

# 基于状态空间方法的直升机扭振分析与验证\*

李宗秀<sup>1</sup>, 高亚东<sup>2</sup>, 于仁业<sup>3</sup>

(1. 黑龙江财经学院通识教育学院 哈尔滨, 150025)

(2. 南京航空航天大学直升机研究院 南京, 210016)

(3. 航空工业哈尔滨飞机工业集团有限责任公司飞机设计研究所 哈尔滨, 150066)

**摘要** 针对直升机的机械扭振系统模态易与发动机燃油调节系统耦合发生自激振动, 当机械扭振系统的固有频率与旋翼激振力的频率接近或重合时, 则会发生共振的问题, 采用状态空间方法建立了直升机机械扭振系统动力学分析模型, 计算了某型直升机机械扭振系统的频率、阻尼比和时间常数, 并与直升机地面联合试验台测试的发动机 100% 转速和 75% 转速情况下的扭振一阶频率进行了对比分析, 发现误差在工程应用可接受的范围内。建立的状态空间模型为后续与发动机、燃油控制系统数学模型组合进行稳定性分析打下了基础。

**关键词** 直升机; 扭振; 状态空间; 耦合频率; 稳定性

**中图分类号** TH275+.1; V214.3

## 引言

直升机发动机产生的扭矩通过减速器、传动轴等组成的传动系统驱动旋翼及尾桨旋转, 这些部件连在一起构成了一个机械扭振系统。当直升机采用涡轴发动机作为动力时, 机械扭振系统低阶模态容易与保持发动机输出轴转速恒定的发动机燃油调节系统相互耦合形成自激振动<sup>[1]</sup>。当机械扭振系统的固有频率与旋翼激振力的频率接近或重合时, 会发生较大的扭振响应。直升机传动链振动问题在国内外直升机的研制过程中都出现过, 例如: 我国的延安二号直升机、美国的 CH-53E 和 AH-64A 等直升机在研制过程中都曾出现过扭振问题<sup>[2-4]</sup>。

Fredrickson 等<sup>[5]</sup>针对 CH-47C 直升机试飞中出现的不可接受的发动机扭矩和燃油流量振荡问题, 建立了 CH-47C 扭振系统闭环控制系统模型, 分析表明摆振阻尼器刚度硬化效应提高了扭振耦合模态频率, 通过改变燃油控制增益和时间常数找到了解决方案。顾仲权等<sup>[6]</sup>建立了某型直升机旋翼系统和传动链耦合的扭振系统动力学模型, 采用阻抗匹配法计算了固有频率并绘制共振图。薛海峰等<sup>[2]</sup>创建了机械扭振系统的分析模型, 研究了旋翼转速对孤立桨叶和耦合后桨叶摆振模态固有特性的影响, 给出了避免系统共振的设计措施。王辉等<sup>[7]</sup>将机械扭振系统简化为两自由度振动系统, 建立了运动微分方程, 研究了闭环控制系统的稳定性和使用下限滤

波器改善耦合系统稳定性的方法。朱林等<sup>[8]</sup>建立了某型直升机机械扭振系统与动力控制系统耦合稳定性分析模型, 计算了机械系统固有频率, 并与地面联合试验测试的扭振频率进行了对比, 对直升机耦合动稳定性进行了分析。艾剑波等<sup>[4]</sup>采用提高桨叶摆振刚度的设计措施, 解决了某直升机扭振系统共振问题。这些研究证明了传动链机械系统振动特性是直升机旋翼动力学和全机动力学设计的关键问题<sup>[9]</sup>。若能建立传动链机械扭振系统准确的系统数学模型, 并在设计初期进行机械系统参数分析, 将对直升机扭振特性分析具有重要意义。

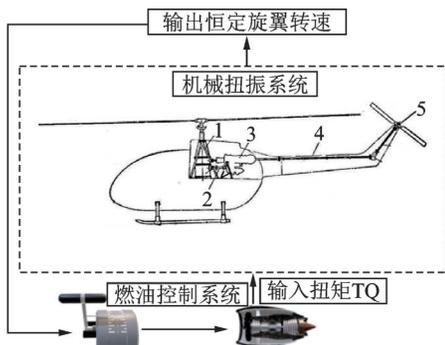
现代控制理论是一种对复杂控制系统进行分析和设计的新方法<sup>[10]</sup>。状态空间模型在建立机械系统数学模型时不用进行拉普拉斯变换, 可以方便地设计系统内部结构参数, 在最优控制问题中采用状态空间模型比较有利。笔者研究了机械扭振系统状态空间模型建立方法, 采用状态空间模型研究了某型直升机机械扭振系统参数变化对扭振频率、阻尼特性的影响, 并与地面联合试验测试的扭振一阶频率进行了对比, 验证了模型的可靠性。

## 1 直升机机械扭振系统状态空间模型

直升机机械扭振系统由主旋翼、旋翼轴、减速器、尾传动轴、尾桨和发动机组成。机械系统与燃油控制系统组成的直升机旋翼转速闭环控制系统如

\* 南京航空航天大学教育教学改革资助项目(2019SJP01);黑龙江财经学院资助项目(XJYB202341, XJYB202344)  
收稿日期: 2022-04-19; 修回日期: 2022-07-11

图 1 所示。在建立机械扭振系统数学模型时对其进行了合理的线性化简化<sup>[11-13]</sup>,主要为:旋翼桨叶只有转动惯量,通过弹簧和阻尼器与桨毂相连;尾桨由于转速高,桨叶的离心力刚度很大,不考虑其弹性变形,将其作为质量盘来处理;发动机和各减速器为只有转动惯量没有弹性变形的刚体“质量圆盘”;旋翼轴和尾传动轴忽略其质量,处理为只有弹性变形的弹簧,发动机和主减速器之间刚性连接;把减速器系统各部分向主旋翼转速当量化,只考虑主旋翼系统阻尼器的阻尼。



1-主减速器; 2-主减输入轴; 3-发动机; 4-尾传动轴; 5-尾桨  
图 1 直升机旋翼转速闭环控制系统

Fig.1 Helicopter rotor speed closed loop control system

直升机机械扭振系统模型如图 2 所示。直升机机械扭振系统参数如表 1 所示。

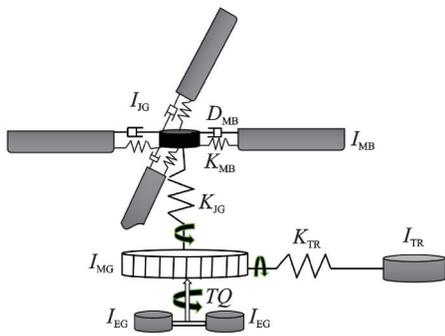


图 2 直升机机械扭振系统模型

Fig.2 Model of helicopter mechanical torsional vibration system

扭振系统共有 4 个自由度,  $x_1, x_2, x_3, x_4$  分别为主减速器角位移、尾桨角位移、主桨毂角位移和主桨叶角位移。

在推导动力学方程时,为书写方便,令  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ , 根据扭矩平衡原理,对机械扭振系统的主减速器、尾桨、桨毂和旋翼分别建立动力学平衡方程,并联立成方程组,即

表 1 直升机机械扭振系统参数

Tab.1 Symbol of helicopter torsional vibration system

参数	物理意义
$I_{MB}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	单片桨叶的转动惯量
$K_{MB}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$	主桨叶与桨毂的连接刚度
$I_{EG}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	单个发动机的转动惯量
$N_{ERP}/(\text{r}\cdot\text{min}^{-1})$	发动机额定功率转速
$N_{MRP}/(\text{r}\cdot\text{min}^{-1})$	主旋翼额定功率转速
$I_{MG}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	主减速器的当量转动惯量
$K_{TR}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$	尾传动轴的当量扭转刚度
$I_{TR}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	尾桨的转动惯量
$K_{JG}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$	旋翼主轴的当量扭转刚度
$N_{MB}/(\text{r}\cdot\text{min}^{-1})$	主旋翼参考转速
$N_{TR}/(\text{r}\cdot\text{min}^{-1})$	尾桨参考转速
$I_{JG}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	桨毂的当量转动惯量
$D_{MB}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1})$	主桨叶阻尼器阻尼
$N_b$	主桨叶片数

$$\begin{cases} (I_{MG} + 2I_{EG}n_2)\ddot{x}_1 + K_{JG}(x_1 - x_3) + \\ K_{TR}(x_1 - x_2) = TQ \\ I_{TR}n_1\ddot{x}_2 + K_{TR}(x_2 - x_1) = 0 \\ I_{JG}\ddot{x}_3 + D_{MB}N_b(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + \\ K_{JG}(x_3 - x_1) + K_{MB}N_b(x_3 - x_4) = 0 \\ I_{MB}N_b\ddot{x}_4 + D_{MB}N_b(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + \\ K_{JG}N_b(x_4 - x_3) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $n_1 = \left(\frac{N_{TR}}{N_{MB}}\right)^2$ ;  $n_2 = \left(\frac{N_{ERP}}{N_{MRP}}\right)^2$ 。

进一步定义矩阵

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} I_{MG} + 2I_{EG}n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{TR}n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{JG} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{MB}N_b \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{MB}N_b & -D_{MB}N_b \\ 0 & 0 & -D_{MB}N_b & D_{MB}N_b \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} K_{JG} + K_{TR} & -K_{TR} & -K_{JG} & 0 \\ -K_{TR} & K_{TR} & 0 & 0 \\ -K_{JG} & 0 & K_{JG} + K_{MB}N_b & -K_{MB}N_b \\ 0 & 0 & -K_{JG}N_b & K_{JG}N_b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可将式(1)写成矩阵形式

$$M \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TQ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中:  $M$  为广义转动惯量矩阵;  $C$  为广义阻尼矩阵;

$K$ 为广义刚度矩阵; $x_i(i=1,2,3,4)$ 为广义位移向量。

对式(2)式进行等效变换

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} = -M^{-1}C \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} - M^{-1}K \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + M^{-1} \begin{bmatrix} TQ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I_{4 \times 4} & O_{4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ O_{4 \times 1} \end{bmatrix} TQ \quad (3)$$

其中: $I_{4 \times 4}$ 和 $O_{4 \times 1}$ 分别为单位矩阵和零列阵。

定义扭振系统位移和速度向量为状态向量 $X$ ,主减速器转速 $\dot{x}_1$ 为输出向量 $Y$ ,发动机扭矩 $TQ$ 为输入向量 $U$ , $U=TQ$ ,构建状态空间模型为

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

将式(3)构建为状态空间标准表达式的形式,则机械扭振系统状态空间数学模型表达式为

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{其中: } A = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I_{4 \times 4} & O_{4 \times 4} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ O_{4 \times 1} \end{bmatrix};$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]; D = 0。$$

## 2 机械扭振系统振动特性分析

根据扭振系统状态空间模型,分析系统的固有特性。将表2所示的某型直升机扭振系统参数<sup>[8]</sup>代入推导的状态空间模型进行机械扭振系统振动特性分析。采用Matlab的damp函数计算状态空间模型各参数组合情况下的系统固有频率( $\omega$ )、阻尼比( $\zeta$ )、时间常数( $1/\omega\zeta$ )。

直升机机械扭振系统振动特性对比如表3所

表2 直升机扭振系统参数<sup>[8]</sup>

Tab.2 Parameters of helicopter torsional vibration system<sup>[8]</sup>

参数	双发	双发	单发
	100% $N_{ERP}$	75% $N_{ERP}$	100% $N_{ERP}$
$I_{MB}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	759.98	1 351.1	759.98
$K_{MB}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$	265 468	149 325	265 468
$I_{EG}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	0.366	0.65	0.183
$N_{ERP}/(\text{r}\cdot\text{min}^{-1})$	20 900	15 675	20 900
$N_{MRP}/(\text{r}\cdot\text{min}^{-1})$	306	230	306
$I_{MG}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	44.19	78.56	44.19
$K_{TR}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$	278 097	494 390	278 097
$I_{TR}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	6.039	6.039	6.039
$K_{JG}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$	2 058 640	365 980	2 058 640
$N_{MB}/(\text{r}\cdot\text{min}^{-1})$	306	299.5	306
$N_{TR}/(\text{r}\cdot\text{min}^{-1})$	1 607	3 510	1 607
$I_{JG}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	150.6	267.7	150.6
$D_{MB}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1})$	—	635	—
$N_b$	—	5	—

示。表4为直升机机械扭振系统振动特性。为了验证状态空间分析模型,把文献[8]的扭振固有频率计算结果也列入表3进行对比。通过表3和表4计算结果分析可知:

1) 第1阶模态为刚体模态;第2阶模态是旋翼摆振模态。可见,旋翼与动力/传动系统耦合后对旋翼桨叶摆振频率产生了较大影响。孤立旋翼一阶

摆振频率为 $f = \frac{1}{6.28} \sqrt{\frac{K_{MB}}{I_{MB}}} = 2.97 \text{ Hz}$ ,与传动系统

耦合以后旋翼摆振一阶频率增大到3.31 Hz。增大的原因是耦合系统等效转动惯量降低幅度大于等效刚度降低幅度,这与扭振系统理论分析结果和试验研究结论一致<sup>[2,14]</sup>。

2) 旋翼一阶摆振模态为低频模态,也称扭振一阶频率,主要影响直升机旋翼与动力/传动系统耦合的扭振系统的动力稳定性,模态的阻尼比为1.5%,有足够的阻尼余量。尾桨模态阻尼比低是由于未考虑尾旋翼系统阻尼所致。

3) 传动模态是高频模态,避开了旋翼激振频率 $5 \Omega(25.5 \text{ Hz})$ ,并且有5%的裕度,不会共振。

4) 扭振系统中的振动模态,随着模态阻尼比增大,时间常数变短,表明系统受扰动后响应速度变快。

5) 相对双发100%转速,发动机转速降低,扭振一阶频率减小;发动机减少为单发时,扭振一阶频率增大<sup>[15]</sup>。

6) 通过与文献[8]双发100%转速状态计算结

果对比,扭振模态一致,模态频率平均误差为1.8%,说明状态空间模型是可用的。

表3 直升机机械扭振系统振动特性对比

Tab.3 Comparison of vibration characteristics of helicopter mechanical torsional vibration system

工况	模态	$f/\text{Hz}$	阻尼比/%	$t/\text{s}$
	刚体	0	0	$-7.39 \times 10^{13}$
本研究双发	旋翼摆振	3.31	1.5	3.2
100% $N_{\text{ERP}}$	尾桨	6.69	0.037	65
	传动	24.20	7.0	$9.4 \times 10^{-2}$
	刚体	0	—	—
文献[8]双发	旋翼摆振	2.94	—	—
100% $N_{\text{ERP}}$	尾桨	7.28	—	—
	传动	23.90	—	—
平均误差/%	所有模态	1.80	—	—

表4 直升机机械扭振系统振动特性

Tab.4 Vibration characteristics of helicopter torsional vibration system

工况	模态	$f/\text{Hz}$	阻尼比/%	$t/\text{s}$
本研究双发	旋翼摆振	2.18	2.44	2.99
75% $N_{\text{ERP}}$	尾桨	8.78	0.013	134
	传动	20.7	4.5	0.17
本研究单发	旋翼摆振	3.93	1.75	2.31
100% $N_{\text{ERP}}$	尾桨	6.91	0.016	14
	传动	24.3	6.8	0.095

### 3 机械扭振系统固有频率测量试验

真实的扭振系统固有频率可以通过直升机地面联合试验台进行测试。地面联合试验台上直升机旋翼系统、传动系统和发动机系统按照真实装机状态进行安装,可以模拟真实工作状态。直升机总距操纵时,由于旋翼的需用功率发生变化,发动机的输出功率也要改变,直升机总距操纵杆和油门是连在一起的,转速调节系统按照总距操纵杆的位置自动调节油量,以保证提供适当的功率。直升机扭振固有频率测量方法是将发动机转速设定在飞行慢车或地面慢车状态,从总距杆处加不同频率低频总距激励<sup>[10]</sup>,诱发旋翼系统的振动。扭振频率测试原理如图3所示。此时测量发动机动力涡轮转速和发动机燃油流量时域数据,通过对测量信号进行频谱分析,找出扭振系统一阶共振频率。

某型直升机采用该方法测量了双发和单发100%转速状态,以及双发75%转速状态下扭振一阶固有频率。动力涡轮输出转速时域曲线如图4所

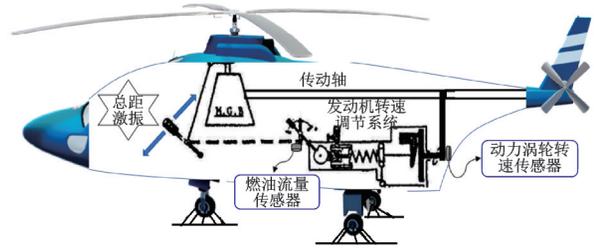


图3 扭振频率测试原理

Fig.3 Test principle of torsional vibration frequency

示。发动机燃油流量时域曲线如图5所示。表5为扭振一阶频率试验结果和计算结果相关性分析。

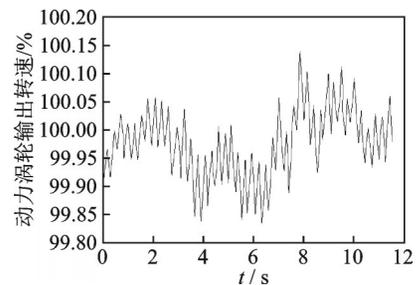


图4 动力涡轮输出转速时域曲线

Fig.4 Time domain curve of power turbine output speed

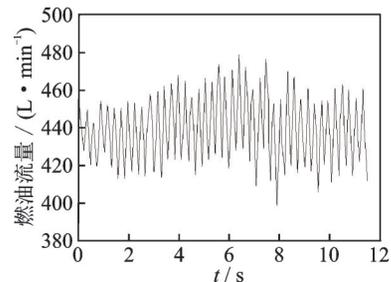


图5 发动机燃油流量时域曲线

Fig.5 Time domain curve of engine fuel flow

表5 扭振一阶频率试验结果和计算结果相关性分析

Tab.5 Correlation analysis between torsional vibration test results and calculation results

工况	试验频率/Hz	分析频率/Hz	误差/%
双发100%	3.0	3.31	10
单发100%	3.6	3.93	9
双发75%	2.3	2.18	-5

通过将扭振试验测试的扭振一阶频率和状态空间模型计算结果进行对比分析可知:扭振一阶频率在100%转速时,误差在10%以内;在75%转速时,误差在5%以内;状态空间模型计算精度误差在10%以内。扭振一阶频率对发动机的转动惯量和主减速器与旋翼的连接刚度变化最敏感,若能通过试验准确获得这些参数,可进一步降低计算误差<sup>[8]</sup>。

## 4 结 论

1) 旋翼摆振模态和尾桨模态与传动系统耦合后,频率将会增大,但仍然为低频模态。

2) 机械扭振系统低阶频率将会影响传动链燃油控制稳定性,高阶频率则要避免与全机激振频率共振。

3) 随着模态阻尼比增大,时间常数变短。

4) 相对发动机双发100%转速,地面慢车发动机转速降低,扭振一阶频率减小;发动机为单发时,扭振一阶频率增大。

## 参 考 文 献

- [1] 吴希明. 直升机动力学工程设计[M]. 北京:航空工业出版社,2017:73-144.
- [2] 薛海峰,向锦武,张晓谷. 直升机旋翼/动力/传动系统模型及耦合影响[J]. 北京航空航天大学学报,2004,30(5):438-443.  
XUE Haifeng, XIANG Jinwu, ZHANG Xiaogu. Coupled helicopter rotor/propulsion/transmission system torsional vibration analytical model and coupled influence investigation [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2004, 30(5):438-443. (in Chinese)
- [3] SHANTHAKUMARAN P, HARDING T, THOMPSON T, et al. Flight simulation model application for AH-64A apache engine integration[C]//The 49th Annual Forum of the American Helicopter Society. St. Louis, MI: [s. n.], 1988:19-21.
- [4] 艾剑波,邓景辉. 某直升机扭振系统共振问题研究[J]. 直升机技术,2006,146(2):14-18.  
AI Jianbo, DENG Jinghui. Solutions study of the helicopter couples system resonance problem [J]. Helicopter Technique, 2006, 146(2):14-18. (in Chinese)
- [5] FREDRICKSON C, RUMFORD K. Factors affecting fuel control stability of a turbine engine/helicopter rotor drive system [J]. Journal of the American Helicopter Society, 1972, 16(1):30-31.
- [6] 顾仲权,杨景新. 直升机传动系统扭振动特性分析[J]. 南京航空航天大学学报,1996,29(6):674-677.  
GU Zhongqua, YANG Jinxin. Analysis of torsional vibration characteristics for transmission system of helicopter [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 1996, 29(6):674-677. (in Chinese)
- [7] 王辉,陈华,刘志文. 直升机发动机控制系统与旋翼/动力传动扭振系统耦合稳定性分析[J]. 直升机技术,2002,132(4):19-23.  
WANG Hui, CHEN Hua, LIU Zhiwen. The stability analysis of the coupled system consists of helicopter engine control system rotor and drive train [J]. Helicopter Technique, 2002, 132(4):19-23. (in Chinese)
- [8] 朱林,陈立平. 直升机传动与发动机控制系统耦合动稳定性研究[D]. 武汉:华中科技大学,2005.
- [9] 邓景辉,艾剑波. 直8金属桨叶升级换代的几个设计关键分析[J]. 直升机技术,2007,151(3):39-44.  
DENG Jinghui, AI Jianbo. Review of some key design issues during Z8 metal rotor blade upgrading development [J]. Helicopter Technique, 2007, 151(3):39-44. (in Chinese)
- [10] OGATA K. 现代控制工程[M]. 卢伯英,译. 北京:电子工业出版社,2003:32-88.
- [11] STEWART A, RUZICKA C, ORMISTON A. Analytical investigations of coupled rotorcraft/engine/drive train dynamic [C]//American Helicopter Society 2nd International Region Aeromechanics Specialists' Conference. Bridgeport, Connecticut: [s. n.], 1995:11-13.
- [12] KUCZYNSKI W A, COOPER D E, TWOMEY W J, et al. The influence of engine/fuel control design on helicopter dynamics and handling qualities [C]//The 35th Annual Nation Forum of the American Helicopter Society. Washington D C: [s. n.], 1979:15-33.
- [13] 张晓谷. 直升机动力学设计[M]. 北京:航空工业出版社,1995:172-188.
- [14] 赖凌云,张若忱,刘永志. 直升机动力传动系统对旋翼摆振模态影响研究与试验验证[J]. 机械传动,2017(4):7-10.  
LAI Lingyun, ZHANG Ruochen, LIU Yongzhi. Research of the influence of helicopter power transmission system on rotor shimmy modal and experimental verification [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2017(4):7-10. (in Chinese)
- [15] 朱文娟,姚文荣. 直升机扭振固有频率测量试验方法[J]. 航空发动机,2018(44):71-75.  
ZHU Wenjuan, YAO Wenrong. Investigation on test of helicopter torsional vibration natural frequency measurement [J]. Aeroengine, 2018, 3(44):71-75. (in Chinese)



**第一作者简介:**李宗秀,女,1980年5月生,硕士、副教授。主要研究方向为数学与应用数学、数学建模。曾发表《截尾三段线性函数上界的估计》(《哈尔滨商业大学学报(自然科学版)》2019年第35卷第4期)等论文。

E-mail: xiuer505@163.com