

# 几何非线性黏性阻尼隔振系统的传递率特性\*

刘海超<sup>1</sup>, 闫明<sup>1</sup>, 孙自强<sup>1</sup>, 金映丽<sup>1</sup>, 王开平<sup>1</sup>, 惠安民<sup>2</sup>

(1. 沈阳工业大学机械工程学院 沈阳, 110870)

(2. 中国刑事警察学院刑事科学技术学院 沈阳, 110854)

**摘要** 针对传统舰载非线性隔振系统中存在的抑制共振峰值和改善高频传递特性相矛盾的问题, 首先, 建立了包含非线性刚度、库伦阻尼和几何非线性黏性阻尼的非线性隔振系统数学模型, 采用谐波平衡法进行解析求解; 其次, 对比分析了线性阻尼、库伦阻尼和几何非线性阻尼对隔振系统传递特性的影响规律, 进一步研究了激励幅值对不同阻尼隔振系统振动性能的影响; 最后, 通过振动试验进行了验证。结果表明: 增加系统库伦阻尼, 虽然能够降低软特性隔振系统共振区传递率, 但会导致硬特性隔振系统出现“频率岛”现象, 同时高频隔振性能下降, 而且随着激励幅值的增加, 共振区隔振性能随之变差; 增加系统几何非线性黏性阻尼, 不仅能够有效降低共振区传递率峰值, 而且能够保证高频区良好的隔振性能; 几何非线性黏性阻尼拓宽了系统对激励幅值的适用范围, 为非线性隔振系统设计提供了指导作用。

**关键词** 非线性隔振; 传递率; 库伦阻尼; 几何非线性黏性阻尼; 振动试验

**中图分类号** O322; TH113.1

## 引言

随着中国舰船制造技术的快速发展, 舰载设备越来越精密化、智能化, 但其所处的工作环境却日益复杂与严酷, 这对舰载设备隔振装置的设计提出了更高的标准与要求<sup>[1-2]</sup>。由于舰船上多为大型重载设备, 所以隔振器应该具有更高的承载能力和更低的隔振频率, 而线性隔振器已经不能满足工程实际需求, 因此国内外学者对非线性隔振系统展开了广泛而深入的研究。

Brennan 等<sup>[3]</sup>采用谐波平衡法求解具有软化和硬化的 Duffing 隔振系统响应方程, 研究了跳降频率和跳升频率与系统参数的关系。张小龙等<sup>[4]</sup>推导了 Duffing 型隔振系统跳跃频率和力传递率的计算公式, 分析了隔振系统主要参数对力传递率的影响规律。文献[5-7]采用理论、仿真和试验的方法对一类准零刚度隔振器的非线性动力学行为进行了研究, 结果表明, 准零刚度隔振器的高静低动特性使隔振系统具有更高的承载能力和更优的隔振带宽, 但只适用于小幅振动。Sun 等<sup>[8-9]</sup>基于剪式结构, 设计了一种新型非线性隔振器, 进一步研究了隔振系统的非线性动力学特性, 但这种隔振器会导致被隔振设

备重心升高。文献[10-11]以实测动态加载迟滞曲线为基础, 通过模型参数识别建立了胶质阻尼隔振器力学模型, 并对其隔振性能进行评估, 结果表明, 胶质阻尼隔振器具有良好的低频隔振性能。

非线性刚度虽然有利于提高隔振系统的承载能力, 但常常会导致系统出现跳跃、分岔和混沌等不稳定现象, 目前常采用提高阻尼来改善隔振系统的动力学性能。Sharma 等<sup>[12]</sup>分析了非线性阻尼对强迫达芬系统的分岔与混沌特性的影响, 结果表明, 非线性阻尼能够降低系统首次进入混沌状态的临界值, 增加发生混沌的参数空间, 影响系统进入混沌的通道。Ho 等<sup>[13]</sup>采用输出频响函数法研究非线性刚度和非线性阻尼对 Duffing 系统动态行为的影响, 得知非线性阻尼对抑制隔振系统共振峰值、提高系统稳定性能要远优于线性阻尼。文献[14-17]采用不同的理论计算方法研究了立方阻尼对隔振系统力传递率和位移传递率的影响, 结果表明, 立方阻尼能够有效降低共振区传递率峰值, 但是会导致高频区隔振性能变差。Laalej 等<sup>[18]</sup>利用主动试验装置对立方阻尼隔振系统进行了试验研究, 得出立方阻尼隔振器在一些特殊情况下才具有优势的结论。王勇等<sup>[19]</sup>采用主动控制方式将立方速度反馈控制策略引入到非

\* 国防科技创新特区资助项目(20-163-00-TS-006-002-01); 国家自然科学基金资助项目(51705337)

收稿日期: 2021-09-08; 修回日期: 2021-09-30

线性隔振系统中,不仅降低了主共振峰处的幅值,而且高频传递特性得到有效改善。但是,主动控制存在成本较高、程序繁琐以及可靠性低等问题。

为了分析非线性隔振系统振动特性,笔者在考虑系统干摩擦阻尼的基础上,以典型的Duffing系统为研究对象,采用线性黏性阻尼器与隔振系统运动方向垂直布置的方式,实现了系统阻尼的几何非线性,即在竖直运动的隔振系统中添加水平线性黏性阻尼器,使二者呈垂直的几何关系,当隔振系统上下运动时,水平黏性阻尼器在竖直方向产生的阻尼力会随着黏性阻尼器与水平方向的夹角变化而变化,并随相对位移的增加而增大。采用谐波平衡法求解了非线性隔振系统的主共振响应,对比分析了线性阻尼、库伦阻尼和几何非线性阻尼对系统绝对传递率的影响规律,进一步分析了激励幅值对不同阻尼隔振系统振动特性的影响,并通过振动试验验证了几何非线性黏性隔振系统的传递率特性规律。

## 1 隔振系统模型的建立

### 1.1 力学模型

隔振系统力学模型如图1所示,其中: $M$ 为设备的质量; $K_1, K_2$ 分别为隔振器垂向线性刚度系数和非线性刚度系数; $C_1, C_2$ 分别为垂向和水平线性黏性阻尼系数; $F_f$ 为垂向库伦阻尼力; $D$ 为水平阻尼器初始长度; $Y(t), X(t)$ 分别为基座和设备的绝对位移。

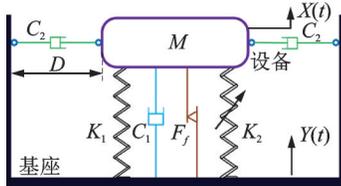


图1 隔振系统力学模型

Fig.1 Mechanical model of vibration isolation system

### 1.2 数学模型

隔振系统随基础激励做受迫振动,假设基础激励为谐波信号,即 $Y(t)=B\sin(\omega t-\theta)$ ,定义被隔振设备与基座的相对位移 $Z(t)=X(t)-Y(t)$ 。隔振系统的弹性力和阻尼力分别为

$$F_k = K_1 Z + K_2 Z^3 \quad (1)$$

$$F_c = C_1 \dot{Z} + F_f \operatorname{sgn} \dot{Z} + 2C_2 \frac{Z^2 \dot{Z}}{Z^2 + D^2} \quad (2)$$

当 $Z \leq 0.2D$ 时,利用泰勒级数展开将式(2)简化为

$$F_c = C_1 \dot{Z} + F_f \operatorname{sgn} \dot{Z} + 4C_2 \frac{Z^2 \dot{Z}}{D^2} \quad (3)$$

因此,系统的动力学方程为

$$M\ddot{Z} + K_1 Z + K_2 Z^3 + C_1 \dot{Z} + F_f \operatorname{sgn} \dot{Z} + 4C_2 \frac{Z^2 \dot{Z}}{D^2} = MB\omega^2 \sin(\omega t - \theta) \quad (4)$$

定义式(5)中的无量纲参数为

$$\begin{cases} \omega_1^2 = K_1/M \\ \omega_2^2 = K_2/M \\ r = \omega/\omega_1 \\ 2\xi_1\omega_1 = C_1/M \\ \rho = K_2 D^2/K_1 \\ \eta = 4C_2/M\omega_1 \\ \lambda = F_f/M\omega_1 \end{cases} \quad (5)$$

进行如下变换

$$\begin{cases} z = Z/D \\ b = B/D \\ \dot{z} = dz/d\tau \\ \tau = \omega_1 t \end{cases} \quad (6)$$

得到系统动力学方程的无量纲形式为

$$\ddot{z} + z + \rho z^3 + 2\xi_1 \dot{z} + \lambda \operatorname{sgn} \dot{z} + \eta z^2 \dot{z} = br^2 \sin(r\tau - \theta) \quad (7)$$

假设系统稳态响应的一次近似解为

$$\begin{cases} z = u(\tau) \sin(r\tau) \\ \dot{z} = u(\tau) r \cos(r\tau) \\ \ddot{z} = -u(\tau) r^2 \sin(r\tau) \end{cases} \quad (8)$$

同时,利用傅里叶展开对 $\operatorname{sgn}$ 函数进行化简,有

$$\operatorname{sgn}(\cos r\tau) \approx a_0 + a_1 \cos r\tau + a_2 \sin r\tau \approx \frac{4}{\pi} \cos r\tau \quad (9)$$

将式(8)、式(9)代入式(7),得到

$$(-ur^2 + u) \sin r\tau - \rho u^3 \sin^3 r\tau + (2\xi_1 ur + \eta u^3 r \sin^2 r\tau + \frac{4\lambda}{\pi}) \cos r\tau = br^2 \sin(r\tau - \theta) \quad (10)$$

根据三角函数化简关系,有

$$\sin(r\tau - \theta) = \sin r\tau \cos \theta - \cos r\tau \sin \theta \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sin^3 r\tau \approx \frac{3}{4} \sin r\tau \\ \cos^3 r\tau \approx \frac{3}{4} \cos r\tau \end{cases} \quad (12)$$

将式(11)、式(12)代入式(10),得到

$$(-ur^2 + u + \frac{3}{4}\rho u^3)^2 + (2\xi_1 ur + \frac{1}{4}\eta u^3 r + \frac{4\lambda}{\pi})^2 = b^2 r^4 \quad (13)$$

## 2 传递特性

绝对传递率和相对传递率是评价隔振系统隔振性能的重要指标。绝对传递率是指设备的绝对位移与激励幅值的比值;相对传递率是指设备和基座之间的相对位移(即隔振系统弹性元件的变形量)与激励幅值的比值。

由式(13)可得

$$b = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} / r^2 \quad (14)$$

其中:  $N_1 = -ur^2 + u + \frac{3}{4}\rho u^3$ ;  $N_2 = 2\xi_1 ur + \frac{1}{4}\eta u^3 r + \frac{4\lambda}{\pi}$ 。

相对传递率公式为

$$T_r = \frac{u}{b} = \frac{r^2 u}{\sqrt{N_1^2 + N_2^2}} \quad (15)$$

由绝对位移与相对位移的关系可得

$$x = u \sin r\tau + b \sin(r\tau - \theta) = (u + b \cos \theta) \sin r\tau - b \sin \theta \cos r\tau \quad (16)$$

因此,绝对传递率公式为

$$T_a = \frac{x}{b} = \frac{\sqrt{(u + b \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2}}{b} \quad (17)$$

### 2.1 阻尼参数对传递率特性的影响

非线性隔振系统可以根据弹性元件的力学特性分为软特性和硬特性隔振系统。假设弹性元件的恢复力为  $F(Z)$ , 形变量为  $Z$ , 当  $dF/dZ$  严格单调递减时, 弹性元件具有软特性; 当  $dF/dZ$  严格单调递增时, 弹性元件具有硬特性。非线性弹性元件力学特性如图 2 所示, 其中: 曲线  $b$  所示系统为软特性隔振系统; 曲线  $a$  所示系统为硬特性隔振系统。

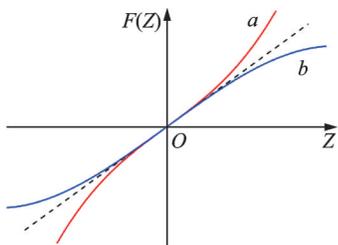


图 2 非线性弹性元件力学特性

Fig.2 Mechanical characteristics of nonlinear elastic elements

选定隔振系统非线性刚度  $\rho = \pm 0.02$  (正负号分别代表硬特性和软特性隔振系统), 振动激励幅值  $b = 1.0$ , 分析隔振系统的线性阻尼  $\xi_1$ 、库伦阻尼  $\lambda$  和几何非线性黏性阻尼  $\eta$  单一参数对软、硬特性隔振系统的绝对传递率的影响规律, 如图 3~图 5 所示。

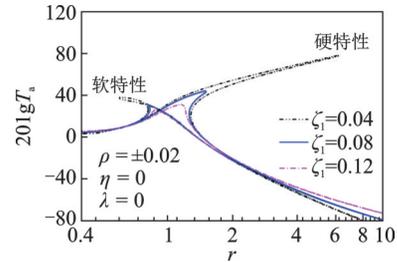


图 3 参数  $\xi_1$  对绝对传递率的影响

Fig.3 The influence of parameter  $\xi_1$  on absolute transmissibility

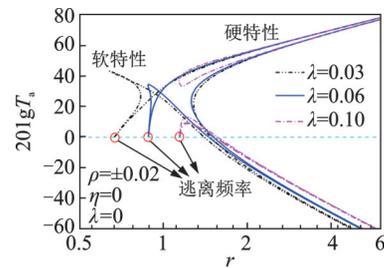


图 4 参数  $\lambda$  对绝对传递率的影响

Fig.4 The influence of parameter  $\lambda$  on absolute transmissibility

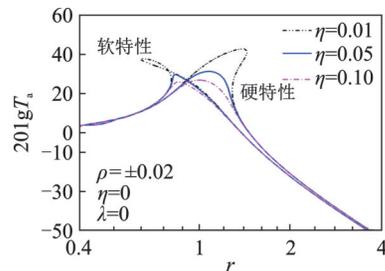


图 5 参数  $\eta$  对绝对传递率的影响

Fig.5 The influence of parameter  $\eta$  on absolute transmissibility

由图 3 可知, 增加隔振系统线性阻尼  $\xi_1$ , 有效降低了软、硬特性隔振系统共振区的绝对传递率, 减小甚至避免了跳跃现象的产生, 提高了系统的稳定性; 但随着线性阻尼的增加, 振动隔离区的绝对传递率增加, 即高频隔振性能大幅下降。

由图 4 可知, 随着库伦阻尼  $\lambda$  的增加, 软特性隔振系统共振区的绝对传递率快速下降, 系统稳定性得以提高; 但硬特性隔振系统共振区绝对传递率下降并不明显, 并且随库伦阻尼的增加, 绝对传递率在共振区均出现了独立封闭环形区域, 即“频率岛”现象, 这说明系统处于不稳定状态, 且隔振性能较差,

只有大幅提高库伦阻尼才能使“频率岛”消失。同时,由于库伦阻尼的锁定作用,绝对传递率起始频率(逃离频率)均大于0,并随库伦阻尼增加而向右移动。增加库伦阻尼虽然有益于降低共振区传递率,但是高频区的绝对传递率却随之提高,振动隔离区的隔振性能变差。

由图5可知,增加几何非线性阻尼 $\eta$ ,不但使软、硬特性隔振系统的绝对传递率大幅降低,同时保证了高频区的绝对传递率特性保持不变。因此,几何非线性阻尼对降低系统的共振区传递率、提高系统的振动性能起到了重要作用。

### 2.2 3种阻尼对传递率特性影响的对比分析

为进一步分析3种阻尼对隔振系统传递率特性的影响,以非线性刚度 $\rho = \pm 0.01$ 、线性阻尼 $\xi_1 = 0.04$ 的非线性隔振系统为参考,设计3种阻尼参数在保证隔振系统共振区绝对传递率峰值相等的条件下,其软、硬特性隔振系统绝对传递率对比分析,分别如图6,7所示。

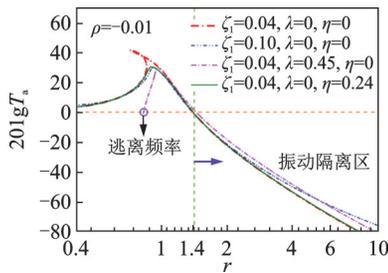


图6 软特性隔振系统绝对传递率对比分析

Fig.6 Comparative analysis of absolute transmissibility of vibration isolation system with soft characteristics

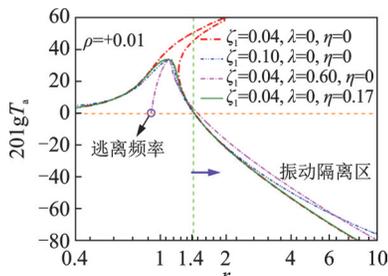


图7 硬特性隔振系统绝对传递率对比分析

Fig.7 Comparative analysis of absolute transmissibility of vibration isolation system with hard characteristics

由图6,7可知:无论软特性还是硬特性隔振系统,在保证共振区绝对传递率峰值相等的条件下,线性阻尼和库伦阻尼的增加均导致了振动隔离区的绝对传递率的增加,高频隔振性能降低,这对非线性隔振器设计极为不利;而几何非线性阻尼不仅有效降

低了共振区的绝对传递率,同时确保了高频区良好的振动隔离特性。

### 2.3 激励幅值对系统隔振性能的影响

激励幅值是直接影响隔振系统传递特性的重要因素。选取非线性刚度 $\rho = \pm 0.02$ ,线性阻尼 $\xi_1 = 0.04$ ,分析激励幅值对库伦阻尼和几何非线性阻尼隔振系统传递率的影响,分别如图8,9所示。其中,箭头标注方向为激励幅值增大的方向。

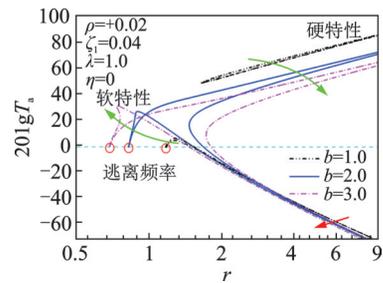


图8 激励幅值对库伦阻尼隔振系统传递率的影响

Fig.8 Influence of excitation amplitude on transmissibility of coulomb damping vibration isolation system

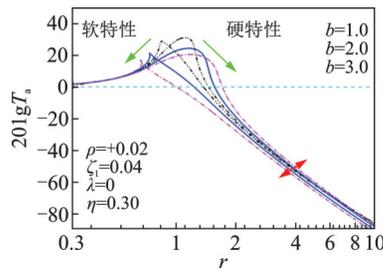


图9 激励幅值对几何非线性阻尼隔振系统传递率的影响

Fig.9 Influence of excitation amplitude on transmissibility of geometrically nonlinear damping vibration isolation system

由图8可知:随着激励幅值的增加,对于软特性隔振系统,共振区绝对传递率峰值逐渐增大;对于硬特性隔振系统,“频率岛”现象消失,共振区绝对传递率峰值下降并进一步向右弯曲;逃离频率向左移动,无谐振峰值区减小;随激励幅值的增加,软、硬特性隔振系统高频区的绝对传递率均有所降低。

由图9可知:随着激励幅值的增加,对于软特性隔振系统,共振区的绝对传递率峰值逐渐降低,但会向左进一步弯曲,而且高频区的绝对传递率也会有所下降;对于硬特性隔振系统,共振区的绝对传递率峰值同样会随之降低,但变化趋势逐渐变缓,同时高频区的绝对传递率基本保持不变。因此,几何非线性阻尼能够保证隔振系统在变激励幅值环境中具有较低的传递率和较好的高频隔振性能。

### 3 非线性隔振系统振动试验

#### 3.1 试验装置及工作原理

几何非线性黏性阻尼隔振系统试验装置如图 10 所示,主要由基座、水平阻尼器支座、导向装置、传感器测量装置、线性弹簧、垂向黏性阻尼器、质量块、水平黏性阻尼器和磁性弹簧元件等组成。试验装置工作原理如下:由磁性弹簧元件提供非线性刚度,内磁体安装在竖直连杆上,且连杆端部与基座连接固定,外磁体通过上、下端盖与质量块相连并随之运动,由于内外磁体的磁化方向相反,因此始终存在一个与质量块运动方向相同的磁性力作用在质量块上。其中,垂向黏性阻尼器提供垂向阻尼  $C_1$ ,水平阻尼器提供几何非线性阻尼  $C_2$ ,由试验装置各部件之间的干摩擦力提供库伦阻尼力  $F_f$ ,采用位移传感器、加速度传感器和数据采集仪实现试验数据的采集与记录。

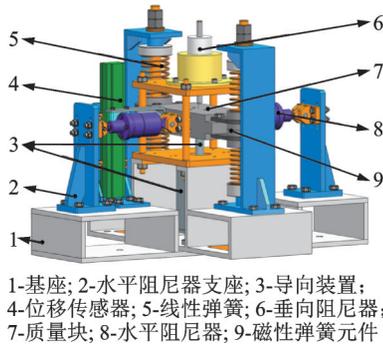


图 10 几何非线性黏性阻尼隔振系统试验装置

Fig.10 The test device of geometrically nonlinear viscous damping vibration isolation system test device

磁性弹簧元件如图 11 所示,是由 2 对径向磁化的环形永磁体组成。磁性弹簧的工作原理、磁性力和磁刚度的计算方法参见文献[20],得到磁刚度  $K_m$  的近似计算公式为

$$K_m = K_{m1} + K_{m2}Z^2 \quad (18)$$

其中: $K_{m1}, K_{m2}$ 分别为常数项和二次项刚度系数。

图 10 中线性弹簧的线性刚度  $K_L$ 和磁性弹簧磁刚度的常数刚度  $K_{m1}$ 共同提供线性刚度,由此可得

$$\begin{cases} K_1 = K_{m1} + K_L \\ K_2 = K_{m2} \end{cases} \quad (19)$$

采用垂向液压振动试验台进行振动试验,试验台基本参数如下:最大推力为 100 kN,正弦扫频范围为 0.1~160 Hz。试验装置安装如图 12 所示。

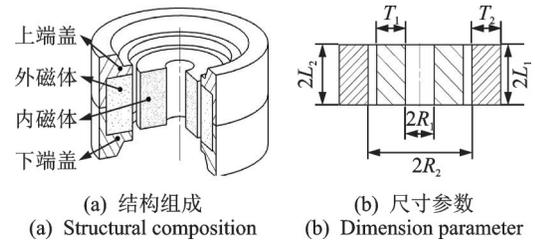


图 11 磁性弹簧元件

Fig.11 The magnetic spring element

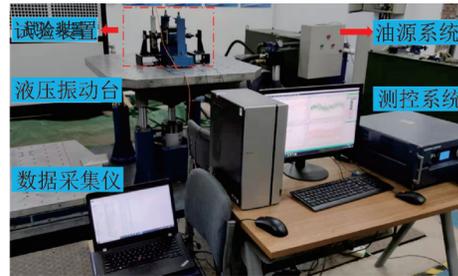


图 12 试验装置安装图

Fig.12 The installation diagram of test device

#### 3.2 振动试验及结果分析

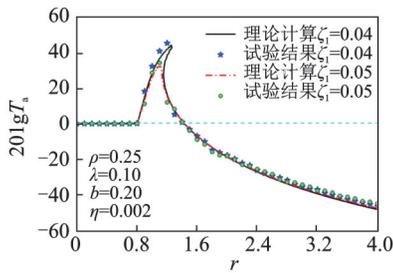
以硬特性隔振系统为例进行了定频振动试验,频率范围为 0.6~24 Hz,频率间隔为 0.6 Hz,非线性隔振系统参数见表 1。分别改变系统线性阻尼  $C_1(\xi_1)$ 、几何非线性黏性阻尼  $C_2(\eta)$ 和激励幅值  $B(b)$ 的大小,试验结果与理论计算对比分析如图 13 所示。

表 1 非线性隔振系统参数

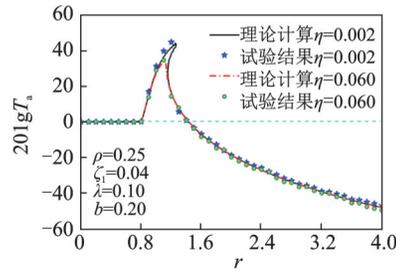
Tab.1 Non-linear vibration isolation system parameters

参数	数值	参数	数值
$K_1/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$1.28 \times 10^4$	$m/\text{kg}$	9.0
$K_2/(\text{N}\cdot\text{mm}^{-1})$	$1.63 \times 10^5$	$\omega_1$	37.70
$F_f/\text{N}$	33.93	$\omega_2$	134.64
$D/\text{mm}$	140	$\lambda$	0.10

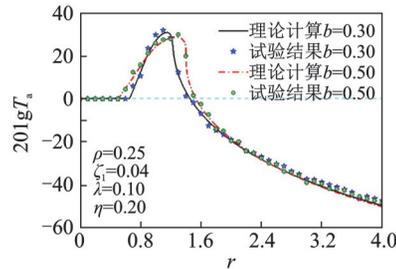
由图 13 可知,振动试验与理论计算曲线具有较好的一致性,最大误差仅为 5.43%。对比图 13(a,b)的试验曲线可知:当  $\xi_1$  增加到 0.05,或者  $\eta$  增加到 0.06 时,系统绝对传递率峰值下降了相同高度;增加  $\xi_1$  会导致高频隔振性能变差;增加  $\eta$  系统依然具有较好的高频隔振性能。由图 13(c)可得,随着激励幅值的增加,不仅降低了共振区传递率峰值,而且保证了高频区良好的隔振能力,能够适用于更为复杂的工作环境。



(a) 参数 $\zeta_1$ 变化时理论与试验的绝对传递率对比图  
(a) Comparison of theoretical and experimental absolute transmissibility with change of parameter  $\zeta_1$



(b) 参数 $\eta$ 变化时理论与试验的绝对传递率对比图  
(b) Comparison of theoretical and experimental absolute transmissibility with change of parameter  $\eta$



(c) 激励幅值 $b$ 变化时理论与试验的绝对传递率对比图  
(c) Comparison of theoretical and experimental absolute transmissibility with change of the excitation amplitude  $b$

图13 试验结果与理论计算对比分析

Fig.13 The comparative analysis of experimental results and theoretical calculations

## 4 结论

1) 增加系统库伦阻尼能够有效降低软特性隔振系统共振区的传递率峰值,但对硬特性隔振系统共振区传递率特性影响较小,而且会出现不稳定的“频率岛”现象,并导致了振动隔离区绝对传递率增加,高频隔振性能变差。

2) 增加几何非线性阻尼不仅有效降低了软、硬特性隔振系统共振区的传递率峰值,而且能确保高频隔离区良好的振动性能,因此几何非线性阻尼具有重要的研究价值。

3) 系统激励幅值的增加导致库伦阻尼软特性隔振系统共振区传递率峰值增大,硬特性隔振系统共振区传递率峰值进一步向右弯曲,共振区隔振性能变差,高频区隔振性能保持不变。

4) 增加系统激励幅值,几何非线性阻尼软特性隔振系统的共振区和振动隔离区的隔振性能均得到有效提高;硬特性隔振系统共振区传递特性变优,且高频区传递特性保持不变。因此,几何非线性阻尼使隔振系统适用于更为复杂多变的振动环境,有效提高了系统的振动性能。

5) 定频振动试验进一步证明了几何非线性阻尼能够有效改善隔振系统共振区和高频区的隔振性能,因此设计出阻尼力随位移变化的新型隔振系统具有重要的研究价值与广阔的应用前景。

## 参 考 文 献

- [1] 刘渊博,李明,何琳. 船用气囊隔振系统的非线性动力学特性[J]. 船舶力学, 2015, 19(11): 1385-1392.  
LIU Yuanbuo, LI Ming, HE Lin. Nonlinear dynamics of the marine air-bag vibration isolation system[J]. Journal of Ship Mechanics, 2015, 19(11): 1385-1392. (in Chinese)
- [2] 王鹏,闫明,张春辉,等. 液压限位隔离系统的抗冲击性能研究[J]. 振动、测试与诊断, 2020, 40(5): 963-968.  
WANG Peng, YAN Ming, ZHANG Chunhui, et al. Shock resistance of vibration isolation system with hydraulic displacement [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2020, 40(5): 963-968. (in Chinese)
- [3] BRENNAN M J, KOVACIC I, CARRELLA A, et al. On the jump-up and jump-down frequencies of the duffing oscillator [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 318: 1250-1261.
- [4] 张小龙,东亚斌. Duffing型隔振的力传递率及跳跃现象的理论分析[J]. 振动与冲击, 2012, 31(16): 38-42.  
ZHANG Xiaolong, DONG Yabin. Theoretical analysis on force transmissibility and jump phenomena of Duffing spring type vibration isolator [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(16): 38-42. (in Chinese)
- [5] KOVACIC I, BRENNAN M J, WATERS T P. A study of a nonlinear vibration isolator with a quasi-zero stiffness characteristic[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 315: 700-711.
- [6] LIU Chaoran, YU Kaiping. Accurate modeling and analysis of a typical nonlinear vibration isolator with quasi-zero stiffness[J]. Nonlinear Dyn, 2020, 100: 2141-2165.
- [7] LAN C C, YANG S A, WU Y K. Design and

- experiment of a compact quasi-zero-stiffness isolator capable of a wide range of loads [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(20): 4843-4858.
- [8] SUN X, JING X. A nonlinear vibration isolator achieving high-static-low-dynamic stiffness and tunable anti-resonance frequency band [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, 80: 166-188.
- [9] SUN X, JING X. Multi-direction vibration isolation with quasi-zero stiffness by employing geometrical non-linearity [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2015 (62/63): 149-163.
- [10] 余慕春,赵鹏,牛智玲,等. 胶质阻尼隔振器的力学模型及隔振性能研究[J]. *工程力学*, 2020, 37(12): 220-227.  
YU Muchun, ZHAO Peng, NIU Zhiling, et al. The mechanical mode and vibration isolation properties of colloidal dampers [J]. *Engineering Mechanics*, 2020, 37(12): 220-227. (in Chinese)
- [11] 赵鹏,余慕春,陈前. 疏水硅胶颗粒的吸能机理研究[J]. *振动与冲击*, 2019, 38(5): 128-134.  
ZHAO Peng, YU Muchun, CHEN Qian. Energy absorption mechanism of hydrophobic silica gel particles [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(5): 128-134. (in Chinese)
- [12] SHARMA A, PATIDAR V, PUROHIT G. Effects on the bifurcation and chaos in forced Duffing oscillator due to nonlinear damping[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17: 2254-2269.
- [13] HO C, LANG Z, BILLINGS S. A frequency domain analysis of the effects of nonlinear damping on the Duffing equation[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2014, 45(1): 49-67.
- [14] XIAO Z L, JING X J, CHENG L. The transmissibility of vibration isolators with cubic nonlinear damping under both force and base excitations [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(5): 1335-1354.
- [15] MOFIDIAN S M M, BARDAWEEL H. Displacement transmissibility evaluation of vibration isolation system employing nonlinear-damping and nonlinear-stiffness elements[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2017, 24(18): 4247-4259.
- [16] PENG Z K, MENG G, LANG Z Q, et al. Study of the effects of cubic nonlinear damping on vibration isolations using Harmonic Balance Method[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, 47(10): 1073-1080.
- [17] TANG B, BRENNAN M J. A comparison of two nonlinear damping mechanisms in a vibration isolator [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(3): 510-520.
- [18] LAALEJ H, LANG Z, DALEY S, et al. Application of non-linear damping to vibration isolation: an experimental study[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69: 409-421.
- [19] 王勇,李舜酩,程春,等. 立方速度反馈控制的准零刚度隔振器动力学特性分析[J]. *振动工程学报*, 2016, 29(2): 305-313.  
WANG Yong, LI Shunming, CHENG Chun, et al. Dynamic analysis of a quasi-zero-stiffness vibration isolator with cubic velocity feedback control [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2016, 29(2): 305-313. (in Chinese)
- [20] ZHENG Y S, ZHANG X, LUO Y J, et al. Design and experiment of a high-static-low-dynamic stiffness isolator using a negative stiffness magnetic spring [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 360: 31-52.



**第一作者简介:** 刘海超,男,1992年6月生,博士生。主要研究方向为舰载设备的冲击防护与振动控制。曾发表《带限位隔振系统的冲击响应分析》(《振动与冲击》2019年第38卷第21期)等论文。  
E-mail: liu\_hc\_9206@163.com