

# 滚动轴承波纹度对齿轮动态传递误差的影响\*

刘 静<sup>1,2</sup>, 李 军<sup>3</sup>, 张立欣<sup>3</sup>, 冉贞德<sup>3</sup>, 张显银<sup>3</sup>

(1. 西北工业大学航海学院 西安, 710072)

(2. 西北工业大学无人水下载技术重点实验室 西安, 710072)

(3. 重庆齿轮箱有限责任公司 重庆, 402263)

**摘要** 为了研究轴承波纹度制造误差对轴承-齿轮传动系统中齿轮动态传递误差的影响, 构建了轴承滚道表面时变波纹度误差表征模型, 建立了考虑轴承内外圈滚道表面波纹度幅值、波数以及时变齿轮啮合刚度的轴承-轴-齿轮系统耦合动力学模型, 研究了齿轮传动系统支撑轴承内外圈滚道表面波纹度幅值和波数对齿轮动态传递误差的影响规律。仿真结果表明: 输入轴支撑轴承存在波纹度误差时, 其外圈滚道波纹度对齿轮动态传递误差的影响大于内圈滚道; 输出轴非负载端支撑轴承存在波纹度误差时, 其内外圈滚道波纹度对齿轮动态传递误差的影响相似; 输出轴负载端支撑轴承存在波纹度误差时, 其外圈滚道波纹度对齿轮动态传递误差的影响大于内圈滚道。

**关键词** 波纹度误差; 滚动轴承; 齿轮啮合; 动力学模型

**中图分类号** TH133

## 引 言

齿轮传动系统异常振动是导致其轮齿及轴承元件发生故障的主要原因之一, 研究支撑轴承诱发的齿轮传动系统异常振动特性可为系统运行状态的准确监测与识别提供有益参考。国内外学者对不同误差诱发的齿轮传动系统的振动特征进行了大量研究。Chen 等<sup>[1]</sup>研究了齿轮加工误差对风电行星齿轮传动系统动态特性的影响规律。Li 等<sup>[2]</sup>建立了主动齿轮、从动齿轮、轴、电机和负载组成的 4 自由度动力学仿真模型。Ma 等<sup>[3]</sup>简化了轴承和轴的刚度及阻尼计算方法, 研究了带有局部裂纹的 4 自由度齿轮传动动力学模型。Parey 等<sup>[4]</sup>提出了含局部齿缺陷的 6 自由度齿轮系统动力学模型。Omar 等<sup>[5]</sup>考虑了扭转和横向刚度以及轴的阻尼影响, 建立了 9 自由度齿轮动力学仿真模型。Guo 等<sup>[6]</sup>提出了基于齿轮-转轴-轴承-箱体系统的有限元模型和集中参数法振动模型。文献[7-8]建立了齿轮-转轴-轴承传动系统动力学模型, 分析了轮齿修形对系统振动特性的影响规律。Gafsson 等<sup>[9]</sup>分析了外圈波纹度对滚动轴承系统振动谱的影响规律。Liu 等<sup>[10-11]</sup>研究了滚动轴承滚道表面非均匀波纹度误差对轴承系统振动特性的影响规律。以上研究主要集中于对齿轮及

滚动轴承故障特征提取和故障诊断方法的研究, 而对滚动轴承及轮齿制造误差对齿轮传动系统振动特征影响规律的研究相对较少。

笔者为了研究轴承波纹度制造误差对轴承-齿轮传动系统中齿轮动态传递误差的影响, 构建了轴承滚道表面时变波纹度误差表征模型, 建立了考虑轴承内外圈滚道表面波纹度幅值及波数以及时变齿轮啮合刚度的轴承-轴-齿轮系统耦合动力学模型, 研究了不同转速和负载条件下支撑轴承内外圈滚道表面波纹度幅值和波数对齿轮啮合动态传递误差的影响规律。

## 1 动力学模型

### 1.1 滚动轴承波纹度误差模型

波纹度误差是滚动轴承部件表面不可避免存在的主要形状误差之一。滚动轴承滚道表面存在波纹度时, 波纹度不仅会引起周期性的位移激励, 还会使滚动体与滚道之间的接触刚度发生周期性变化, 导致滚动体与滚道之间接触力周期性变化, 造成滚动轴承及转子系统产生异常振动和疲劳破坏。图 1 为含波纹度误差的轴承滚道示意图。

滚动轴承波纹度可采用正弦函数表示<sup>[11]</sup>。滚动

\* 国家自然科学基金资助项目(52175120)

收稿日期: 2021-10-25; 修回日期: 2021-12-07

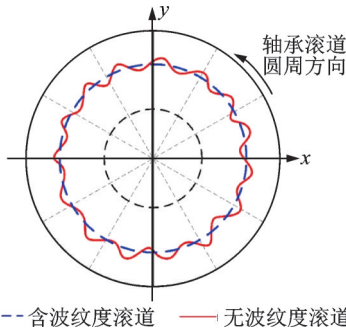


图 1 含波纹度误差的轴承滚道示意图

Fig.1 Schematic of bearing raceway with the waviness error

轴承滚道的径向表面在轴承内圈滚道及外圈滚道的波纹度误差  $p_{ij}$  和  $p_{oj}$  分别表示为

$$p_{ij} = \sum_{l=1}^{\xi} A_{il} \cos \left( -l(f_i - f_c)t + \frac{2\pi l(j-1)}{Z} + \alpha_{il} \right) \quad (1)$$

$$p_{oj} = \sum_{l=1}^{\xi} A_{ol} \cos \left( -l(f_o - f_c)t + \frac{2\pi l(j-1)}{Z} + \alpha_{ol} \right) \quad (2)$$

其中:  $A_{il}$  和  $A_{ol}$  分别为轴承内圈滚道及外圈滚道波纹度误差的幅值;  $\alpha_{il}$  和  $\alpha_{ol}$  分别为轴承内圈滚道及外圈滚道误差的初始角位置;  $f_c$ ,  $f_i$  和  $f_o$  为轴承保持架、内圈及外圈滚道的旋转频率;  $l$  为波纹度阶次;  $\xi$  为波纹度最高阶次;  $t$  为时间;  $j$  为第  $j$  个滚动体;  $Z$  为滚动体个数。

根据赫兹理论,第  $j$  个滚动体与滚道之间的接触力<sup>[10]</sup>为

$$F_{bj} = K_e \delta_j^n \quad (3)$$

其中:  $K_e$  为球与滚道之间的等效接触刚度;  $n$  为刚度指数,球轴承  $n$  取 1.5,圆柱滚子轴承  $n$  取 10/9。

第  $j$  个球在接触角方向的等效形变<sup>[10]</sup>  $\delta_j$  为

$$\delta_j = \left\{ \left[ A \sin \alpha_0 + Z_{bi} + \frac{D}{2} [\theta_y \cos(\theta_j) + \theta_x \sin(\theta_j)] \right]^2 + p_{ij} + p_{oj} + \left[ A \cos \alpha_a + \delta_e \cos \alpha_a + X_{bi} \cos(\theta_j) + Y_{bi} \sin(\theta_j) \right]^2 \right\}^{0.5} - A \quad (4)$$

其中:  $\theta_j = \omega_{ca}t + 2\pi(j-1)/Z$ ;  $Z_{bi}$  为轴承在轴向预紧力作用下产生的轴向形变;  $\alpha_0$  为轴承接触角;  $D$  为节圆直径;  $\alpha_a$  为轴承预载荷接触角;  $X_{bi}$  与  $Y_{bi}$  为轴承径向形变;  $\delta_e$  为初始挠度;  $\delta_e = A \left\{ \frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_a)} - 1 \right\}$ 。

## 1.2 斜齿轮动力学模型

齿轮副为非线性系统,笔者在考虑制造误差的轮齿外啮合刚度计算模型基础上,建立斜齿轮系统动力学模型,如图 2 所示。

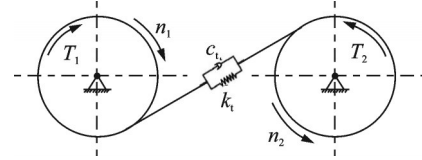


图 2 斜齿轮系统动力学模型

Fig.2 A dynamic model of helical gear

齿轮系统动力学方程为

$$M\ddot{x} + C(t)\dot{x} + k(t)x = F(t) \quad (5)$$

其中:  $M$  为齿轮当量质量,  $M = (m_1 m_2) / (m_1 + m_2)$ , 下标 1 和 2 分别表示输入齿轮与输出齿轮;  $x$  为齿轮在啮合线方向上的相对位移;  $C(t)$  为齿轮啮合阻尼;  $k(t)$  为齿轮时变啮合刚度。

在不考虑齿轮间摩擦影响时,  $F(t)$  主要为齿轮动态啮合力,其表达式为

$$F(t) = k(t)\delta_D \quad (6)$$

其中:  $\delta_D$  为斜齿轮动态传递误差,  $\delta_D = r_1\theta_1 - r_2\theta_2 - y_1 + y_2$ ;  $r$  为齿轮节圆半径;  $\theta$  为转动角度;  $y$  为径向位移。

在齿轮啮合力作用下,轮齿弯曲、剪切以及压缩变形而产生弯曲刚度  $k_b$ 、剪切刚度  $k_s$  以及轴向压缩刚度  $k_c$ 。啮合点在某一时刻综合啮合刚度的表达式<sup>[7]</sup>为

$$k(t) = \frac{1}{\left( \frac{1}{k_{bg}} + \frac{1}{k_{sg}} + \frac{1}{k_{cg}} + \frac{1}{k_{fg}} + \frac{1}{k_{bp}} + \frac{1}{k_{sp}} + \frac{1}{k_{cp}} + \frac{1}{k_{fp}} + \frac{1}{k_h} \right)} \quad (7)$$

其中:  $k_h$  为齿轮啮合过程中啮合点处齿面受到啮合力作用发生弹性变形而产生的接触刚度; 下标  $g$  表示主动轮刚度; 下标  $p$  表示从动轮刚度。

## 1.3 二级齿轮传动系统动力学模型

齿轮-轴-轴承系统中的齿轮动态传递误差主要受各部件加工精度、装配误差、载荷诱发的形变等影响。为研究滚动轴承波纹度误差对二级齿轮传动系统中斜齿轮动态传递误差的影响,笔者建立了轴承-轴-齿轮传动系统多自由度动力学模型,如图 3 所

示。该模型包含输入轴的2个圆柱滚子轴承、输出轴的2个圆柱滚子轴承以及靠近负载端的深沟球轴承。齿轮被简化为等同于齿轮转动惯量的刚性圆盘,并考虑了齿轮间的啮合刚度及阻尼的影响。利用作用在轴承上的激振力,仿真波纹度误差对该二级齿轮系统的影响。基于该动力学模型,分析不同轴承波纹度误差引起的齿轮系统的振动响应特征。

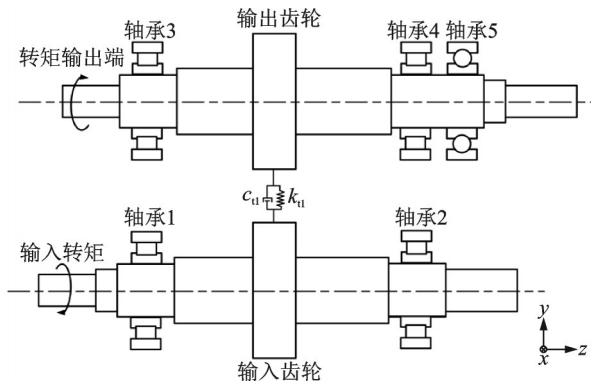


图3 轴承-轴-齿轮传动系统多自由度动力学模型

Fig.3 A multi-degree dynamic model of bearing-rotor-gear system

该模型采用的轴承参数和齿轮参数如表1和表2所示。渐开线齿轮啮合时参与啮合的轮齿对存在周期性变化,啮合过程中齿轮会发生弹性形变,这些因素导致齿轮啮合刚度的变化。齿轮传动系统扭振-径向位移耦合动力学方程为

$$\begin{bmatrix} M_I \\ M_I \end{bmatrix} \{\ddot{u}\} + \begin{bmatrix} \Omega J_I & \\ & \Omega J_I \end{bmatrix} \{\dot{u}\} + \begin{bmatrix} K_I & \\ & K_I \end{bmatrix} \{u\} = \{F_g\} + \{F_b\} + \{F_{ex}\} \quad (8)$$

其中:  $M_I$ ,  $\Omega J_I$  和  $K_I$  分别为齿轮传动系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵;  $\ddot{u}$ ,  $\dot{u}$  和  $u$  分别为每个原件

表1 轴承参数

Tab.1 Structural parameters of rolling element bearing

参数名称	位置		
	轴承1,2	轴承3,4	轴承5
轴承型号	NU234ECM	NU2219ECM	6308
内径 $D_{in}$ /mm	170	95	40
外径 $D_{out}$ /mm	310	170	90
宽度 $B_b$ /mm	52	43	23
节圆直径 $D$ /mm	232	128.1	65
滚动体直径 $d$ /mm	44.5	25.9	15.081
滚子个数 $Z$	10	12	8
滚子有效接触长度/mm	51.5	34.32	—
径向游隙 $C_r$ /μm	50	32.5	10

表2 齿轮参数

Tab.2 Structural parameters of gear

参数名称	输出轴齿轮	输入轴齿轮
齿宽/m	0.2	0.2
模数/mm	4.5	4.5
齿数	39	117
压力角/(°)	20	20
螺旋角/(°)	13.5	13.5
旋向	右旋	左旋
变位系数	0.1247	-0.3417
齿顶高系数	1	1
顶隙系数	1.4	1.4

的位移、速度和加速度向量;  $\Omega$  为转速;  $F_g$  为转子重力;  $F_{ex}$  为系统所受外力;  $F_b$  为考虑波纹度误差影响的轴承接触力。

该动力学模型的假设条件主要包括: ①轴与轴承内圈之间的接触界面为固定连接; ②轴承座和深沟球轴承外圈为弹性连接; ③滚动体与正常轴承滚道之间的接触满足 Hertz 接触条件; ④忽略滚动体质量的影响; ⑤考虑滚动轴承滚道表面制造误差的影响; ⑥不考虑保持架与内外圈滚道和滚动体之间的动态接触行为。

## 2 仿真结果分析

输入转矩  $T_m$  设为  $6 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , 转速为  $4\ 500 \text{ r/min}$ , 输出段负载  $T_{out}$  为  $18 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 。考虑 19 种波纹度误差工况的影响, 内外圈滚道波纹度误差参数如表 3 所示。工况 8~13 及工况 14~19 分别表示轴承 3 和轴承 4 存在波纹度误差, 误差幅值及阶数与工况 2~7 相同且对应。由于不同位置圆柱滚子轴承的滚动体在自转过程中会分别与内外圈滚道不同幅值和阶数的波纹度误差接触, 故产生的冲击特征会不同。因此, 笔者对内外圈波纹度误差进行单独分析。

表3 内外圈滚道波纹度误差参数

Tab.3 Parameters of inner raceway waviness

误差工况	波纹度误差位置	误差幅值/μm	误差阶数
1	无波纹度误差	0	0
2	轴承1内圈滚道	3	30
3	轴承1外圈滚道	3	30
4	轴承1内圈滚道	3	60
5	轴承1外圈滚道	3	60
6	轴承1内圈滚道	6	30
7	轴承1外圈滚道	6	30

笔者在 Matlab 软件中采用四阶龙格-库塔法,用方程求解轴承-轴-齿轮系统的动力学方程。图 4,5 分别为轴承 1 和轴承 4 内外圈滚道波纹度误差对齿轮动态传递误差的影响。不同误差工况下齿轮传动系统动态传递误差如图 6 所示。

图 4~6 表明,当滚动轴承内外圈滚道波纹度幅值和阶数越大,齿轮动态传递误差峰峰值就越大,

即波动范围越大,齿轮传动系统振动特征变化越明显,但其均方根 (root mean square, 简称 RMS) 值变化较小。对于输入轴支撑滚动轴承 #1, 即小齿轮轴的支撑滚动轴承波纹度误差工况, 其外圈滚道波纹度对齿轮传动系统动态传递误差的影响较其内圈滚道波纹度误差更明显, 且峰峰值更大。对于输出轴支撑滚动轴承 #3, 即大齿轮轴上的远输出端

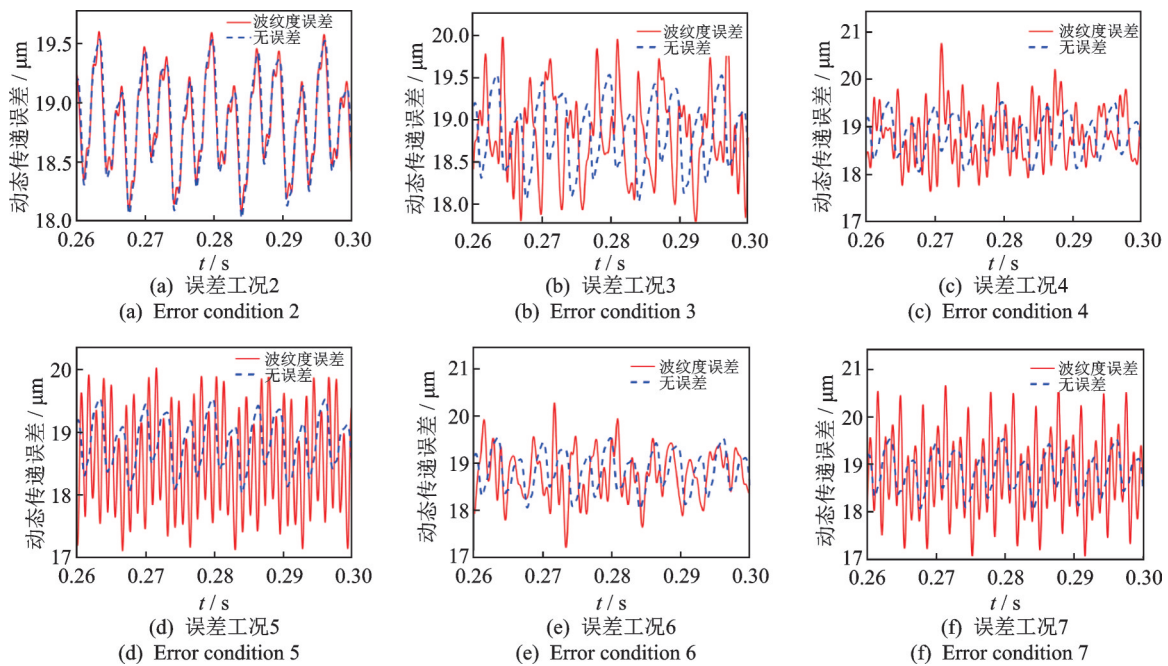


图 4 轴承 1 内外圈滚道波纹度误差对齿轮动态传递误差的影响规律

Fig.4 Effect of the raceway waviness of bearing #1 on the dynamic transmission error of gear system

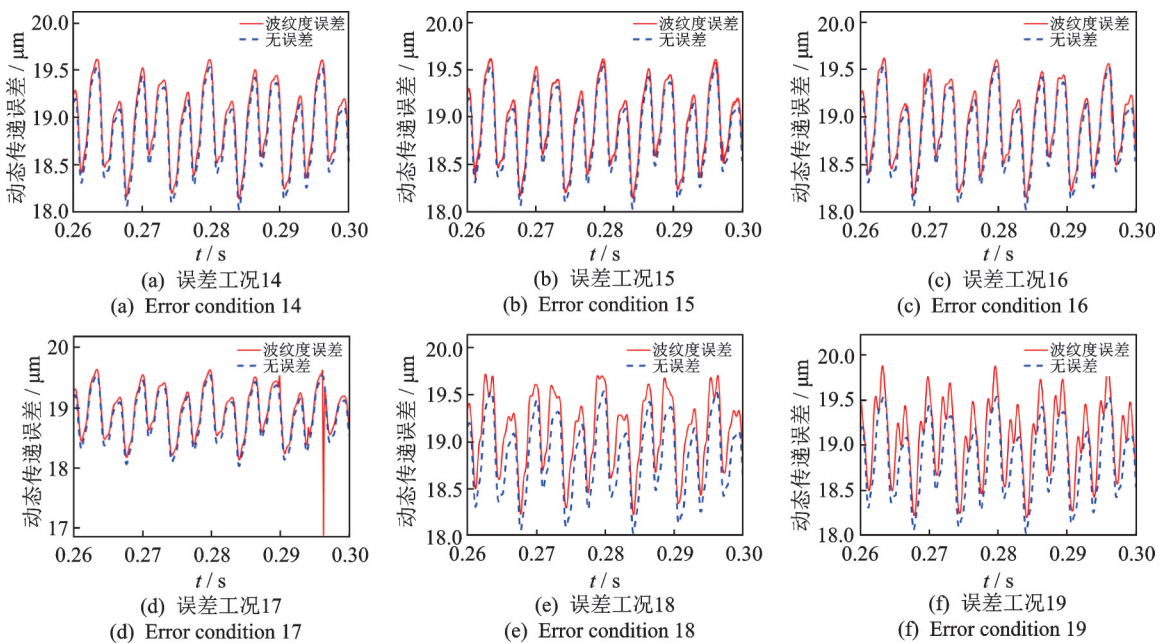


图 5 轴承 4 内外圈滚道波纹度误差对齿轮传动系统动态传递误差的影响规律

Fig.5 Effect of the raceway waviness of bearing #4 on the dynamic transmission error of gear system

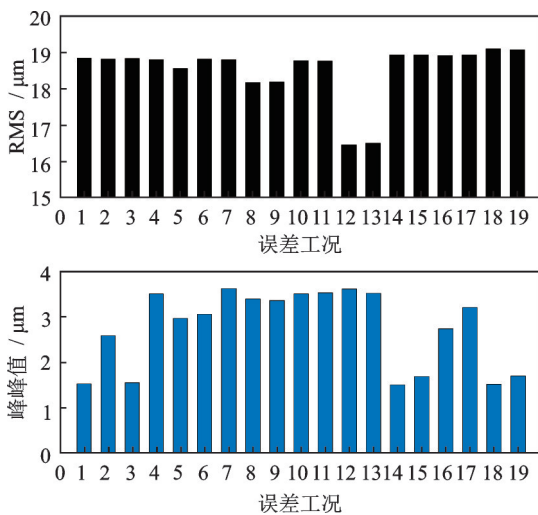


图6 不同误差工况下齿轮传动系统动态传递误差

Fig.6 The dynamic transmission error of gear system under different errors

滚动轴承波纹度误差工况,其内外圈滚道对齿轮传动系统动态传递误差的影响差异较小。对于近负载端的输出轴支撑滚动轴承#4,其内外圈滚道波纹度误差对齿轮动态传递误差的影响相似;当其波纹度误差的幅值及阶数相同时,滚动轴承外圈滚道存在波纹度时,齿轮传动系统的动态传递误差峰峰值更大。

### 3 结束语

考虑了轴承时变啮合刚度、啮合阻尼及啮合力的影响,提出了轴承内外圈滚道波纹度误差时变位移激励模型,建立了含轴承滚道波纹度的多自由度轴承-轴-齿轮耦合动力学模型,研究了不同转速和负载条件下支撑轴承波纹度幅值和阶次对齿轮传动系轮齿啮合动态传递误差的影响规律。结果表明:输入轴支撑轴承存在波纹度误差时,其外圈滚道波纹度对齿轮动态传递误差的影响大于内圈滚道;输出轴非负载端支撑轴承存在波纹度误差时,其内外圈滚道波纹度对齿轮动态传递误差的影响相似;输出轴负载端支撑轴承存在波纹度误差时,其外圈滚道波纹度对齿轮动态传递误差的影响大于内圈滚道。

### 参 考 文 献

[1] CHEN H T, WU X L, QIN D T, et al. Effects of gear manufacturing error on the dynamic characteristics of planetary gear transmission system of wind turbine[J]. Applied Mechanics and Materials, 2011, 86: 518-522.

- [2] LI C J, LEE H. Gear fatigue crack prognosis using embedded model, gear dynamic model and fracture mechanics[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2005, 19(4): 836-846.
- [3] MA R, CHEN Y S. Research on the dynamic mechanism of the gear system with local crack and spalling failure[J]. Engineering Failure Analysis, 2012, 26: 12-20.
- [4] PAREY A, EL BADAoui M, GUILLET F, et al. Dynamic modelling of spur gear pair and application of empirical mode decomposition-based statistical analysis for early detection of localized tooth defect[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 294(3): 547-561.
- [5] OMAR F K, MOUSTAFA K A, EMAM S. Mathematical modeling of gearbox including defects with experimental verification[J]. Journal of Vibration and Control, 2012, 18(9): 1310-1321.
- [6] GUO Y, ERITENEL T, ERICSON T M, et al. Vibro-acoustic propagation of gear dynamics in a gear-bearing-housing system[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(22): 5762-5785.
- [7] MA H, YANG J, SONG R Z, et al. Effects of tip relief on vibration responses of a geared rotor system[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 2014, 228(7): 1132-1154.
- [8] HU Z H, TANG J Y, ZHONG J, et al. Effects of tooth profile modification on dynamic responses of a high speed gear-rotor-bearing system [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016(76/77): 294-318.
- [9] GAFSSON O, OLOF G, TIBORT. Study of the vibration characteristics of bearings[R]. Sweden: Skf Indust Ries Inc Philadelphia PA, 1963.
- [10] LIU J, SHAO Y M. Vibration modelling of nonuniform surface waviness in a lubricated roller bearing[J]. Journal of Vibration and Control, 2017, 23(7): 1115-1132.
- [11] LIU J, XUE L, XU Z D, et al. Vibration characteristics of a high-speed flexible angular contact ball bearing with the manufacturing error[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 162: 104335.



第一作者简介:刘静,男,1983年9月生,博士、教授、博士生导师。主要研究方向为机械动力学和振动噪声分析与控制。曾发表《A dynamic modelling method of a rotor-roller bearing-housing system with a localized fault including the additional excitation zone》(《Journal of Sound and Vibration》2020, No.469)等论文。  
E-mail: jliu@cqu.edu.cn