

# 考虑有效冲击量级的退化-冲击竞争失效建模\*

孙富强<sup>1</sup>, 李艳宏<sup>1</sup>, 程圆圆<sup>2</sup>

(1.北京航空航天大学可靠性与系统工程学院 北京,100191)

(2.中国电子科技集团第五十二研究所 杭州,310012)

**摘要** 在考虑有效冲击量级的前提下,提出了一种综合考虑退化过程的非线性与退化-冲击相依关系的竞争失效系统可靠性评估模型。首先,该模型采用非线性 Wiener 过程描述系统的性能退化过程;其次,根据冲击对系统造成的影响,将随机冲击分为无效冲击、有效冲击和致命性冲击,通过修正退化模型来描述冲击对退化的影响,即无效冲击不会对系统造成损伤,有效冲击会对退化过程造成突变退化量以及退化率增大的影响,对于致命性冲击,使用非齐次泊松过程描述其导致的突发失效过程;最后,将突发失效模型与退化过程模型结合,构建了有效冲击量级下的竞争失效系统可靠性模型。

**关键词** 退化;随机冲击;相依性;竞争失效;有效冲击量级;可靠性

**中图分类号** V57;TB114.3

## 引言

复杂系统失效一般是自然退化失效与外界随机冲击竞争造成的。由于内部结构、运行条件和工作历程等因素,产品退化过程和随机冲击之间往往相互关联、相互影响<sup>[1-2]</sup>。一方面性能退化会使系统更加脆弱,承受随机冲击的能力降低;另一方面,外界冲击可能影响系统性能退化过程,产生阶跃增量或改变退化速率。显然,退化-冲击之间存在一定的相依性。

国内外学者在考虑退化-冲击间相依关系的基础上,针对退化-冲击竞争失效系统可靠性建模方法做了大量工作<sup>[3-9]</sup>。这些研究大多采用线性回归模型来描述系统的退化过程,但回归模型很难解释工作环境中随机因素对退化过程的影响。由于随机过程具有很好的统计性质,能够灵活地描述退化过程中的时间不确定性和工作环境的随机影响,退化量随时间的变化实质上是随机的,因此采用随机过程建立退化模型,更符合工程实际。文献[10]提出了基于 Gamma 过程的导弹竞争失效模型和剩余寿命预测方法。文献[11]采用 Levy 过程描述性能退化轨迹,假设随机冲击会导致退化量突变,建立退化-冲击竞争失效模型。

部分系统对于随机冲击量级具有一定的抵抗能力,只有冲击幅值高于特定水平时,才能够对系统性退化过程造成影响或导致系统发生突发失效,该冲击幅值称为有效冲击量级。文献[12]假设有效冲

击载荷会导致产品性能退化过程产生阶跃增量,建立了竞争失效系统可靠性模型。文献[13]采用  $m$ - $\delta$  冲击模型考虑了系统抵抗冲击载荷的能力,考虑了外界随机冲击对退化量和退化速率两方面的综合影响,构建了系统竞争失效模型。可以看到,尽管现有文献已经在退化-冲击相依竞争关系方面进行了大量研究,但综合考虑退化过程非线性特点以及系统对于冲击抵抗能力的研究较少,尚需针对考虑有效冲击量级情形的竞争系统可靠性建模开展深入研究。笔者基于非线性 Wiener 过程提出了一种综合考虑退化过程非线性、退化-冲击相依性、有效冲击量级的竞争失效系统可靠性评估模型。

## 1 系统描述

本研究的退化-冲击相依竞争系统描述如下。

1) 系统状态可以通过一个性能参数表征,如果该参数的累积退化量  $X(t)$  超过临界失效阈值  $d$ , 发生退化失效。

2) 系统在工作使用过程中会受到外界随机冲击的作用,当随机冲击的幅值小于阈值  $W_L$  时称为无效冲击,该冲击对系统的性能不造成任何影响;当随机冲击幅值介于  $W_L$  与  $W_U(t)$  之间时称为有效冲击,随机冲击将会对退化过程造成退化量和退化速率的影响;当随机冲击幅值大于  $W_U(t)$  时称为致命

\* 可靠性与环境工程技术重点实验室稳定支持项目(WDZC20220101)

收稿日期:2020-12-29;修回日期:2021-02-24

性冲击,随机冲击将导致系统发生突发失效。

3) 随机冲击与退化过程之间相互影响:随机冲击对退化过程的作用可用退化速率影响因子和阶跃退化增量来表征。其中:退化速率影响因子是和有效冲击次数相关的函数;阶跃退化增量  $Y_k$  与冲击幅值  $W_k$  和阈值  $W_L$  之间的差值存在一定关系,可用复合泊松过程来表示;而退化对冲击的影响是通过致命性冲击的发生概率  $p_1(t)$  体现,  $p_1(t)$  是  $W_U(t)$  的函数,意味着退化程度越高,系统受到致命性冲击作用的概率越大。

4) 系统存在 2 种竞争失效机制:致命性冲击导致的突发失效;性能参数的累积退化量超过临界失效阈值导致的系统退化失效。

考虑有效冲击量级的竞争失效机制如图 1 所示。图中,若  $T_c$  时刻到达的随机冲击的幅值  $W_{k+1}$  小于阈值  $W_U(t)$ ,即在不发生突发失效的前提下,当总的退化量  $X(t)$  超过临界阈值  $d$  后,系统无法满足性能要求,判定系统发生退化失效,对应的寿命为  $T_d$ ;若  $T_c$  时刻到达的随机冲击的幅值  $W_{k+1}$  大于阈值  $W_U(t)$  时,系统直接突发失效,对应的寿命为  $T_c$ 。

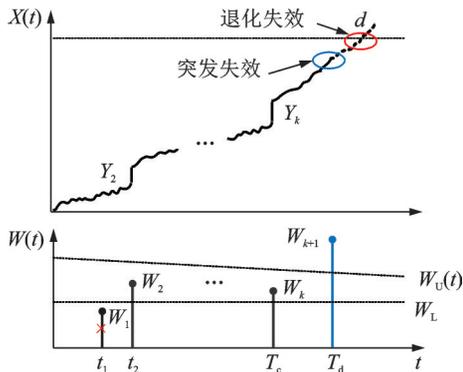


图 1 考虑有效冲击量级的竞争失效机制

Fig.1 Competing failure under effective shock magnitude

## 2 考虑有效冲击量级的竞争失效模型

### 2.1 冲击模型

假设随机冲击服从抵达率为  $\lambda$  的泊松过程  $\{N(t), t > 0\}$ ,  $N(t)$  表示  $t$  时刻已经到达的冲击次数,其中,致命性冲击  $N_1(t)$  次、有效冲击  $N_2(t)$  次以及无效冲击  $N_3(t)$  次,且  $N_1(t)$ ,  $N_2(t)$  和  $N_3(t)$  相互独立。随机冲击的幅值  $\{W_k, k = 1, 2, \dots, \infty\}$  是一组独立同分布随机变量序列,且  $W_k$  服从分布  $G_w(w)$ , 用  $G_w^{(j)}(w)$  表示  $G_w(w)$  的  $j$  重卷积,即  $G_w^{(j)}(w) = P(W_1 + W_1 + \dots + W_j < w)$ 。如果  $G_w(w)$  是均值为  $\mu_w$ 、标准差为  $\sigma_w$  的正态分布,则  $G_w^{(j)}(w) \sim N(j\mu_w, \sqrt{j}\sigma_w)$ ;如果  $G_w(w)$  是均值为  $\mu_w$

的指数分布,则  $G_w^{(j)}(w) \sim N(j, \mu_w)$ 。

假设  $t$  时刻随机冲击到达,该次冲击为致命性冲击的概率为

$$p_1(t) = P(W_U(t) \leq W_j) = 1 - G_w(W_U(t)) \quad (1)$$

该次冲击为有效冲击的概率为

$$p_2(t) = P(W_L \leq W_j < W_U(t)) = G_w(W_U(t)) - G_w(W_L) \quad (2)$$

该次冲击为无效冲击的概率为

$$p_3(t) = P(W_j < W_L) = G_w(W_L) \quad (3)$$

因此,致命性冲击、有效冲击和无效冲击分别服从抵达率函数为  $\lambda p_1(t)$ ,  $\lambda p_2(t)$  和  $\lambda p_3(t)$  的非齐次泊松过程,即

$$P(N_1(t) = k) = \frac{\exp\left(-\lambda \int_0^t p_1(u) du\right) \left(\lambda \int_0^t p_1(u) du\right)^k}{k!} = \frac{\exp\left(-\lambda \int_0^t 1 - G_w(W_U(t)) du\right) \left(\lambda \int_0^t 1 - G_w(W_U(t)) du\right)^k}{k!} \quad (4)$$

$$P(N_2(t) = k) = \frac{\exp\left(-\lambda \int_0^t p_2(u) du\right) \left(\lambda \int_0^t p_2(u) du\right)^k}{k!} = \frac{\exp\left(-\lambda \int_0^t G_w(W_U(t)) - G_w(W_L) du\right) \left(\lambda \int_0^t G_w(W_U(t)) - G_w(W_L) du\right)^k}{k!} \quad (5)$$

$$P(N_3(t) = k) = \frac{\exp\left(-\lambda \int_0^t p_3(u) du\right) \left(\lambda \int_0^t p_3(u) du\right)^k}{k!} = \frac{\exp\left(-\lambda \int_0^t G_w(W_L) du\right) \left(\lambda \int_0^t G_w(W_L) du\right)^k}{k!} \quad (6)$$

### 2.2 冲击导致的突发失效概率

随着时间的增加,系统性能愈来愈差,抵抗致命性冲击的能力越来越弱。假设  $W_U(t)$  为减函数,其形式表示为

$$W_U(t) = m_0 - m_1 t \quad (7)$$

其中:  $m_0$  为致命性冲击幅值下界函数的初值;  $m_1$  为致命性冲击幅值下界的下降速率。

根据前面的计算,  $t$  时刻随机冲击出现,则该冲

击以  $p_1(t)$  的概率导致系统失效,表示为

$$p_1(t) = 1 - G_w(W_U(t)) = 1 - G_w(m_0 - m_1 t) \quad (8)$$

若  $W_k$  服从正态分布,即  $W_k \sim N(\mu_w, \sigma_w^2)$ , 则  $p_1(t)$  表示为

$$p_1(t) = 1 - \Phi\left(\frac{W_U(t) - \mu_w}{\sigma_w}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{(m_0 - m_1 t) - \mu_w}{\sigma_w}\right) \quad (9)$$

若  $W_k$  服从均值为  $\mu_w$  的指数分布,即  $W_k \sim E(\mu_w)$ , 则  $p_1(t)$  可表示为

$$p_1(t) = \exp\left(-\frac{m_0 - m_1 t}{\mu_w}\right) \quad (10)$$

从式(9)~(10)可以看出,  $p_1(t)$  为单调递增函数,表示随着时间的增加,系统会更容易遭受致命性冲击。

系统不发生突发失效的概率为

$$P(T_c > t) = P(N_1(t) = 0) = \exp\left(-\lambda \int_0^t p_1(u) du\right) = \exp\left(-\lambda \int_0^t 1 - G_w(m_0 - m_1 t) du\right) \quad (11)$$

### 2.3 有效冲击影响下的退化过程模型

采用非线性 Wiener 过程对退化过程建模,便于更加准确地描述系统的退化过程

$$X(t) = \int_0^t \mu(t; \theta) dt + \sigma B(t) = \nu \Lambda(t; \theta) + \sigma B(t) \quad (12)$$

其中:  $X(t)$  为  $t$  时刻的系统性能退化量,假设  $X(0) = 0$ ;  $\mu$  为表示退化速率的漂移系数,  $\mu(t; \theta) = \nu d\Lambda(t; \theta)/dt = \nu \Lambda'(t; \theta)$ ;  $\Lambda(t; \theta)$  为表征退化过程非线性的时间尺度函数,例如  $\Lambda(t; \theta) = t^\theta$ ;  $\sigma$  为扩散系数;  $B(\cdot)$  为标准布朗运动。

性能退化过程  $X(t)$  首次超过失效阈值  $d$  的时间  $T$  称为首穿时 (first passage time, 简称 FPT), 即系统发生退化失效时的寿命。

有效冲击出现后,系统退化过程的退化量和退化速率都会受到影响。从图 1 可以看出,每一次有

$$X(t) = \begin{cases} \nu_0 \Lambda(t; \theta) + \sigma B(t) & t \in [0, t_1] \\ \nu_0 e^{r(\Lambda(t; \theta) - \Lambda(t_1; \theta))} + \sigma B(t) + \sum_{i=0}^1 (a(W_i - W_L)) + \nu_0 \Lambda(t; \theta) & t \in (t_1, t_2] \\ \nu_0 e^{2r(\Lambda(t; \theta) - \Lambda(t_2; \theta))} + \sigma B(t) + \sum_{i=0}^2 (a(W_i - W_L)) + \nu_0 \sum_{i=0}^1 e^{ir(\Lambda(t_{i+1}; \theta) - \Lambda(t_i; \theta))} & t \in (t_2, t_3] \\ \vdots \\ \nu_0 e^{kr(\Lambda(t; \theta) - \Lambda(t_k; \theta))} + \sigma B(t) + \sum_{i=0}^k (a(W_i - W_L)) + \nu_0 \sum_{i=0}^{k-1} e^{ir(\Lambda(t_{i+1}; \theta) - \Lambda(t_i; \theta))} & t \in (t_k, \infty) \end{cases} \quad (17)$$

效冲击发生,退化量有阶跃的上升增量,同时退化率加快。这里假设  $t_k$  时刻发生第  $k$  次有效冲击,  $k = 0, 1, \dots, \infty$ , 幅值为  $W_k$ , 且  $\{W_k, k = 1, 2, \dots, \infty\}$  为一组独立同分布的随机变量,与泊松过程相互独立。

#### 2.3.1 冲击导致的阶跃退化增量

不同的有效冲击对退化过程造成的损伤是不同的,令第  $k$  次有效冲击对退化过程造成的退化增量为  $Y_k$ , 假设其与该次有效冲击幅值和  $W_L$  的差值呈线性关系<sup>[5]</sup>, 可表示为

$$Y_k = a(W_k - W_L) \quad (13)$$

其中:  $a$  为  $(W_k - W_L)$  和  $Y_k$  的比例系数。

$t$  时刻有效冲击对退化过程造成的阶跃退化增量  $S(t)$  仍然可用复合泊松过程表示

$$S(t) = \sum_{k=0}^{N_2(t)} Y_k = a \sum_{k=0}^{N_2(t)} (W_k - W_L) \quad (14)$$

#### 2.3.2 冲击导致的退化速率改变

有效冲击在影响系统退化增量的同时,还可能会改变退化速率。考虑系统受到有效量级冲击后出现退化率改变的现象,引入退化速率影响因子  $Q(t)$  表征有效冲击对退化过程造成的影响

$$\nu = \nu_0 Q(t) = \nu_0 e^{(r \cdot N_2(t))} \quad (15)$$

其中:  $r$  为冲击相关系数,取值范围为  $[0, 1]$ 。

在得到累积的阶跃退化增量  $S(t)$  和退化率影响因子  $Q(t)$  的情况下,建立考虑有效冲击量级的退化过程模型为

$$X(t) = \nu_0 \Lambda(t; \theta) Q(t) + S(t) + \sigma B(t) = \nu_0 e^{(r \cdot N_2(t))} \Lambda(t; \theta) + a \sum_{k=0}^{N_2(t)} (W_k - W_L) + \sigma B(t) \quad (16)$$

其中:  $\nu_0$  为初始退化速率;  $\Lambda(t_0; \theta) = 0, t_0 = 0, Y_0 = 0$ 。

### 2.4 退化失效概率分布

采用建立式(16)描述性能参数的退化过程,求解退化失效分布。假设  $t$  时刻之前,有效冲击发生了  $k$  次,  $k = 0, 1, \dots, \infty$ , 即  $N_2(t) = k$ , 冲击发生时刻分别为  $t_1, t_2, \dots, t_k$ 。从式(16)可以看出,每当有效冲击出现,退化量就会发生突变,退化速率也发生了变化,经过  $k$  次冲击后,可以将式(16)展开为

当发生  $k$  次有效冲击后,性能退化量  $X(t)$  随时间变化首次达到退化临界失效阈值  $d$  时,系统发生退化失效,该时刻记为系统的退化失效时间。基于式(16),退化失效时间  $T_d$  定义为

$$T_d = \inf\{t: X(t) = d; t \geq 0\} \quad (18)$$

退化过程未穿越失效阈值的概率为

$$R(t|N_2(t) = k) = P(T_d > t) = P(X(t) < d, X(s) < d, 0 \leq s < t) \quad (19)$$

假设系统在经受  $k$  次有效冲击后,性能参数的退化量会超过失效阈值,导致系统发生退化失效。由于退化轨迹可分为  $k+1$  个阶段,而每阶段的退化速率和初值均不一致,导致其首穿时分布的概率密度函数(probability distribution function, 简称 PDF) 发生变化,因此计算退化过程未穿越失效阈值的概

$$S_B^{(k+1)}(t) = \frac{d - \nu_0 e^{kr} (\Lambda(t; \theta) - \Lambda(t_k; \theta)) - \nu_0 \sum_{i=0}^{k-1} e^{ir} (\Lambda(t_{i+1}; \theta) - \Lambda(t_i; \theta)) - \sum_{i=0}^k (a(W_i - W_L))}{\sigma} \quad (22)$$

$$\mu^{(k+1)}(t) = \nu_0 e^{kr} \Lambda'(t; \theta) \quad (23)$$

率时需要分阶段进行讨论。其中,隐含的前提条件为性能参数在  $[0, t_k)$  区间没有失效。以  $k+1$  阶段 ( $t \in [t_k, \infty)$ ) 为例进行计算,设  $s$  表示  $[0, t)$  内的任意时刻,则  $t$  时刻未发生退化失效的概率为

$$R^{(k+1)}(t) = P(X(t) < d, X(s) < d, 0 \leq s < t) = P(X(t) < d, X^{(1)}(s) < d (0 \leq s < t_1), X^{(2)}(s) < d (t_1 \leq s < t_2), \dots, X^{(k+1)}(s) < d (t_k \leq s < t)) \quad (20)$$

根据马尔科夫性质,将式(20)转化为

$$R^{(k+1)}(t) = R^{(k+1)}(t - t_k) R^{(k)}(t_k) = R^{(k+1)}(t - t_k) R^{(k)}(t_k - t_{k-1}) R^{(k-1)}(t_{k-1}) = R^{(k+1)}(t - t_k) R^{(k)}(t_k - t_{k-1}) \dots R^{(2)}(t_2 - t_1) \cdot R^{(1)}(t_1) \quad (21)$$

根据文献[14],该阶段标准布朗运动的时变阈值  $S_B^{(k+1)}(t)$  和退化速率函数  $\mu^{(k+1)}(t)$  分别为

$$f^{(k+1)}(t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_k)}} \left( \frac{S_B^{(k+1)}(t)}{t-t_k} + \frac{\mu^{(k+1)}(t)}{\sigma} \right) \exp \left( -\frac{(S_B^{(k+1)}(t))^2}{2(t-t_k)} \right) = \frac{O^{(k+1)}(t) L^{(k+1)}(t)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-t_k)^3}} \quad (24)$$

其中:

$$O^{(k+1)}(t) = d - \nu_0 e^{kr} (\Lambda(t; \theta) - \Lambda(t_k; \theta)) - \nu_0 \sum_{i=0}^{k-1} e^{ir} (\Lambda(t_{i+1}; \theta) - \Lambda(t_i; \theta)) - \sum_{i=0}^k (a(W_i - W_L)) + \nu_0 e^{kr} (t - t_k) \Lambda'(t; \theta);$$

$$L^{(k+1)}(t) = \exp \left[ -\frac{\left( d - \nu_0 e^{kr} (\Lambda(t; \theta) - \Lambda(t_k; \theta)) - \nu_0 \sum_{i=0}^{k-1} e^{ir} (\Lambda(t_{i+1}; \theta) - \Lambda(t_i; \theta)) - \sum_{i=0}^k (a(W_i - W_L)) \right)^2}{2\sigma^2(t-t_k)} \right].$$

$R^{(k+1)}(t - t_k)$  可通过以上过程进行计算。

退化过程的首穿时分布函数  $F^{(k+1)}(t - t_k)$  为

$$F^{(k+1)}(t - t_k) = \int_{t_k}^t f^{(k+1)}(u) du \quad (25)$$

改变积分变量,令  $\tau_k = u - t_k$ , 得到

$$R(t|N_2(t) = k) = \begin{cases} R^{(1)}(t) & (0 \leq t < t_1) \\ R^{(2)}(t) = R^{(2)}(t - t_1) R^{(1)}(t_1) & (t_1 \leq t < t_2) \\ \vdots \\ R^{(k+1)}(t) = R^{(k+1)}(t - t_k) R^{(1)}(t_1) R^{(2)}(t_2 - t_1) \dots R^{(k)}(t_k - t_{k-1}) & (t_k \leq t) \end{cases} \quad (28)$$

由于有效冲击是随机发生的,其到达时刻  $t_1, t_2, \dots, t_k$  是随机的,因此为了计算式(28),需要采用蒙特卡洛仿真的方法生成随机冲击发生时刻。假定  $t_1, t_2, \dots, t_k$  服从均匀分布,抽取  $M$  组冲击到达时刻序列,通过式(28)计算每个序列的  $R(t|N_2(t) = k, t_1^m, t_2^m, \dots, t_k^m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ , 然

得到首穿时分布的 PDF 为

$$F^{(k+1)}(t - t_k) = \int_0^{t-t_k} f^{(k+1)}(\tau_k) d\tau_k \quad (26)$$

$$R^{(k+1)}(t - t_k) = 1 - \int_0^{t-t_k} f^{(k+1)}(\tau_k) d\tau_k \quad (27)$$

同理,可得前  $k$  阶段的可靠度函数。综上所述,发生  $k$  次有效冲击后未穿越失效阈值的概率为

后对多个  $R(t|N_2(t) = k, t_1^m, t_2^m, \dots, t_k^m)$  求均值。具体计算过程如下。

1) 已知  $N(t) = k$ , 假定  $t_1, t_2, \dots, t_k$  服从均匀分布,由于  $t_1, t_2, \dots, t_k$  的联合分布与  $k$  个独立同均匀分布随机变量的顺序统计量的联合分布相同,基于此特性生成  $M$  个  $t_1, t_2, \dots, t_k$  的样本为

$$\begin{bmatrix} t_1^1 & t_2^1 & \cdots & t_k^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^M & t_2^M & \cdots & t_k^M \end{bmatrix}_{M \times k} \quad (29)$$

2) 使用上述仿真得到有效冲击的到达时刻数据,  $R(t|N_2(t)=k)$  计算式为

$$R(t|N_2(t)=k) \cong \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M R(t|N_2(t)=k, t_1^m, t_2^m, \dots, t_k^m) \quad (30)$$

其中:  $R(t|N_2(t)=k, t_1^m, t_2^m, \dots, t_k^m)$  通过式(28)计算。

在考虑有效冲击发生的所有情况后,得到系统退化的生存概率为

$$R_d(t) = \sum_{k=0}^{\infty} R(t|N_2(t)=k) P(N_2(t)=k) \cong \sum_{k=1}^{\infty} R(t|N_2(t)=k) \frac{\exp(-\lambda p_2(t)) (\lambda p_2(t))^k}{k!} + \left( 1 - \int_0^t \frac{d - \nu_0(\Lambda(u; \theta) - t\Lambda'(u; \theta))}{\sqrt{2\pi\sigma^2 u^3}} \exp\left(-\frac{(d - \nu_0\Lambda(u; \theta))^2}{2\sigma^2 t}\right) du \right) \exp(-\lambda p_2(t)) \quad (31)$$

性能参数退化过程的首穿时分布的累积失效分布函数为

$$F_d(t) = 1 - R_d(t) = 1 - \left( 1 - \int_0^t \frac{d - \nu_0(\Lambda(u; \theta) - t\Lambda'(u; \theta))}{\sqrt{2\pi\sigma^2 u^3}} \exp\left(-\frac{(d - \nu_0\Lambda(u; \theta))^2}{2\sigma^2 t}\right) du \right) \exp(-\lambda p_2(t)) - \sum_{k=1}^{\infty} R(t|N_2(t)=k) \cdot \frac{\exp(-\lambda p_2(t)) (\lambda p_2(t))^k}{k!} \quad (32)$$

### 2.5 退化-冲击相依竞争模型

系统发生退化失效的时间记为  $T_d$ , 突发失效的时间记为  $T_c$ 。系统的竞争失效机制: 退化量  $X(t)$  超过失效阈值  $d$ , 则发生退化失效; 当致命性冲击出现时, 发生突发失效, 二者相互独立, 其中一种发生都会导致系统失效。因此系统的寿命为

$$T = \min(T_d, T_c) \quad (33)$$

考虑有效冲击量级的前提下, 单个性能参数和随机冲击的相依竞争失效过程的系统可靠性模型为

$$R(t) = P(T_d > t) P(T_c > t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} R(t|N_2(t)=k) P(N_2(t)=k) \right) P(N_1(t)=0) \cong \left( 1 - \int_0^t \frac{d - \nu_0(\Lambda(u; \theta) - t\Lambda'(u; \theta))}{\sqrt{2\pi\sigma^2 u^3}} \exp\left(-\frac{(d - \nu_0\Lambda(u; \theta))^2}{2\sigma^2 t}\right) du \right) \exp\left(-\lambda(p_1(t) + p_2(t))\right) + \sum_{k=1}^{\infty} R(t|N_2(t)=k) \cdot \frac{\exp(-\lambda p_2(t)) (\lambda p_2(t))^k}{k!} \exp(-\lambda p_1(t)) \quad (34)$$

## 3 案例分析

某金属化薄膜电容器对于微小量级的随机冲击具有一定的抵抗能力, 由于性能退化的影响, 抵抗致命性冲击的能力会逐步降低。采用笔者提出的考虑有效冲击量级的竞争失效模型对其开展可靠性分析。案例分析参数设定如表1所示。

表1 案例分析参数设定

Tab.1 Parameters setting for reliability analysis

参数	数值	来源	参数	数值	来源
$D$	2.75	文献[15]	$m_0$	0.55	假设
$\sigma$	0.005	假设	$m_1$	$5 \times 10^{-6}$	假设
$\nu$	$5.4415 \times 10^{-9}$	假设	$W_L$	0.2	假设
$\theta$	2.0	文献[15]	$\mu_w$	0.4	假设
$r$	0.5	文献[13]	$\sigma_w$	0.001	假设
$a$	1	假设	$\lambda$	$2 \times 10^{-4}$	假设

不同有效冲击幅值下限的可靠性曲线如图2所示。图中包含了不考虑有效冲击量级(即  $W_L = 0$ )和考虑有效冲击量级2种竞争失效机制的可靠度曲线( $W_L = 0.2, 0.3, 0.35$ )。可以看到, 考虑有效冲击量级时系统的可靠度明显高于不考虑有效冲击量级的可靠度。考虑有效冲击量级后, 对退化过程产生影响的随机冲击次数减少, 退化失效的概率降低, 系统的可靠度提高, 且随着有效冲击幅值上限的增大, 系统的可靠度明显提高。  $W_L$  取值越大, 说明有效冲击出现的概率越小, 性能参数的退化过程受到的影响越小, 系统的可靠度就会相应地增加。

为了分析随机冲击对可靠性模型的影响, 对有

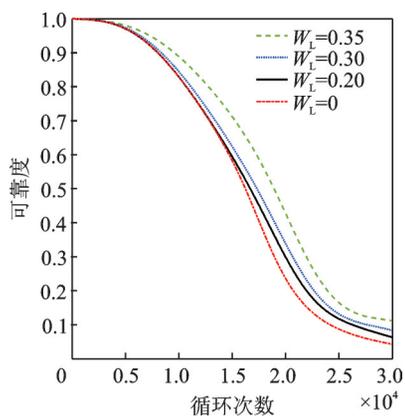


图 2 不同有效冲击幅值下限的可靠性曲线

Fig.2 Reliability curves with different effective shock magnitude limit

效冲击幅值上限的相关参数  $m_0, m_1$  进行敏感性分析,结果如图 3,4 所示。由图 3 可见,致命性冲击幅值的下界函数的初值  $m_0$  从 0.4 增加到 0.7 时,系统的可靠度明显增大。随着  $m_0$  的增大,系统可靠性增强,  $m_0$  代表系统初始对外界冲击的抵抗能力,所提可靠性模型对  $m_0$  比较敏感。

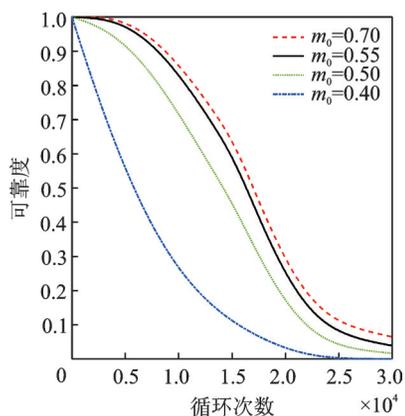


图 3 参数  $m_0$  的敏感性分析

Fig.3 Sensitivity analysis of parameter  $m_0$

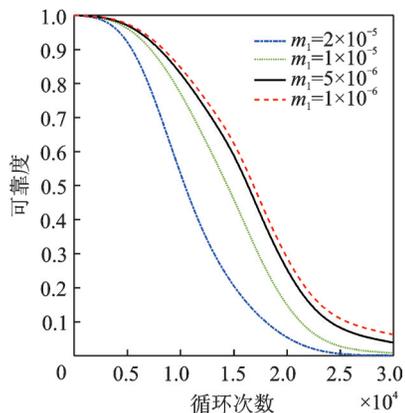


图 4 参数  $m_1$  的敏感性分析

Fig.4 Sensitivity analysis of parameter  $m_1$

由图 4 可见,致命性冲击幅值下界的下降速率  $m_1$  从  $2 \times 10^{-5}$  减小到  $1 \times 10^{-6}$  时,系统的可靠度逐步增长。 $m_1$  取值越小,说明冲击为致命性冲击的概率就越小,系统的可靠度就越高。 $m_1$  的取值变化对于该模型的可靠度影响十分明显,曲线之间的差异较大。

图 5 为系数  $r$  的敏感性分析。 $r$  从 0.05 增加到 0.9,当循环次数小于  $1.5 \times 10^4$  时, $r$  对可靠性的影响几乎可以忽略;循环次数在  $1.5 \times 10^4$  到  $2.1 \times 10^4$  区间时,随着  $r$  的增加,系统的可靠度逐步减小。因为  $r$  取值越大,说明有效冲击对退化模型的退化率影响作用越大,系统的可靠度就会相应地减小;直到电容器循环  $2.1 \times 10^4$  次之后,随着  $r$  不断增加,系统的可靠度也逐步增大。可以看出,随着循环次数不断增加,系统的失效机制变得更加复杂,冲击相关系数  $r$  对系统可靠度的影响是非线性的。

参数  $\mu_w$  的敏感性分析如图 6 所示。 $\mu_w$  从 0.3 增加到 0.5,系统的可靠度逐渐减小增加。 $\mu_w$  取值越大,说明冲击幅值变大,性能参数的退化过程受到的影响就变得越大,系统的可靠度就会相应地减小。

从可靠性分析与参数敏感性分析可以看出,考虑

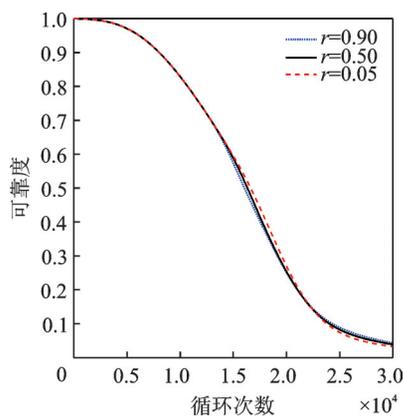


图 5 参数  $r$  的敏感性分析

Fig.5 Sensitivity analysis of parameter  $r$

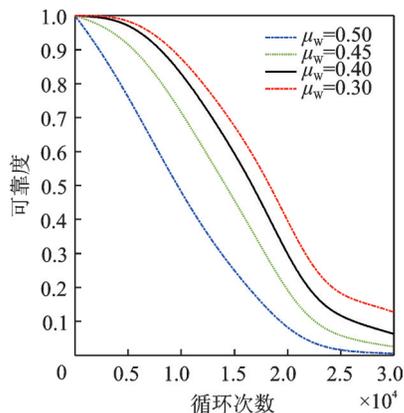


图 6 参数  $\mu_w$  的敏感性分析

Fig.6 Sensitivity analysis of parameter  $\mu_w$

系统具有冲击韧性时,系统的可靠度明显提高。通过图3~6可以看出,改变随机冲击的相关参数 $W_L, m_0, m_1$ 和 $\mu_w$ 后,曲线在循环次数为 $1 \times 10^4 \sim 2 \times 10^4$ 区间时的差异较大,对可靠度的影响十分显著。可见,具有冲击韧性的系统,其随机冲击与系统本身抵抗外界冲击的能力,对系统可靠性的影响在哪个阶段都不容忽视。

## 4 结束语

提出了一种基于非线性Wiener过程的相依竞争失效系统可靠性模型。从冲击幅值角度对随机冲击进行了分类考虑。对比考虑所有随机冲击对退化过程产生影响的系统,采用有效冲击量级在一定程度上隔绝了微小冲击对系统造成的影响。同时,综合考虑外界随机冲击造成退化过程的退化量阶跃增加和退化速率加快这两方面的影响,可以更加准确表征系统退化-冲击的竞争机制,更符合工程实际情况,避免低估系统的可靠性。未来可以考虑使用Gamma过程、逆高斯过程等不同模型对退化过程进行描述,建立具有不同退化过程与随机冲击的竞争失效模型。

## 参 考 文 献

- [1] CHA J H, FINKELSTEIN M. On new classes of extreme shock models and some generalizations [J]. *Journal of Applied Probability*, 2011, 48(1):258-270.
- [2] WANG Y P, PHAM H. A multi-objective optimization of imperfect preventive maintenance policy for dependent competing risk systems with hidden failure [J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2011, 60(4):770-781.
- [3] JIANG L, FENG Q M, COIT D W. Reliability and maintenance modeling for dependent competing failure processes with shifting failure thresholds [J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2012, 61(4):932-948.
- [4] RAFIEE K, FENG Q M, COIT D W. Reliability analysis and condition-based maintenance for failure processes with degradation-dependent hard failure threshold [J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2017, 33(7):1351-1366.
- [5] ZHANG W, JIANG S, LI X Y, et al. An approach to structural reliability evaluation under fatigue degradation and shocks [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, 113: 65-76.
- [6] SONG S L, COIT D W, FENG Q M. Reliability for systems of degrading components with distinct component shock sets [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2014, 132: 115-124.
- [7] RAFIEE K, FENG Q M, COIT D W. Reliability modeling for dependent competing failure processes with changing degradation rate [J]. *IIE Transactions*, 2014, 46(5): 483-496.
- [8] WANG Y P, PHAM H. Modeling the dependent competing risks with multiple degradation processes and random shock using time-varying copulas [J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2012, 61(1): 13-22.
- [9] HAO S H, YANG J. Reliability analysis for dependent competing failure processes with changing degradation rate and hard failure threshold levels [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2018, 118: 340-351.
- [10] 王浩伟, 奚文骏, 冯玉光. 基于退化失效与突发失效竞争的导弹剩余寿命预测[J]. *航空学报*, 2016, 37(4): 1240-1248.  
WANG Haowei, XI Wenjun, FENG Yuguang. Remaining life prediction based on competing risks of degradation failure and traumatic failure for missiles[J]. *Acta Aeronauticae Astronautica Sinica*, 2016, 37(4): 1240-1248. (in Chinese)
- [11] SHU Y, FENG Q M, COIT D W. Life distribution analysis based on Lévy subordinators for degradation with random jumps [J]. *Naval Research Logistics*, 2015, 62(6): 483-492.
- [12] AN Z W, SUN D M. Reliability modeling for systems subject to multiple dependent competing failure processes with shock loads above a certain level [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2017, 157:129-138.
- [13] 孙富强, 李艳宏, 程圆圆. 考虑冲击韧性的退化-冲击相依竞争失效建模[J]. *北京航空航天大学学报*, 2020, 46(12): 2195-2202.  
SUN Fuqiang, LI Yanhong, CHENG Yuanyuan. Competing failure modeling for degradation-shock dependence systems with shock toughness[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2020, 46(12): 2195-2202. (in Chinese)
- [14] SI X S, WANG W B, HU C H, et al. Remaining useful life estimation based on a nonlinear diffusion degradation process [J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2012, 61(1):50-67.
- [15] WANG X L, JIANG P, GUO B, et al. Real-time reliability evaluation with a general Wiener process-based degradation model [J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2014, 30(2):205-220.



**第一作者简介:**孙富强,男,1983年10月生,博士、副研究员。主要研究方向为可靠性与加速试验理论与应用、竞争失效系统可靠性建模。曾发表《Analysis of multivariate dependent accelerated degradation data using a random-effect general Wiener process and D-vine Copula》(《Reliability Engineering & System Safety》2020, Vol.204)等论文。  
E-mail:sunfuqiang@buaa.edu.cn