

考虑结构因素的蜂窝纸板等效模型适用性研究*

杜赛娜^{1,2}, 郭彦峰¹, 王冬梅²

(1. 西安理工大学印刷包装与数字媒体学院 西安, 710048)

(2. 深圳职业技术学院传播工程学院 深圳, 518055)

摘要 为提高蜂窝纸板的数值计算精度、适用不同规格蜂窝纸板等效模型选择,分析了不同等效模型对不同结构蜂窝纸板固有频率的对应等效精度。首先,对 Reissner 等效模型、Ekavall 等效模型和三明治夹芯板模型分别进行有限元建模;其次,将等效板的模态分析与实验结果进行对比,分析不同胞元边长、厚度与芯纸克重对等效模型的精度影响;最后,总结这 3 个变量对不同模型计算精度的影响规律,在此基础上得到蜂窝纸板固有频率解析方程。结果表明:Reissner 理论模型适用于厚度小于等于 20 mm 的蜂窝纸板;Ekavall 等效模型整体精度最高,误差基本低于 10%;三明治夹芯板模型在蜂窝纸板胞元边长为 10 mm 时精度最高;在胞元边长与厚度相同的情况下,芯纸克重对计算精度影响较小;所得解析方程的解析结果与实验结果对比误差在 12.43% 以内。该结论为蜂窝纸板的模型选取提供依据。

关键词 蜂窝纸板;等效模型;模态频率;结构因素

中图分类号 TB332;TB484.1

引言

蜂窝纸板特殊的蜂窝结构使其重量轻、比刚度和比强度较大,所以材料的利用率较高^[1-2]。由于蜂窝结构复杂,影响动力学因素多样,因此在进行蜂窝纸板的动静态力学计算时,学者们一直在寻找更简便与贴切的等效模型。常用的等效模型主要分为 3 类:蜂窝板理论模型、三明治夹芯板理论与等效板理论模型^[3-5]。等效模型均有一定程度的假设。由于假设不同,所以这些理论模型在不同的蜂窝纸板中有着不同的等效优势,在计算耗时、精度和建模难度等方面存在着较大差别。蜂窝夹层板的材料、结构因素、使用环境和边界条件等都会影响等效模型的计算精度^[6-8]。学者们对这些等效模型的等效精度进行了对比。

张铁亮等^[9]对铝蜂窝夹层结构进行了 3 种等效方法的静力分析和模态分析,发现三明治夹芯板理论在铝蜂窝结构中等效最优。刘健等^[10]对不同长厚比的铝蜂窝夹层板进行等效板模型固有频率验证。Luo 等^[11]对航天器中的蜂窝夹层板进行了模型计算精度对比,结果表明,蜂窝板理论是简化航天器结构的最适合方法。文献[12]研究了芯层长度与蜂窝胞壁长度之比对铝蜂窝面内弹性参数的影响。

李贤冰^[13]发现三明治夹芯板理论的精度在铝蜂窝板动力学等效分析中最高。

以上研究多是对金属蜂窝夹层板的模型精度,对纸蜂窝夹层结构没有等效模型的精度探讨。研究纸蜂窝夹层结构参数对等效板模型计算精度的影响规律,对纸蜂窝夹层结构动力学计算时的等效模型选取有重大意义,对蜂窝纸板的制造和选用具有指导意义。笔者首先归纳了 3 种常用的蜂窝等效板模型:Reissner 等效模型^[9,14]、Ekavall 等效模型^[15-16]和三明治夹芯板模型^[17],针对这 3 种模型分别进行有限元建模;其次,将等效板的模态分析与实验结果进行对比,分析不同胞元边长、厚度与芯纸克重对等效模型的精度影响;最后,总结这 3 个变量对不同模型计算精度的影响规律,在此基础上得到蜂窝纸板固有频率解析方程,为蜂窝纸板的模型选取提供依据。

1 蜂窝纸板振动模型建立

基于实验系统构建蜂窝纸板-质量系统的有限元模型,振动模型由蜂窝板模型、质量块、振动台、盖板与连接件 5 部分组成。盖板与振动台均为弹性材料,几何参数分别为 280 mm×240 mm×10 mm 与

* 深圳市科技计划资助项目(GJHZ20180928161004981);广东省教育厅科研团队配套资助项目(2020)
收稿日期:2020-12-30;修回日期:2021-05-17

320 mm×320 mm×20 mm;材料参数:密度为 7 860 kg/m³;弹性模量为 212 GPa;泊松比为 0.288;质量块为三维离散刚体模型,几何参数为 200 mm×200 mm×50 mm。设置其中心点为参考点,参考点在部件部分进行设定,质量变化通过参考点赋予,本研究中取 8 kg。

图 1 为蜂窝纸板几何参数。其中:正六边形芯层上下面板厚度为 t ;芯层厚度为 h ;板的总厚度为 H 。蜂窝芯格子的壁厚为 δ ,边长为 l 。50%湿度下蜂窝原纸材料参数如表 1 所示。其中: G 为原纸克重; T 为原纸厚度。

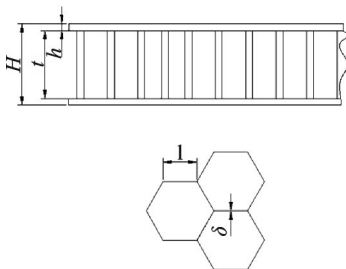


图 1 蜂窝纸板几何参数

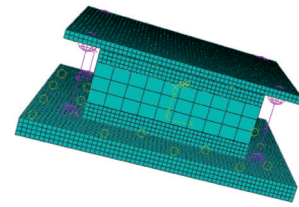
Fig.1 Geometric parameters of honeycomb sandwich plate

蜂窝纸板的有限元建模选择 Reissner 理论模型、Ekavall 等效模型和三明治夹芯板模型,几何参数与材料参数的计算方式分别参考文献[9, 15, 17]。计算所需数据由表 1 给出,其中三明治夹芯板模型参数计算时的 $\gamma=1$ 。建立模型时,Reissner 理论模型与 Ekavall 等效模型为弹性均质板,且为各向同性材料。三明治夹芯板模型为复合板,芯层与表层均为各向异性材料,表层与芯层间为绑定接触。

各部分建模完成后,将模型中所有接触均简化为绑定,4 根螺栓连接简化为弹簧单元,刚度设为 1×10^{10} 。最后划分网格并计算各理论模型的前 10 阶模态频率。图 2 为蜂窝纸板振动系统有限元模型。

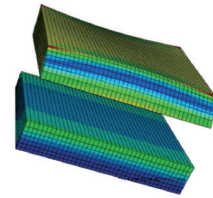
2 结构因素对等效模型影响

以边长为 200 mm,不同胞元边长(l 分别为 6, 8, 10 和 12 mm)与厚度(H 分别为 10, 20, 30, 40 和



(a) 蜂窝纸板振动模型

(a) Honeycomb cardboard vibration model



(b) 蜂窝纸板模态型

(b) Honeycomb cardboard modal shape

图 2 蜂窝纸板振动系统有限元模型

Fig.2 Finite element model of honeycomb sandwich panels vibration system

50 mm) 的蜂窝纸板作为研究对象。为方便记录,试样编号为“芯纸克重-胞元边长-厚度”。例如,编号 110-6-10 表示芯纸克重为 110 g/m²、胞元边长为 6 mm、厚度为 10 mm 的蜂窝板试样。采用正弦扫频实验测试蜂窝纸板的模态频率。图 3 为蜂窝纸板振动实验系统。实验采用苏州苏试试验仪器股份有限公司制造的 DC-300-3 电子振动实验系统,该实验模拟正弦振动下被蜂窝纸板包装的货物受振动情况,振动台上的 2 个传感器用来记录输入振动信号,质量块代表货物,本实验中其质量为 8 kg,质量块上粘贴的传感器用于记录受蜂窝纸板减振效果后的振动信号。扫频方式为对数扫频,扫频速率为 1 oct/min,扫频范围为 5~1 000 Hz,目标谱加速度峰值为 0.5g。在扫频范围内,如果图像出现明显峰值,则该处频率即为系统固有频率。在谐振搜索与驻留-频响(frequency response function,简称 FRF)图像中,横轴为扫频频率,纵轴为加速度放大倍数。实验开始前,在相对湿度为 50%、温度为 23℃的条件下,利用 CS/CP-KMH-1000R 恒温恒湿箱(科明科技有限公司制造)对试样预处理 24 h。整个实验仪器处于开放性环境,为减少实验环境对

表 1 50% 湿度下蜂窝原纸材料参数

Tab.1 Material parameters of honeycomb base paper at 50% humidity

项目	$G/$ (g·m ⁻²)	$T/$ mm	$\rho/$ (kg·m ⁻³)	$E_x/$ MPa	$E_y/$ MPa	$E_z/$ MPa	$G_{xy}/$ MPa	$G_{xz}/$ MPa	$G_{yz}/$ MPa	μ_{xy}	μ_{xz}	μ_{yz}
面纸	230	0.32	718.75	7 762	1 642	38.81	1 382	141.1	46.92	0.135	0.01	0.01
芯纸	110	0.18	611.11	6 251	708.8	31.25	814.6	113.6	20.25	0.099	0.01	0.01
芯纸	140	0.22	636.36	7 340	964.7	36.70	1 030	133.5	27.56	0.106	0.01	0.01

试样影响,该实验在试样从恒温恒湿箱内取出 10 min 内完成。

通过有限元计算软件 ABAQUS 对等效板进行模态分析,并与实验结果进行对比,边界条件与实验相同。计算不同结构参数蜂窝纸板的等效数值,分析结构因素对等效模型精度的影响。

蜂窝纸板多用于缓冲包装,共振是导致产品破损的主要原因,主要起作用为 z 方向的振型。根据



图 3 蜂窝纸板振动实验系统

Fig.3 Vibration experiment system of honeycomb paperboard

筛选发现,起主导作用的为第 6 阶振型,将不同结构参数蜂窝纸板的 3 种等效模型的第 6 阶固有频率与实验数据进行对比。表 2 为实验结果与各理论模型结果的对比。

将 3 种等效板模型模态频率计算结果与实验结果进行对比,得到不同结构因素下的等效板模型模态频率计算误差的绝对值。结构参数对等效板模型模态频率误差的影响如图 4 所示。可见,Ekavall 等效模型与三明治夹芯板模型的误差率整体上要小于 Reissner 理论模型,这主要是由于 Reissner 理论模型简化时忽略了胞元边长对纸板性能的影响,导致只要厚度相同的蜂窝板就会得出同样模型参数,同时极大地忽略了芯纸作用,使芯纸克重对模态频率计算结果的影响几乎没有。就模型本身而言,厚度越小,精度越高,当厚度大于 30 mm 之后,误差率几乎都在 30% 之上,且在同样厚度与胞元边长的情况下,芯纸克重较大的精确度更高。这是由于该理论模型弹性模量和泊松比主要受面纸参数影响,厚度小与克重大都能在一定程度上减少芯纸对蜂窝纸板减振能力的影响。Ekavall 等效模型与三明治夹层

表 2 实验结果与各理论模型结果对比

Tab.2 The experimental results are compared with the theoretical models

试样编号	Reissner 等效模型		Ekavall 等效模型		三明治夹芯板模型		实验结果/ Hz
	固有频率/Hz	误差/%	固有频率/Hz	误差/%	固有频率/Hz	误差/%	
140-6-10	510.09	-3.08	540.84	2.76	587.33	11.60	526.29
140-6-20	400.12	-14.58	494.99	5.67	440.02	-6.07	468.42
140-6-30	220.07	-49.36	407.39	-6.25	361.45	-16.82	434.55
140-6-40	163.04	-56.42	357.37	-4.47	310.97	-16.88	374.10
140-6-50	128.39	-54.12	332.30	18.74	275.03	-1.73	279.86
140-8-20	400.12	-10.27	432.05	-3.13	395.90	-11.22	445.94
140-8-40	163.04	-51.90	319.10	-5.85	278.03	-17.97	338.94
140-10-10	510.09	-0.02	501.32	-1.74	500.46	-1.91	510.19
140-10-20	400.12	0.03	388.61	-2.85	362.90	-9.28	400.01
140-10-30	220.07	-37.15	322.70	-7.84	295.82	-15.51	350.14
140-10-40	163.04	-47.06	298.35	-3.13	254.19	-17.47	307.99
140-10-50	128.39	-57.45	289.98	-3.90	225.02	-25.43	301.74
140-12-20	400.12	18.35	356.53	5.46	337.42	-0.19	338.07
140-12-40	163.04	-46.30	284.38	-6.33	236.17	-22.21	303.59
110-6-20	400.14	-10.97	413.90	-7.90	373.92	-16.80	449.42
110-8-20	400.14	16.54	361.25	5.21	332.00	-3.31	343.36
110-10-10	510.09	6.39	456.97	-4.69	433.93	-9.50	479.46
110-10-20	400.14	11.23	325.02	-9.65	302.15	-16.01	359.73
110-10-30	220.08	-29.64	283.08	-9.50	246.29	-21.27	312.81
110-10-40	163.05	-41.74	270.65	-3.29	216.32	-22.70	279.86
110-10-50	128.39	-48.26	247.85	-0.12	209.40	-15.61	248.14
110-12-20	400.14	34.71	300.49	1.16	280.83	-5.45	297.03

板等效模型均为等厚度模型,且胞元边长、纸板厚度与面值和芯纸材料参数均会影响2种模型的等效板数值,但由于蜂窝纸板减振能力主要由芯层垂直方向提供,三明治夹芯板模型虽然等效为夹层板与各项异性材料,等效精度却没有随着等效过程的复杂性而增加。对比来看,Ekavall等效模型整体误差率最大不超过18.74%,在3种等效模型中可以看作最优,此模型在胞元边长较小时,50 mm的厚板误差率更大,但当胞元边长增大时,厚板误差会减小。这是因为该模型的核心是依据构成实体结构材料的弹性

模量来计算等效结构的弹性模量。拥有较小胞元边长的蜂窝纸板芯层弹性会变差,而厚度增加会削弱这一特征,使等效结果变差;胞元边长更大时,芯层弹性减小,此时厚度更大反而能增强这一特征。三明治夹芯板模型在芯纸为140 g/m²的模型中误差率大多在10%~20%,相比之下芯纸克重较小的误差率更小。在厚度不大于20 mm的蜂窝纸板中,该模型表现出了最小的整体误差率,误差率均在11.6%以下,在此基础上,胞元边长的增大会让厚度大于20 mm纸板的误差率更大。

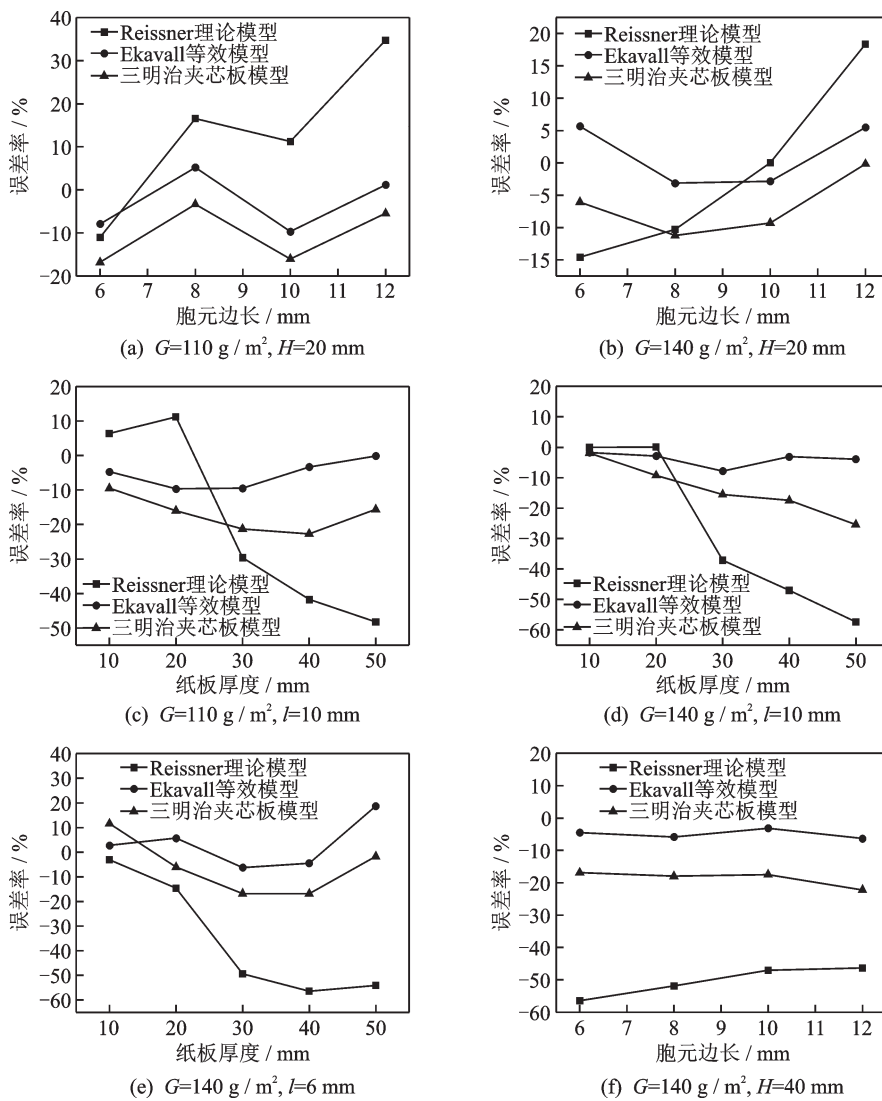


图4 结构参数对等效板模型模态频率误差的影响

Fig.4 Influence of structural parameters on modal frequency error of equivalent plate model

3 固有频率解析方程

在蜂窝纸板实际应用中,强迫振动一般由支撑件的运动引起,此时系统的单自由度振动模型如图5

所示。图中: X_s 为支座位移; x 为质量块位移; m 为质量块的质量。由于振动带来的变形极其微小,所以蜂窝纸板在振动过程中仅发生弹性形变。

振动系统的固有频率为

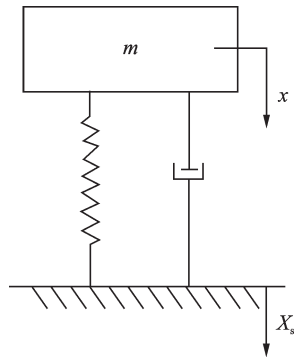


图 5 单自由度振动模型

Fig 5 Single degree of freedom vibration model

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1)$$

其中: k 为刚度系数。

由于蜂窝纸板在此过程中为弹性形变,所以刚度系数可表示为

$$k = \lambda \frac{EA}{H} \quad (2)$$

其中: E 为蜂窝纸板轴向弹性模量; A 为面积; H 为蜂窝纸板厚度。

由于式(2)为基础公式,引入针对蜂窝纸板的修正因子 λ 。根据等效模型误差率对比结果,发现等厚度等效模型Ekavall等效模型更加贴合。弹性模量可表示为

$$E = \frac{E_f^2 E_{cz} H}{2E_f E_{cz} t + E_f^2 h} \quad (3)$$

$$E_{cz} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\delta}{l} E_c \quad (4)$$

将式(3)、式(2)代入式(1),得到蜂窝纸板-质量块系统固有频率解析方程为

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 0.159\lambda \sqrt{\frac{2\delta E_f^2 E_c A}{4\delta m E_f E_{cz} t + \sqrt{3} m l E_f^2 h}} \quad (5)$$

表 3 为不同结构参数蜂窝纸板修正因子,发现 λ 集中在 0.514~0.654,取平均数 $\lambda=0.59$ 并代入式(5),得到最终固有频率解析方程为

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 0.094 \sqrt{\frac{2\delta E_f^2 E_c A}{4\delta m E_f E_{cz} t + \sqrt{3} m l E_f^2 h}} \quad (6)$$

选取芯纸克重为 110 g/m²的不同规格蜂窝纸板,用实验结果验证该解析方程的可靠性。表 4 为固有频率解析结果误差率。可以发现,误差率小于 12.43%,此解析式可行。此外,在较厚的蜂窝纸板中,解析式的误差率会更大,这是由于厚度增加,固有频率会随之降低,相同的差值在更低的固有频率中会体现出更大的误差率。

表 3 不同结构参数蜂窝纸板修正因子

Tab.3 Correction factors of paper honeycomb sandwich panels with different structural parameters

试样编号	固有频率/Hz	λ
140-6-20	494.99	0.565
140-6-30	407.39	0.573
140-6-40	357.37	0.581
140-6-50	332.30	0.605
140-8-20	432.05	0.569
140-8-40	319.10	0.599
140-10-10	501.32	0.514
140-10-20	388.61	0.573
140-10-30	322.70	0.585
140-10-40	298.35	0.627
140-12-20	356.53	0.575
140-12-40	284.38	0.654

表 4 固有频率解析结果误差率

Tab.4 Error rate of natural frequency analysis results

试样编号	实验结果/	解析结果/	误差率/%
	Hz	Hz	
110-6-20	449.42	435.38	-3.12
110-8-20	343.36	377.09	9.82
110-10-10	479.46	484.97	1.15
110-10-20	359.73	337.30	-6.23
110-10-30	312.81	273.92	-12.43
110-10-40	279.86	246.59	-11.89
110-10-50	248.14	221.28	-10.82
110-12-20	297.03	307.93	3.67

4 结 论

1) Reissner 理论模型仅在蜂窝纸板厚度较小($H \leq 20$)时误差率较低,误差率在 10% 以下;其余情况下其误差率大于 30%,甚至达到 50%,此时该模型不可使用。

2) Ekavall 等效模型在 3 种模型中误差率最低,但当胞元边长较小($l=6$ mm)时,50 mm 厚度的板误差率较大,且随着胞元边长增大,厚板的误差率在减小。三明治夹芯板模型整体误差率大都小于 20%,且在蜂窝纸板厚度较小时($H \leq 20$)误差率较低,仅在胞元边长较大时($l \geq 10$ mm),厚度大于 40 mm 的板中会出现大于 20% 的误差率。

3) 芯纸克重对模型精度影响相比于胞元边长和厚度较小,且难以找出一致规律。整体上,Reissner 理论模型与三明治夹芯板模型在芯纸克重为 140 g/m²时精度更高,Ekavall 等效模型则相反。

4) 蜂窝纸板固有频率解析方程的误差率在12.43%之内。

参 考 文 献

- [1] LIANG N, WANG D M, GUO Y F, et al. Research progress on vibration transmissibility of honeycomb paperboard [J]. *Packaging Journal*, 2018, 10 (4) : 43-49.
- [2] WANG D M, BAI Z Y, LIAO Q H. 3D energy absorption diagram construction of paper honey-comb sandwich panel [J]. *Shock and Vibration*, 2018, 2018: 1-6.
- [3] IRENEUSZ K. A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels [J]. *Central European Journal of Engineering*, 2011, 1(1): 59-80.
- [4] 胡玉琴. 铝蜂窝夹层板等效模型研究及数值分析[D]. 南京:南京航空航天大学, 2008.
- [5] 苏玲,刘赛,尹进,等. 蜂窝夹层板强度分析模型对比研究[J]. *宇航总体技术*, 2019, 3(5): 23-27.
SU Ling, LIU Sai, YIN Jin, et al. Comparison of strength analysis models for honeycomb core composites [J]. *Astronautical Systems Engineering Technology*, 2019, 3(5): 23-27. (in Chinese)
- [6] CAIL C, ZHANG D Y, ZHOU S H, et al. Investigation on mechanical properties and equivalent model of aluminum honey comb sandwich panels [J]. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 2018, 27(12): 6585-6596.
- [7] ZHAO X Q, WANG G, YU D L. Experiment verification of equivalent model for vibration analysis of honeycomb sandwich structure [J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2014, 624: 280-284.
- [8] GUO N, CHEN H, ZHANG Z, et al. Comparative study of dynamically equivalent modeling methods for honeycomb sandwich structure: numerical simulations and experiments[J]. *Mechanical Sciences*, 2020, 11(2): 317-328.
- [9] 张铁亮,丁运亮,金海波. 蜂窝夹层板结构等效模型比较分析[J]. *应用力学学报*, 2011, 28(3): 275-282, 327.
ZHANG Tieliang, DING Yunliang, JIN Haibo. Comparative analysis of equivalent models for honeycomb sandwich plates [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2011, 28(3): 275-282, 327. (in Chinese)
- [10] 刘健,周春燕. 长厚比对正六边形铝蜂窝夹层板等效板模型动力学计算精度的影响[J]. *复合材料学报*, 2016, 33(8): 1838-1847.
LIU Jian, ZHOU Chunyan. Influence of length-thickness ratio on dynamics calculation accuracy of equivalent plate model of hexagonal aluminum honeycomb sandwich plate [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2016, 33(8): 1838-1847. (in Chinese)
- [11] LUO H, LIU G, MA S J, et al. Dynamic analysis of the spacecraft structure on orbit made up of honeycomb sandwich plates [J]. 2011 IEEE International Conference on Computer Science and Automation Engineering, 2011, 1:83-87.
- [12] TATARNIK O V , KARPENKOV K S. Development of a computer simulation approach for honeycomb constructions for aerospace application[C]// IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. St Asaph: IOP Publishing, 2015: 12-16.
- [13] 李贤冰. 蜂窝夹层板结构的减振设计[D]. 长沙:国防科学技术大学, 2012.
- [14] 夏利娟,金咸定,汪庠宝. 卫星结构蜂窝夹层板的等效计算[J]. *上海交通大学学报*, 2003, 37(7): 999-1001.
XIA Lijuan, JIN Xianding, WANG Yangbao. Equivalent analysis of honeycomb sandwich plates for satellite structure [J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2003, 37(7): 999-1001. (in Chinese)
- [15] 刘祥. 航空用可快拆蜂窝夹层舱门强度等效模型研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学, 2014.
- [16] 刘志慧. 钢夹层板船体结构强度分析方法研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学, 2010.
- [17] 张明明,吴宏伟,王帅,等. 蜂窝机翼结构计算与优化设计[J]. *机械强度*, 2017, 39(5): 1151-1157.
ZHANG Mingming, WU Hongwei, WANG Shuai, et al. Simulation and optimization design of airfoil honeycombs structure [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2017, 39(5): 1151-1157. (in Chinese)



第一作者简介:杜赛娜,女,1997年9月生,硕士。主要研究方向为蜂窝纸板振动阻尼特性。
E-mail:1073598799@qq.com

通信作者简介:王冬梅,女,1976年10月生,博士、教授。主要研究方向为包装运输与材料。
E-mail:szybz202202@163.com