

# 基于最小二乘离散状态空间的振级计算方法\*

夏遵平<sup>1</sup>, 王彤<sup>1</sup>, 王彧<sup>2</sup>, 范新亮<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室 南京, 210016)

(2. 江苏环保产业技术研究院股份公司 南京, 210036)

**摘要** 在振级计算过程中,需按要求对加速度信号进行计权。最常见的计权方法是利用带通数字滤波器提取各个频段内的加速度信号并乘以对应的计权因子,在合适的滤波参数下,该方法具有良好的计算精度,但计算效率较低。针对此问题,提出一种基于状态空间的加速度计权方法。首先,采用最小二乘算法,将频率计权传递函数转换为单输入-单输出离散系统的状态空间矩阵;其次,将原始加速度信号作为该离散系统的输入,所得系统输出信号即为计权加速度;最后,通过仿真和实测算例验证了该方法的高效性和精确性。

**关键词** 最小二乘;状态空间;计权加速度;振级;环境振动

**中图分类号** TH113;X121

## 引言

近年来,由交通干扰、机械运转等人为因素产生的环境振动问题尤为突出。以交通干扰为例,轨道交通(高铁、地铁、轻轨等)为人们的出行提供了便捷,但列车运行产生的环境振动将严重干扰轨道线路周围居民的生活,甚至损毁周边敏感建筑<sup>[1-2]</sup>。因此,环保部门将环境振动问题作为环境综合治理的重要内容,并为此新修订了环境振动的测试与评价准则<sup>[3-4]</sup>,规定采用人体全身振动评价指标中的计权振动加速度级(简称振级)作为环境振动的评价指标<sup>[5-6]</sup>。

我国新版人体全身振动评价标准<sup>[7]</sup>直接引用国际同名标准 ISO 2631-1—1997<sup>[8]</sup>,该标准详细规定了加速度计权的方式和振级的计算方法,要求加速度需按 1/3 倍频段进行计权<sup>[9]</sup>。因此,对测试得到的离散加速度数据按 1/3 倍频段的方式进行计权是振级计算过程中的重要步骤<sup>[10]</sup>。常见的加速度计权方法有频谱方法<sup>[11]</sup>、百分比带宽滤波法<sup>[12-13]</sup>等。频谱方法首先估计加速度信号功率谱密度,然后根据 Parseval 定理计算每个 1/3 倍频段带内的总功率并乘以对应的计权因子。该方法的优点是利用了快速 Fourier 变换,计算效率很高,但对于要求以 1 s 为积分周期的振级估计,其频率分辨为 1 Hz,故无法基于该 Fourier 谱对频段带小于 1 Hz 的 1/3 倍频段进

行划分,只能采用近似估计,因而可能引入较大的误差<sup>[14]</sup>。等百分比带宽滤波法首先根据 1/3 倍频段带进行数字滤波,得到每个频段带内的时域数据,然后求其均方根并乘以对应的计权因子。该方法避免了低频带宽无法划分的问题,但需要采用滤波器组对每一频段带进行时域滤波,计算效率较低。此外,文献[7]给出了一种用于拟合计权网络曲线的模拟滤波器,采用该滤波器计权不再直接基于 1/3 倍频段的划分,但需要采用合适的方法将其转化为数字滤波器,如文献[10]中采用的双线性变换法。然而,欲使变换后的系统在所关心频段内具有可靠的精度,该方法所需的采样频率要远大于采样定理的要求。在采样时间固定时,较高的采样频率意味着更大的数据样本数,将耗费更多的数据存储和计算开销。

笔者提出一种基于最小二乘-离散状态空间的加速度计权方法。首先,由文献[7]给定的计权参数构建出单输入-单输出(single input single output,简称 SISO)系统的传递函数;然后,采用最小二乘拟合法,将该传递函数转化为离散的 SISO 状态空间模型;最后,以原始加速度数据作为系统输入,得到的系统响应即为计权加速度。本方法避免了 1/3 倍频段的划分和对应频段数据的转换,有效提高了计算效率。通过仿真和实测算例验证了所提方法具有兼顾计算精度和计算效率的优点。

\* 国家自然科学基金资助项目(12272172)

收稿日期:2021-06-28;修回日期:2021-09-03

## 1 理论背景

### 1.1 计权网络的状态空间形式

文献[7]给出了所关心频带内频率计权传递函数的构造参数。对于Z振级,采用 $W_k$ 计权因子组成的计权网络,其由4种功能传递函数组成,分别为

$$H_h(s) = \frac{s^2}{s^2 + 0.8\sqrt{2}\pi s + 0.64\pi^2} \quad (1)$$

$$H_l(s) = \frac{4 \times 10^4 \pi^2}{s^2 + 200\sqrt{2}\pi s + 4 \times 10^4 \pi^2} \quad (2)$$

$$H_t(s) = \frac{15.75\pi s + 393.75\pi^2}{0.63s^2 + 25\pi s + 393.75\pi^2} \quad (3)$$

$$H_s(s) = \frac{0.91s^2 + 4.74\pi s + 20.45\pi^2}{0.91s^2 + 6.7\pi s + 40.85\pi^2} \quad (4)$$

其中: $H_h(s)$ 、 $H_l(s)$ 、 $H_t(s)$ 和 $H_s(s)$ 分别为高通、低通、加速度-速度转换和高阶滤波器的传递函数; $s$ 为拉氏变量。

将式(1)~(4)所代表的滤波器级联,得到计权滤波器为

$$H(s) = H_h(s)H_l(s)H_t(s)H_s(s) \quad (5)$$

式(5)按系数展开为

$$H(s) = \frac{b_8 s^8 + b_7 s^7 + \dots + b_1 s + b_0}{a_8 s^8 + a_7 s^7 + \dots + a_1 s + a_0} \quad (6)$$

联立式(1)~(5),求得 $W_k$ 计权传递函数的分子与分母系数如表1所示。

将这些系数转化为连续 SISO 系统的状态空间,对应的系统矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} -a_7 & -a_6 & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$B = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (8)$$

$$C = [b_7 \ b_6 \ \dots \ b_1 \ b_0] \quad (9)$$

$$D = 0 \quad (10)$$

其中: $A \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ 为状态矩阵; $B \in \mathbb{R}^{8 \times 1}$ 为输入矩阵; $C \in \mathbb{R}^{1 \times 8}$ 为输出矩阵; $D \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ 为前馈矩阵。

同理,根据 $W_d$ 计权值亦可求得用于横向(y)和纵向(x)振级计算的状态空间矩阵,其计权传递函数的分子与分母系数如表2所示。

上述得到的连续系统不能直接将离散时域数据作为输入,在实际应用中还需将其转换为离散系统。

表1  $W_k$ 计权传递函数的分子与分母系数

Tab.1 The numerator and denominator coefficients of the transfer function of the weightings  $W_k$

下标 $i$	分子 $b_i$	分母 $a_i$
0	0	$6.815 \times 10^{12}$
1	0	$4.343 \times 10^{12}$
2	$5.401 \times 10^{11}$	$1.390 \times 10^{12}$
3	$4.672 \times 10^{10}$	$9.494 \times 10^{10}$
4	$2.942 \times 10^9$	$4.168 \times 10^9$
5	$3.100 \times 10^7$	$6.889 \times 10^7$
6	0	$5.393 \times 10^5$
7	0	$1.039 \times 10^3$
8	0	1

表2  $W_d$ 计权传递函数的分子与分母系数

Tab.2 The numerator and denominator coefficients of the transfer function of the weightings  $W_d$

下标 $i$	分子 $b_i$	分母 $a_i$
0	0	$3.937 \times 10^8$
1	0	$2.722 \times 10^8$
2	$6.234 \times 10^7$	$9.343 \times 10^7$
3	$4.961 \times 10^6$	$9.725 \times 10^6$
4	0	$4.159 \times 10^5$
5	0	$9.120 \times 10^2$
6	0	1

为实现该转换,采用最小二乘向量拟合法,使连续系统和离散系统的频响函数在关心频带内误差最小。设连续系统频响与离散系统频响之间的误差函数为

$$E(\omega, \theta) = T\kappa(\omega, \alpha) - \gamma(\omega, \beta) \quad (11)$$

其中: $T = C(j\omega I - A)^{-1}B$ ; $\kappa(\omega, \beta) = \sum_{k=0}^n \Omega_k(\omega)\alpha_k$ 为离散系统的频响函数的分母多项式; $\gamma(\omega, \beta) = \sum_{k=0}^n \Omega_k(\omega)\beta_k$ 为离散系统的频响函数的分子多项式; $\Omega_k(\omega) = \exp(-j\omega k T_s)$ 为离散系统的基函数; $T_s$ 为离散数据的采样间隔; $n$ 为系统的阶次; $\omega$ 为1/3倍频程中心频率的圆频率; $\theta = [\beta \ \alpha]^T$ 为系数向量。

进一步得到所有谱线的误差函数为

$$\sum_{i=1}^{N_f} E^H(\omega_i, \theta) E(\omega_i, \theta) = Q^H(\omega_i, \theta) Q(\omega_i, \theta) \quad (12)$$

其中: $N_f$ 为谱线数;上标H表示共轭转置。

要使式(11)取极小值,可由最小二乘得

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta^T} \theta = J\theta = \begin{bmatrix} P \\ L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \alpha \end{Bmatrix} = 0 \quad (13)$$

其中: $J$ 为Jacobian矩阵。

$P, L$ 分别为

$$P = \begin{bmatrix} \Omega_0(\omega_1) & \cdots & \Omega_n(\omega_1) \\ \Omega_0(\omega_2) & \cdots & \Omega_n(\omega_2) \\ \vdots & & \vdots \\ \Omega_0(\omega_{N_f}) & \cdots & \Omega_n(\omega_{N_f}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$L = \begin{bmatrix} C(j\omega_1 I - A)^{-1} B [\Omega_0(\omega_1) & \cdots & \Omega_n(\omega_1)] \\ C(j\omega_2 I - A)^{-1} B [\Omega_0(\omega_2) & \cdots & \Omega_n(\omega_2)] \\ \vdots & & \vdots \\ C(j\omega_{N_f} I - A)^{-1} B [\Omega_0(\omega_{N_f}) & \cdots & \Omega_n(\omega_{N_f})] \end{bmatrix} \quad (15)$$

将式(13)的等式两端同时左乘Jacobian矩阵的共轭转置,得到正则方程为

$$J^H J \theta = \begin{bmatrix} R & S \\ S^H & T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \alpha \end{Bmatrix} = 0 \quad (16)$$

其中: $R = \text{Re}(P^H P)$ ;  $S = \text{Re}(P^H L)$ ;  $T = \text{Re}(L^H L)$ 。

经过简单化简,可得到分子、分母多项式系数,进而得到离散系统的状态空间矩阵 $A_d, B_d, C_d$ 和 $D_d$ ,其中 $A_d$ 为分母多项式系数向量 $\alpha$ 的伴随矩阵。

## 1.2 振级估计

得到离散状态空间后,计权加速度可表示为SISO系统的输出,即

$$\begin{cases} y(k+1) = A_d y(k) + B_d x(k) \\ x_w(k) = C_d y(k) + D_d x(k) \end{cases} \quad (17)$$

其中: $y(k)$ 为系统的状态响应; $x(k)$ 为原始加速度; $x_w(k)$ 为计权后的加速度。

基于计权后的加速度可采用线性平均或指数平均估计加速度的计权运行均方根值,即

$$\bar{x}_w(n\Delta t) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=n}^{N+n} x_w^2(k\Delta t) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

$$\bar{x}_w(n\Delta t) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^n x_w^2(k\Delta t) \exp\left[\frac{N}{n}\right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

其中: $N$ 为计算时间周期 $T$ 内所包含的数据样本数,通常 $T$ 取1s。

计算得到瞬时振级值为

$$VL(n\Delta t) = 20 \lg \frac{\bar{x}_w(n\Delta t)}{a_0} \quad (20)$$

其中: $a_0 = 10^{-6} \text{ m/s}^2$ ,为基准加速度有效值。

取瞬时振级中的最大值即为最大振级。

## 2 算例分析

### 2.1 离散计权系统

当采样频率为400 Hz时,分别采用双线性变换法<sup>[6]</sup>和本研究的最小二乘状态空间法计算离散系统,得到1~100 Hz内 $W_k$ 和 $W_d$ 计权因子组成的频响函数,不同方法得到的 $W_k$ 和 $W_d$ 计权因子曲线分别如图1,2所示。图中理论值取自于文献[7]中的1/3倍频程频率对应的计权因子。结果显示,在400 Hz(等于 $4f_{\max}$ )的采样率下,通过双线性变换方法获得的离散系统的频响曲线在频率大于31.5 Hz后呈现明显的偏差,而采用本研究方法获得的频响曲线在整个频带内都与理论值匹配较好。

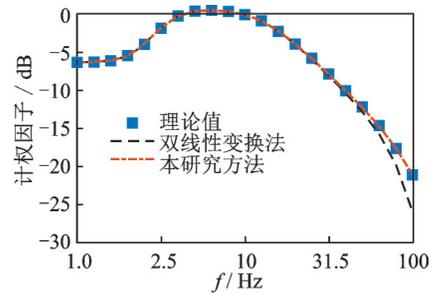


图1 不同方法得到的 $W_k$ 计权因子曲线

Fig.1 Curves of  $W_k$  obtained by different methods

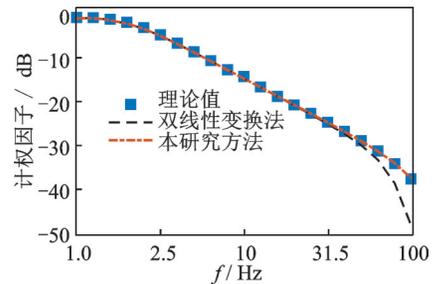


图2 不同方法得到的 $W_d$ 计权因子曲线

Fig.2 Curves of  $W_d$  obtained by different methods

### 2.2 仿真算例

在30~80 Hz频带内按2 Hz等间隔取频率,生成幅值为 $\sqrt{2} \text{ m/s}^2$ 、初始相位随机的26组单频加速度正弦信号。各频率成分的均方根为 $1 \text{ m/s}^2$ ,计权均方根即为计权因子数值,如图3所示。将上述26组信号加法混合,并按400 Hz采样率生成仿真算例,以验证本方法的计算精度和计算效率,仿真振动加速度信号如图4所示。

以Z振级( $W_k$ 计权)的计算为例,采用不同方法估计出的瞬时Z振级曲线如图5所示。其中,理论值由26组频率分布在1/3倍频程带内的数据乘以对

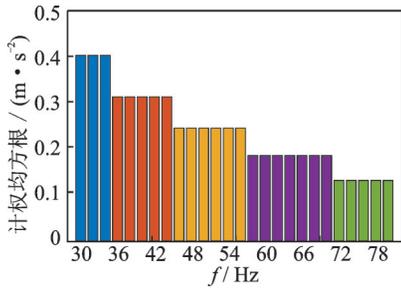


图 3 各频率成分的计权均方根

Fig.3 The weighted-rms of each frequency component

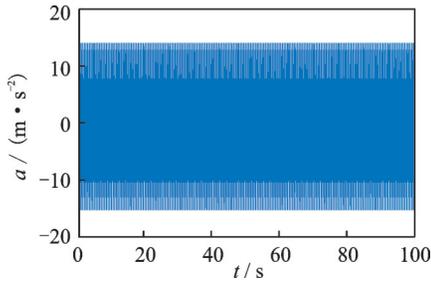


图 4 仿真振动加速度信号

Fig.4 The simulated acceleration signal

应的计权因子求得,滤波法计算值采用等百分比带通滤波器分别滤出各 1/3 倍频程带内的时域数据并乘以对应的计权因子求得。

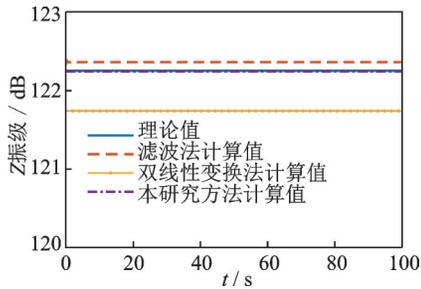


图 5 不同方法估计出的瞬时 Z 振级曲线

Fig.5 Instantaneous VLz values computed by different methods

由图 5 可知,本研究方法的计算精度与滤波法相近,均明显高于双线性变换法,这是由于采用双线性变换法进行连续-离散转化时产生误差造成的。为检验各方法的计算效率,对 5 组分别为 200, 400, 800, 1 600 和 3 200 s 采样长度的数据进行振级计算,不同数据长度下各方法的计算效率对比如图 6 所示。

由图 6 可知,本研究方法具有与双线性变换法相近的计算效率,即处理长样本数据的速度明显高于传统的滤波法。

### 2.3 实测算例

根据《环境影响评价技术导则-城市轨道交通》<sup>[3]</sup> 中的规定,实测南京某地铁隧洞壁的振动源强,测试现场如图 7 所示。采用无人值守采集设备采集数据,

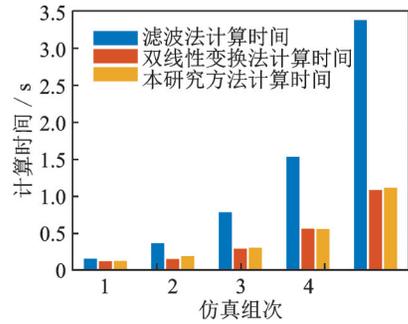


图 6 不同数据长度下各方法的计算效率对比

Fig.6 Calculation time of the methods under different data length



图 7 测试现场

Fig.7 Test scene

连续测试 17 趟列车经过时的垂向加速度信号。

设积分周期为 1 s,步进时间间隔为 0.1 s,基于图 8 所示的实测加速度信号,分别采用滤波法和本研究方法计权计算瞬时 Z 振级,并取每趟列车经过时的最大值连成曲线,两种方法估计出的最大 Z 振级和计算时间对比分别如图 9,10 所示。

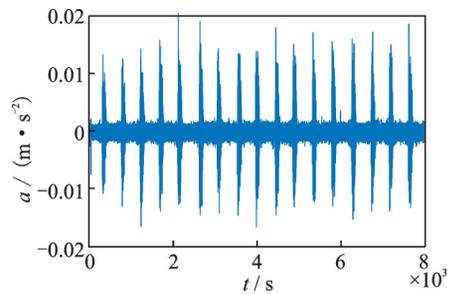


图 8 实测加速度信号

Fig.8 Measured acceleration signal

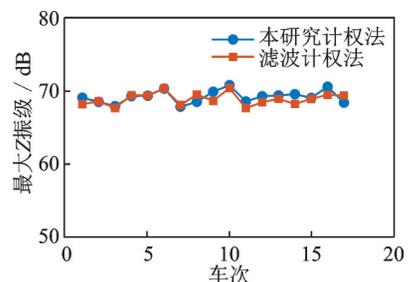


图 9 两种方法估计出的最大 Z 振级

Fig.9 Maximum Z-Vibration level computed by two methods

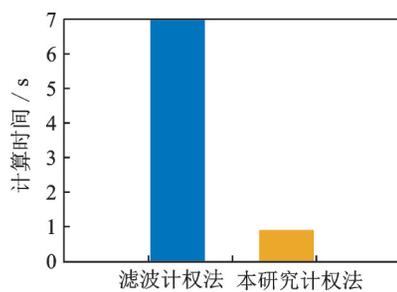


图10 两种方法的计算时间对比

Fig.10 Calculation time of two methods

图9中2条最大Z振级曲线近乎重合,表明两种方法计算的精度相近。图10结果显示,本研究方法的计算速度约为滤波法的7倍。实测算例进一步证明,所提出的计权计算Z振级的方法,在兼顾了计算精度的同时,明显提高了计算效率。

### 3 结论

1) 通过单输入-单输出离散状态空间模型完成加速度数据的计权,过程中避免了1/3倍频程的转换,有效提高了计算效率,并为实时加速度数据计权提供了算法依据。

2) 本研究使用方法使用最小二乘复频域拟合的方法获得离散状态空间系统的参数,在不增加采样频率的前提下,使离散系统和连续系统的频响幅值在关心频带内的误差最小,提高了计算精度。

3) 所提出的计权方法由时域内离散序列的输入-输出模型实现,能够实时进行加速度数据的计权计算。

### 参 考 文 献

- [1] 刘维宁,袁扬,王文斌,等. 地铁列车运行引起环境振动响应的人工单点列脉冲激励预测方法[J]. 中国铁道科学,2015,36(4):74-79.  
LIU Weining, YUAN Yang, WANG Wenbin, et al. Prediction method with artificial single-point pulse excitations for environmental vibration response induced by in-service metro train[J]. China Railway Science, 2015, 36(4): 74-79. (in Chinese)
- [2] 张凌,雷晓燕,刘全民,等. 地铁环境振动源强测试与评价标准分析[J]. 振动、测试与诊断, 2020, 4(1):89-94.  
ZHANG Ling, LEI Xiaoyan, LIU Quanmin, et al. Measurement and evaluation of environmental vibration source strength of the subway[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2020, 4(1): 89-94. (in Chinese)
- [3] HJ 453—2018 环境影响评价技术导则-城市轨道交通[S].
- [4] 张志飞,徐中明,贺岩松,等. 人体全身振动评价研

究[J]. 噪声与振动控制,2010,30(2):149-155.

ZHANG Zhifei, XU Zhongming, HE Yansong, et al. Evaluation method of human body response to vibration[J]. Noise and Vibration Control, 2010, 30(2): 149-155. (in Chinese)

- [5] GB/T 13441.1—1992 人体全身振动环境的测量规范[S]. 北京: 中国标准出版社, 1992.
- [6] ISO 2631-1—1985 Mechanical vibration and shock-evaluation of human exposure to whole-body vibration-part 1: general requirements[S]. Switzerland: International Organization for Standardization, 1985.
- [7] GB/T 13441.1—2007 机械振动与冲击 人体暴露于全身振动的评价第1部分:一般要求[S]. 北京: 中国标准出版社, 2007.
- [8] ISO 2631-1—1997 Mechanical vibration and shock-evaluation of human exposure to whole-body vibration-part 1: general requirements[S]. Switzerland: International Organization for Standardization, 1997.
- [9] 张丽娟,户文成,张斌,等. 国内外环境振动标准的探讨[J]. 噪声与振动控制,2013,33(supp1):411-414.  
ZHANG Lijuan, HU Wencheng, ZHANG Bin, et al. The discussion for environmental vibration standards at home and abroad[J]. Noise and Vibration Control, 2013, 33(supp1): 411-414. (in Chinese)
- [10] 王珑祺,张斌,蒋从双. 最大计权振级计算方法的探讨[J]. 噪声与振动控制,2013,33(5):199-203.  
WANG Longqi, ZHANG Bin, JIANG Congshuang. Study on the algorithm of maximum weighted vibration level[J]. Noise and Vibration Control, 2013, 33(5): 199-203. (in Chinese)
- [11] MANSFIELD N J, HOLMLUND P, LUNDSTRÖM R. Comparison of subjective responses to vibration and shock with standard analysis methods and absorbed power[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 230: 477-491.
- [12] JÖNSSON P, ÖRJAN J. Prediction of vehicle discomfort from transient vibrations[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 282: 1043-1064.
- [13] ZUO L, NAYFEH S A. Low order continuous-time filters for approximation of the ISO 2631-1 human vibration sensitivity weightings[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 265: 459-465.
- [14] 侯晋. 苏州城市轨道交通振动计算与测试分析[D]. 苏州: 苏州大学, 2014.



**第一作者简介:**夏遵平,男,1985年12月生,博士。主要研究方向为振动测试与信号处理、运行模式分析。  
E-mail: xzp@nuaa.edu.cn

**通信作者简介:**王彤,男,1978年1月生,博士、副教授。主要研究方向为复杂结构振动测试与模态分析、有限元模型修正、测试设备与工程软件开发。

E-mail: wt78@nuaa.edu.cn