysis: modeling, bayesian inference, uncertainty laws [M]. [S. l.]: Springer, 2017:70-120.
- [4] AL-ROUSAN R, AL-SMADI Y, LARADHI A. Operational modal analysis of the curved just footbridge induced by human [J]. Procedia Manufacturing, 2020, 44:599-606.
- [5] 王江选. 运行时变结构动力学系统模态振型辨识方法研究[D]. 北京:北京理工大学, 2020.
- [6] ZHANG L, WANG R, TARNURA R. A frequency-

spatial domain decomposition (FSDD) method for operational modal analysis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2010, 24(5): 1227-1239.

- [7] GÜNE S, ANIL Z, GHOROUBI R, et al. Determination of dynamic behavior of masonry structure using with operational modal analysis technique [J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2021, 46: 10473-10487.
- [8] AHMED B, DINU F, MARGINEAN I. Structural health monitoring of steel frame structure by experimental modal parameter identification [J]. Advanced Engineering Forum, 2020, 37:1-13.
- [9] HU W, TANG D, WANG M, et al. Resonance monitoring of a horizontal wind turbine by strain-based automated operational modal analysis [J]. Multidisciplinary Digital Publishing Institute, Energies, 2020, 13(3): 579-600.
- [10] STORTI G, TUCKMANTEL F, MACHADO T. Modal parameters identification of a rotor-journal bearing system using operational modal analysis [J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2021, 43(3):148-162.
- [11] BRANDT A. A signal processing framework for operational modal analysis in time and frequency domain [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 115: 380-393.
- [12] BRANDT A, BERARDENGO M. Cigada global scaling of operational modal analysis modes with the OMAH method [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 117: 52-64.
- [13] LU X, HE X, CHEN H, et al. Operational modal parameter identification with colored noise excitation[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2020,34(2):288-300.



**第一作者简介:**陆翔宇,男,1992年11月生,博士生。主要研究方向为工作模态参数识别、有色噪声激励及信号处理等。曾发表《Operational modal parameter identification with colored noise excitation》(《Chinese Journal of Aeronautics》2020, Vol.34, No.2)等论文。  
E-mail: lqy2573284236@163.com

**通信作者简介:**陈怀海,男,1965年11月生,博士、教授。主要研究方向为振动环境试验。  
E-mail: chhnuaa@nuaa.edu.cn