

基于频域分解与重采样的结构欠采样模态辨识*

利雅洁, 吕中荣, 汪利

(中山大学航空航天学院 深圳, 518107)

摘要 为了研究欠采样情况下的结构模态辨识问题,首先,在频域分解法识别结构模态参数的基础上,引入重采样策略,对不同采样频率下的参数进行辨识;其次,使用模态确认准则进行模态匹配,结合扇形折叠曲线对欠采样下发生混叠的模态参数进行还原,还原出结构的真实频率以及阻尼比;最后,通过一个8自由度仿真模型和一个4层框架实验案例,证明所提方法能够准确识别欠采样结构的频率、阻尼比和振型,重采样策略能够切实解决欠采样模态辨识问题,从而验证了该方法的正确性和可行性。

关键词 模态辨识;欠采样;模态混叠;频域分解法;重采样

中图分类号 TB123;O329

引言

结构的模态参数包括固有频率、模态振型和阻尼比,可以为结构系统的动态设计、健康监测和故障诊断提供基础数据^[1]。结构的振动模型包含输入、系统和输出3部分。当输入激励未知时,进行的模态辨识过程称为工作模态分析(operational modal analysis,简称OMA)^[2]。由于实际结构在运行过程中会受到未知环境激励^[3],OMA越来越受到关注。频域分解法(frequency domain decomposition,简称FDD)是一种常见的工作模态分析方法^[4],用于提取结构的固有频率和模态振型。王彤等^[5]进一步对奇异值进行拟合,能准确快速地识别出结构的阻尼比。可见,频域分解法简单直观,有非常大的应用前景。

传统的接触式振动测量传感器具有精度高、使用寿命长等优点,但其空间测量分辨率较低。若要达到高分辨率,则需要密集的安装传感器,这不仅增加测量成本,还有可能造成结构的质量增加和结构表面性质的改变^[6]。因此,需要借助新兴的非接触式测量方法,例如连续扫描激光多普勒测振技术^[7]。该技术可以提供较高的空间分辨率,但受扫描镜头激光摆动频率的限制,导致采样频率较低。当结构频率过高或测量仪器采样频率不足时,会出现欠采样现象,即Nyquist频率^[8]低于待测频率。此时,采样信号还原成连续信号时会彼此重叠,导致发生模

态混叠而不能识别出真实频率。近年来,在低频采样下提高系统捕捉高频信号能力的研究受到广大学者的关注。文献[9-10]提出的欠采样频率估计方法在一定程度上解决了欠采样频率识别问题,但其频率识别精度还有待提高。

笔者在频域分解法识别结构模态参数的基础上,引入重采样策略,对不同采样频率下的参数进行辨识,用模态确认准则进行模态匹配,并结合扇形折叠曲线对欠采样下发生混叠的模态参数进行还原,通过一个8自由度仿真模型和一个4层框架实验案例,研究欠采样情况下的结构模态辨识问题。

1 频域分解法理论

对于结构振动,当输入荷载为白噪声荷载,且结构阻尼较小、频率接近于第 k 阶频率时,输出谱密度^[4]可简化为

$$G_{yy}(\omega) = \phi_k \left(2\text{Re} \left(\frac{d_k}{i\omega - \lambda_k} \right) \right) \phi_k^H \quad (1)$$

其中: $G_{yy}(\omega)$ 为输出功率谱密度矩阵; d_k 为常数; $\lambda_k = -\zeta_k \omega_k + i\omega_{dk}$; $\omega_{dk} = \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}$; $\omega_k, \zeta_k, \phi_k$ 分别为第 k 阶频率、阻尼比和模态振型。

对谱密度矩阵进行奇异值分解,固有频率可取奇异值峰值对应的频率,相应的奇异值向量即为模态振型。对奇异值进行拟合,得到阻尼比为

* 国家自然科学基金资助项目(11972380)

收稿日期:2021-12-20;修回日期:2022-02-21

$$\zeta_k = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{dk}}{\omega_k}\right)^2} \quad (2)$$

2 欠采样模态辨识

2.1 欠采样与信号混叠

根据 Shannon 采样定律,当基带信号 $s(t)$ 的带宽为 B 时,其傅里叶频谱 $S(\omega)$ 在 $\omega/2\pi \in [-B, B]$ 之内。令采样频率为 f_s ,当 Nyquist 频率 $f_{Ny} = f_s/2 \geq B$ 时,离散样本中的信号可以完整地保留原始连续信号中的信息;当 $f_{Ny} < B$ 时,采样频率不足,也称欠采样,样本中的信号被还原成连续信号时会产生彼此交叠而失真的混叠现象。

为分析欠采样下的信号混叠机理,给定频率为 ω_n 的实信号 $x(t)$ 可表示为

$$x(t) = Ae^{i\omega_n t} + \bar{A}e^{-i\omega_n t} \quad (3)$$

其中: \bar{A} 为 A 的共轭。

对其进行采样频率为 $f_s = 1/\Delta t$ 的离散傅里叶变换

$$\begin{aligned} \hat{X}(\omega) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [x(k\Delta t)e^{-i\omega k\Delta t}] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [Ae^{i\frac{2\pi(f_n-f)f}{f_s}k} + \bar{A}e^{i\frac{-2\pi(f_n+f)f}{f_s}k}] = \\ &= \begin{cases} A & f \in \{f_n - mf_s, \forall m \in \mathbb{Z}\} \\ \bar{A} & f \in \{nf_s - f_n, \forall n \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & (f \text{ 取其他值}) \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$; $f = \frac{\omega}{2\pi}$; $N = \frac{T}{\Delta t} \rightarrow \infty$ 。

欠采样下的扇形折叠模型^[11]与模态混叠如图1所示。信号中只有小于 f_{Ny} 的部分可以被完整保留,大于 f_{Ny} 的样本信号会混叠到 $[0, f_{Ny}]$ 。可将频谱图比作一张折纸,在 f_{Ny} 的奇数倍数处将折纸向外折叠,在 f_{Ny} 的偶数倍数处将折纸向内折叠。根据每个区间折叠次数 m 的奇偶性,定义该区间为偶折叠区间或奇折叠区间。根据扇形折叠纸模型,当真实信号频率为 f_M 时,折叠后的信号频率 \hat{f} 可以表示为

$$\hat{f} = \begin{cases} f_M - m\frac{f_s}{2} & (m \text{ 为偶数}) \\ (m+1)\frac{f_s}{2} - f_M & (m \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (5)$$

其中: 折叠次数 $m = \lfloor 2f_M/f_s \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ 表示 x 的整数部分)。

根据模态折叠公式,所有频率段的信号都被折

叠至频率区间 $[0, f_{Ny}]$,如图1(b)所示。将所有折叠到频率区间 $[0, f_{Ny}]$ 的信号直接叠加,得到混叠后的频谱图。根据模态混叠理论,若真实信号频谱如图1(a)所示,则采样频率 f_s 下的离散信号频谱如图1(c)所示。

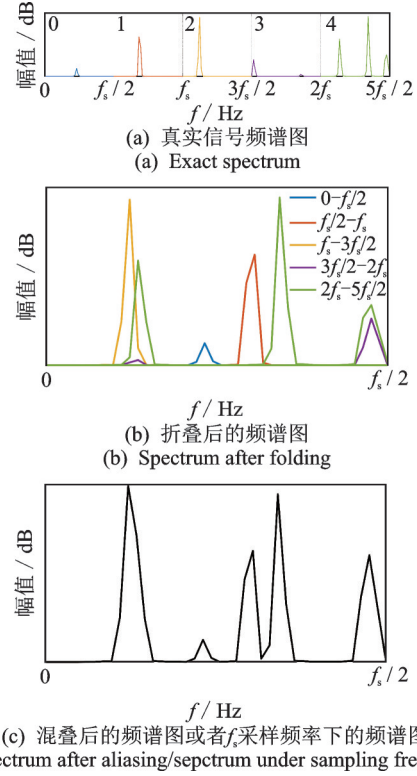


图1 欠采样下的扇形折叠模型与模态混叠

Fig.1 Fan-folded model and mode aliasing for undersampling

2.2 重采样策略识别混叠的模态

根据信号混叠理论,当出现欠采样时,使用频域分解法获得的结构谱密度曲线会发生折叠。若要恢复结构的真实频率,需要根据扇形折叠模型求出频率的折叠次数 m 。折叠次数 m 不能通过单次测量确定,需通过重采样方法获得。重采样方法是一种多速率稀疏采样方法,利用不同的采样频率对结构振动进行欠采样,在一定程度上扩大了频谱的探测范围。该方法的核心思想在于多次采样的采样频率需满足非整数倍数关系,利用扇形折叠模型还原出混叠前的频率,从而实现频率识别范围的提升。

笔者以2个欠采样频率重采样为例,首先,使用非整数倍数关系的欠采样频率 f_{s1} 和 f_{s2} 分别测量结构的振动数据;然后,利用频域分解法分别计算出欠采样频率 f_{s1} 和 f_{s2} 的谱密度峰值频率 f_{r1} 和 f_{r2} ,以及对应的模态振型 ϕ_{r1} 和 ϕ_{r2} ,阻尼比 ζ_{r1} 和 ζ_{r2} 。当频域分

解法计算谱密度有多个峰值时,需要先识别出 2 个采样频率结果中代表同一阶模态的频率。由于欠采样不会使频域分解法获得的模态振型发生变化,因此计算 2 组模态振型 ϕ_{r1} 和 ϕ_{r2} 的模态置信度(modal assurance criterion,简称 MAC)公式为

$$MAC = \frac{|\phi_{r1} \cdot \phi_{r2}|}{\|\phi_{r1}\| \cdot \|\phi_{r2}\|} \quad (6)$$

若 MAC 接近 1,则为同一阶模态振型,相应的频率 f_{r1} 和 f_{r2} 对应同一阶固有频率。

图 2 为重采样下不同真实固有频率的测量结果。当真实频率 $f_A < f_{s1}/2$ 且 $f_A < f_{s2}/2$ 时, $f_{A,r1} = f_{A,r2} = f_A$, 频率未发生混叠,不同采样下的频率结果相同,测量结果即为真实频率。当真实频率 $f_B > f_{s1}/2$ 或 $f_B > f_{s2}/2$ 时, $f_{B,r1} \neq f_{B,r2}$, 即 $f_{B,r1}$ 与 $f_{B,r2}$ 中至少有一个频率发生混叠,需利用扇形折叠模型还原真实频率。根据式(5),真实频率 f_M 可表示为

$$f_M = g(f_r, m) = \begin{cases} f_r + m \frac{f_s}{2} & (m \text{ 为偶数}) \\ (m+1) \frac{f_s}{2} - f_r & (m \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (7)$$

重采样需要寻找合适的最小整数 m_1 和 m_2 , 使 $g(f_{r1}, m_1) = g(f_{r2}, m_2) = f_M$ 成立,此时 f_M 即为还原后的真实频率。具体还原过程如下:①绘制采样频率 f_{s1}, f_{s2} 分别对应的折叠曲线;②根据测量频率 $f_{B,r1}, f_{B,r2}$, 分别标出 $f_{B,r1}$ 与 f_{s1} 折叠曲线的交点(记为第 1 组交点),以及 $f_{B,r2}$ 与 f_{s2} 折叠曲线的交点(记为第 2 组交点);③找出 2 组交点中具有相同横坐标 f_B 的交点, f_B 即为还原的频率。同时,还原的阻尼比 $\zeta_B = \zeta_{r1} f_{r1} / f_B$ 。

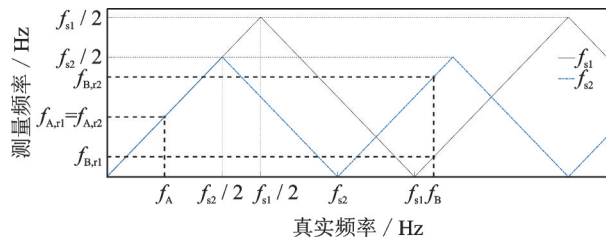


图 2 重采样下不同真实固有频率的测量结果

Fig.2 Measurement results of different real natural frequencies under resampling

当 $f_{s1}/f_{s2} = A/B$ (A/B 为不可约的最简分数且 $\min(A, B) \geq 2$) 时,图 2 会以 $f_{max} = Af_{s2} = Bf_{s1}$ 为周期循环。当要识别的真实频率大于一个周期,该频率会被还原成第 1 个周期内的结果。考虑对称性,重采样策略的频率识别范围为 $(0, f_{max}/2)$,重采样相当于把采样频率提高至 f_{max} 。由于 f_{max} 大于

$f_{s1} + f_{s2}$,重采样显著提高了 Nyquist 频率,能够正确恢复出更高频率范围 $(0, f_{max}/2)$ 内的信息。当 f_{s1}/f_{s2} 为无理数时, $f_{max} \rightarrow +\infty$, 此时重采样可以恢复出任意高频信息。

3 算例研究

笔者采用 2 个算例进行研究:第 1 个算例为 8 自由度剪切层数值模型,用于检验重采样方法在欠采样模态识别中的有效性;第 2 个算例为实验室 4 层框架结构,使用加速度传感器测量得到 2 组不同采样频率下的振动数据。

3.1 8 自由度剪切层模型

为了验证重采样方法对欠采样下混叠频率的还原能力,建立如图 3 所示的 8 自由度剪切层模型。取各层的质量 $m_1 \sim m_8$ 为 100 kg,刚度 $k_1 \sim k_8$ 为 15 000 kN/m。设阻尼为瑞利阻尼 $C = a_0 M + a_1 K$, 其中:质量比例系数 $a_0 = 1.384 \times 10^{-4} s^{-1}$;刚度比例系数 $a_1 = 5.434 1 \times 10^{-7} s$ 。在第 2 个剪切层上施加的扫频激励力为

$$F(t) = 100 \sin(0.5t(0.1 + t)) N \quad (8)$$

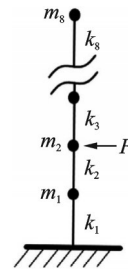


图 3 8 自由度剪切层模型

Fig.3 8-DOF shear layer model

使用 Newmark- β 法计算结构的受迫振动响应,采集每个剪切层的加速度,取 2 组不同的采样频率分别为 $f_{s1} = 100$ Hz, $f_{s2} = 94$ Hz。根据重采样理论, $f_{max} = 47f_{s1} = 50f_{s2} = 4 700$ Hz,即重采样能有效识别一半 f_{max} 内的模态。使用频域分解法对谱密度矩阵进行奇异值分解,得到 2 组采样频率下获得的频谱曲线如图 4 所示。可见,2 个采样频率下的奇异值曲线分别在 11.33 Hz 和 33.69 Hz 处峰值重叠,其对应的模态振型 MAC 值接近 1。因此,这 2 处频率未发生混叠,第 3~8 阶固有频率均发生混叠。

由于采样频率不同,当某个频率超过 Nyquist 频率而发生混叠后,相应奇异值曲线的峰值频率并不相同。为了对 2 组采样的峰值频率进行匹配,需要

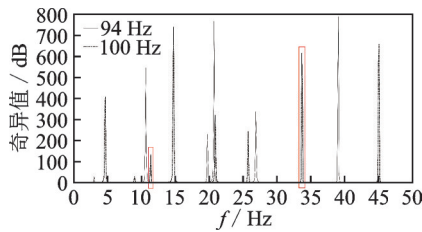


图4 2组采样频率下获得的频谱曲线

Fig.4 Spectrum curves obtained at two sets of sampling frequencies

得到2个采样频率下的模态振型。使用2个不同采样频率获得的MAC矩阵如图5所示。当MAC值接近1时,2个振型为同一阶模态振型,其对应的频率应为同一阶固有频率。根据图5得到94 Hz的采样频率下奇异值曲线的第2,1,3,5,6,4,7,8个峰值频率分别对应100 Hz采样频率下奇异值曲线的第1,2,3,4,5,6,7,8个峰值。图6为重采样下模型的固有频率在扇形折叠曲线上的识别结果。

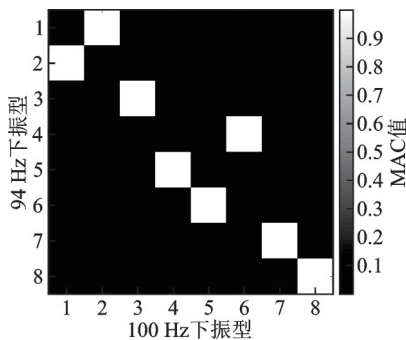


图5 使用2个不同采样频率获得的模态MAC矩阵

Fig.5 Modal MAC matrix obtained using two different sampling frequencies

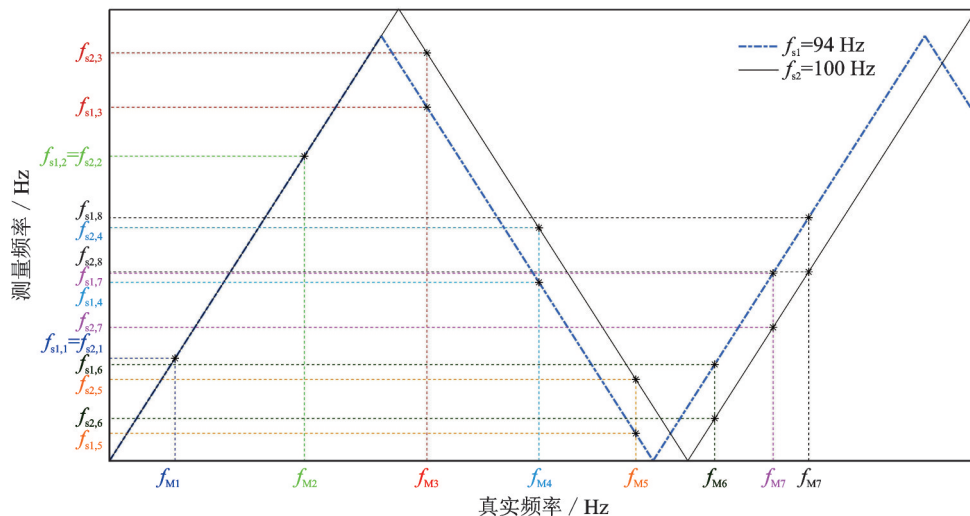


图6 重采样下模型的固有频率在扇形折叠曲线上的识别结果

Fig.6 Identification results of natural frequency of the model on the fan-shaped folding curve under resampling

根据扇形折叠曲线还原出混叠前的固有频率,剪切层模型的固有频率识别结果如表1所示。表1表明,重采样方法对欠采样模态识别是有效的。

相对误差 δ 的计算公式为

$$\delta = |f_M - f| / f \quad (9)$$

其中: f_M 为识别频率; f 为理论频率。

3.2 4层框架结构实验

4层框架结构实验布置如图7所示。框架模型由铝柱和块状板组成,其下端固定在地面,在每层锤击方向安装一个单轴加速度传感器,使用橡胶锤水平击打框架顶层。采样时,分别使用 $f_{s1} = 50$ Hz 和 $f_{s2} = 66.67$ Hz 的采样频率获取2组加速度数据。根据重采样理论, $f_{max} = 4f_{s1} = 3f_{s2} = 200$ Hz,即重采样能有效识别 $0 \sim f_{max}/2 = 100$ Hz 内的模态。作为对比验证,使用1 kHz的采样频率采集结构的加速度数据。图8为1 kHz采样频率下的频谱曲线。

图9为50 Hz和66.67 Hz采样频率下的频谱曲线。可以看出,在50 Hz和66.67 Hz采样频率下结构的奇异值曲线在7.8125 Hz和24.5117 Hz处峰值重叠,其对应模态振型的MAC值接近1。因此,第1,2阶固有频率未发生混叠,其余阶固有频率均发生混叠。

2个采样频率下获得的模态MAC矩阵如图10所示。50 Hz的采样频率下奇异值曲线的第2,1,

表 1 剪切层模型的固有频率识别结果
Tab.1 Natural frequency identification results of shear layer model

阶数	$f_{s1} = 94 \text{ Hz}$		$f_{s2} = 100 \text{ Hz}$		识别频率 /Hz	理论频率/Hz	相对误差/%
	折叠次数	f_{r1}/Hz	折叠次数	f_{r2}/Hz			
1	0	11.330	0	11.330	11.33	11.374 9	0.39
2	0	33.690	0	33.690	33.69	33.737 4	0.14
3	1	39.110	1	45.120	54.89	54.951 0	0.11
4	1	19.740	1	25.780	74.26	74.293 3	0.04
5	1	3.029	1	8.984	91.02	91.105 7	0.09
6	2	10.650	2	4.688	104.65	104.815 5	0.16
7	2	20.750	2	14.750	114.75	114.956 0	0.18
8	2	26.900	2	20.900	120.90	121.181 8	0.23

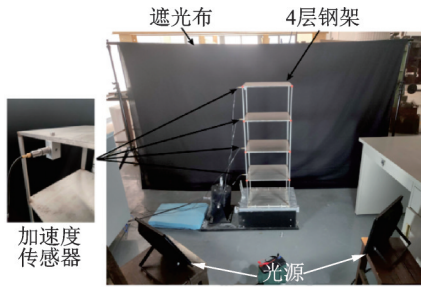


图 7 4层框架结构实验布置

Fig.7 Experimental set-up of 4-story frame structure

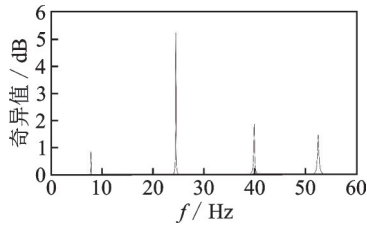


图 8 1 kHz 采样频率下的频谱曲线

Fig.8 Spectrum under 1 kHz sampling frequency

4, 3 个峰值频率分别对应 66.67 Hz 采样频率下奇异值曲线的第 1, 2, 3, 4 个峰值。得到对应的模态振型后, 根据扇形折叠模型还原出真实频率, 并将识别结果与 1 kHz 采样频率获得的结果进行对比。

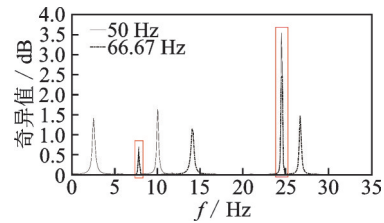


图 9 50 Hz 和 66.67 Hz 采样频率下频谱曲线

Fig.9 Spectrum curve under 50 Hz and 66.67 Hz

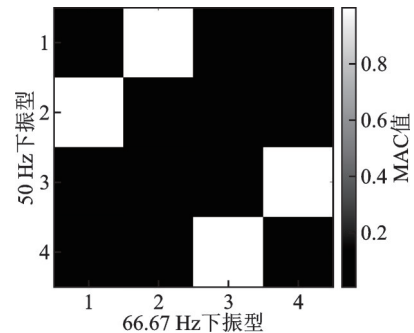


图 10 2 个采样频率下获得的模态 MAC 矩阵

Fig.10 Modal MAC matrix obtained from two different sampling frequencies

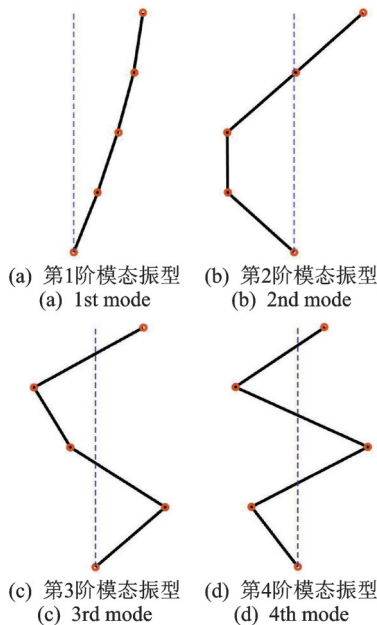
表 2 为框架结构固有频率与阻尼比识别结果。可以看出, 欠采样识别结果(包括频率和阻尼比)与 1 kHz 采样所得结果基本一致。

表 2 框架结构固有频率与阻尼比识别结果

Tab.2 Identification results of natural frequencies and damping ratios of the frame structure

模态阶数	$f_{s1} = 50 \text{ Hz}$		$f_{s2} = 66.67 \text{ Hz}$		识别频率 /Hz	1 kHz 下参考频率/Hz	$\delta(f_M)/\%$	识别阻尼/%	1 kHz 下参考阻尼/%	$\delta(\zeta)/\%$
	折叠次数	f_{r1}/Hz	折叠次数	f_{r2}/Hz						
1	0	7.812 5	0	7.845 1	7.828 8	7.812 5	0.21	0.24	0.24	1.74
2	0	24.560 5	0	24.544 4	24.552 4	24.414 1	0.57	0.14	0.13	4.97
3	1	10.034 2	1	26.692 8	39.971 5	40.039 1	0.17	0.23	0.23	0.30
4	2	2.539 1	1	14.127 7	52.540 7	52.734 4	0.37	0.29	0.28	3.48

图11为欠采样下前4阶模态振型与1 kHz采样频率下的模态振型对比结果,2组振型基本重合。总体而言,重采样方法准确识别了欠采样下的实验框架结构的频率、阻尼比和振型,可用于欠采样模态辨识。



实线“—”表示1 kHz采样识别结果;圆圈“o”表示欠采样识别结果
图11 欠采样下前4阶模态振型与1 kHz采样频率下的模态振型对比结果

Fig.11 Comparison on the first four modal shapes of undersampled and 1 kHz sampled data

4 结束语

笔者针对欠采样问题,提出了基于频域分解法和重采样策略的模态辨识方法,并引入扇形折叠模型对发生混叠的固有频率进行还原。研究指出,重采样策略显著提高了欠采样的有效频率识别范围。通过一个8自由度仿真模型和一个4层框架实验案例,表明所提出的方法能够准确识别欠采样结构的频率、阻尼比和振型,重采样策略能切实解决欠采样模态辨识问题。

参 考 文 献

- [1] DOEBLING S W, FARRAR C R, PRIME M B. A summary review of vibration-based damage identification methods[J]. The Shock and Vibration Digest, 1998, 30(2): 91-105.
- [2] REYNDERS E, HOUBRECHTS J, DE ROECK G. Fully automated (operational) modal analysis [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012, 29: 228-250.
- [3] PEETERS B, DE ROECK G. Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1999, 13(6): 855-878.
- [4] BRINCKER R, ZHANG L, ANDERSEN P. Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition[C] //Proceedings of the International Modal Analysis Conference (IMAC). San Antonio: The International Modal Analysis Conference, 2000: 625-630.
- [5] 王彤, 张令弥. 运行模态分析的频域空间域分解法及其应用[J]. 航空学报, 2006, 27(1): 62-66.
WANG Tong, ZHANG Lingmi. Frequency and spatial domain decomposition for operational modal analysis and its application[J]. Acta Aeronautica ET Astronautica Sinica, 2006, 27(1): 62-66. (in Chinese)
- [6] LUCZAK M, DZIEDZIECH K, VIVOLO M, et al. Contact versus non-contact measurement of a helicopter main rotor composite blade[J]. AIP Conference Proceedings, 2010, 1253(1): 352-360.
- [7] STANBRIDGE A B, EWINS D J. Modal testing using a scanning laser doppler vibrometer [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1999, 13(2): 255-270.
- [8] SHANNON C E. Communication in the presence of noise [J]. Proceedings of the IEEE, 1998, 86 (2) : 447-457.
- [9] ZOLTOWSKI M D, MATHEWS C P. Real-time frequency and 2-D angle estimation with sub-Nyquist spatio-temporal sampling [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(10): 2781-2794.
- [10] YEN J. On nonuniform sampling of bandwidth-limited signals[J]. IRE Transactions on Circuit Theory, 1956, 3(4): 251-257.
- [11] HOSKING PENTEK R H. How to use undersampling [EB/OL]. (2006-12-22) [2018-10-15]. <https://www.eetimes.com/how-to-use-undersampling/>.



第一作者简介:利雅洁,女,1997年12月生,硕士生。主要研究方向为结构振动参数识别。

E-mail:liyj57@mail2.sysu.edu.cn

通信作者简介:汪利,男,1988年11月生,博士、副教授。主要研究方向为结构健康监测和计算力学。

E-mail:wangli75@mail.sysu.edu.cn