

# 空间框架结构扭转参数共振试验现象和机理\*

沈超, 阙彰, 李遇春

(同济大学土木工程学院 上海, 200092)

**摘要** 扭转参数共振现象在已有的结构参数共振试验中尚未观察到, 针对此问题, 通过试验手段对一个空间框架模型的扭转参数共振问题进行研究。采用不接触的电磁激励方法, 激发空间框架结构模型的扭转参数共振, 对空间框架扭转参数共振现象和机理进行观测和分析, 研究了结构扭转参数共振的稳定性问题以及参数共振下稳态激励幅值与非线性响应幅值的变化关系。试验结果表明: 当外部周期激励的频率大约为2倍的结构扭转自振频率时, 空间结构将发生整体扭转参数共振; 扭转参数共振稳定边界与已有其他结构平动参数共振的稳定边界相似, 扭转参数共振的机制与平动参数共振基本相同; 在不稳定区域内, 当固定激励频率时, 随着激励幅值的增大, 非线性稳态响应的幅值近似地呈线性增大。

**关键词** 空间框架结构; 扭转参数共振; 稳定边界; 非线性响应

**中图分类号** TV312; TV32+3

## 引言

空间框架是工程中一种常见的结构型式, 经常受到周期性荷载的作用, 如动力机械产生的周期性动力荷载等。若结构所受的周期性荷载的频率与结构自身固有频率存在某种数量关系(例如2倍关系)时, 结构存在参数共振或动力失稳的危险<sup>[1-2]</sup>。普通共振属于线性共振, 而参数共振则属于非线性共振范畴。

针对结构参数共振问题, 文献[1-3]研究了简单梁在各种边界条件下的动力失稳现象。Mishra等<sup>[4]</sup>研究了带有裂纹梁结构的参数不稳定性问题。Cattellani等<sup>[5]</sup>研究了带有瑕疵圆柱壳的参数共振问题。钟子林等<sup>[6]</sup>研究了矩形薄板的动力稳定问题。

当结构具有多个子系统时, 结构的某个子系统可能被激发出自参数共振。Tondl等<sup>[7]</sup>对自参数共振进行了定义, 当有外部周期荷载作用于其中一个子系统而引发其振动时, 该子系统的振动作为激励源会激发其他子系统产生参数共振, 这种参数共振称为自参数共振。文献[8-10]研究了斜拉梁的自参数振动问题。Li等<sup>[11-12]</sup>对于框架结构自参数共振问题进行了相关的试验与数值研究。

目前, 相关研究多为平面内参数共振问题, 而空间结构的参数振动研究相对较少。文献[13-14]研究了空间框架的参数共振稳定性问题, 主要是结构

的平动动力失稳问题。Liu等<sup>[13]</sup>从理论上预测了空间扭转参数共振(失稳)的可能, 但还没有结构空间扭转参数共振问题的试验研究。一般而言, 对于复杂结构大幅非线性参数共振的理论分析非常复杂, 而结构的大幅非线性参数共振试验却相对容易实现。由于扭转参数共振比较少见, 因此结构设计时容易忽视这一潜在的风险。

笔者采用隔空的电磁激励方法, 可以避免传统激振方法的局限性, 为空间框架结构提供周期性激励力, 诱发其产生扭转参数共振, 研究空间框架结构的扭转参数共振的产生机理以及扭转参数共振的稳定性问题, 进一步为非线性参数共振理论分析提供试验基础和数据。

## 1 试验研究

### 1.1 试验模型设计

本试验仅对空间框架结构的扭转参数共振开展研究。空间框架扭转参数共振试验简图与模型尺寸如图1所示。模型材料为钢材, 其密度为 $7850 \text{ kg/m}^3$ , 泊松比 $\nu=0.3$ , 弹性模量 $E=2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ 。空间框架的水平结构为1.5 mm厚的钢板条组成的田字形结构, 竖向结构为4根直径为2 mm的钢柱, 4个柱子与田字形钢板4个角刚接, 柱子的底部

\* 国家自然科学基金资助项目(51879191)

收稿日期: 2023-04-24; 修回日期: 2023-09-08

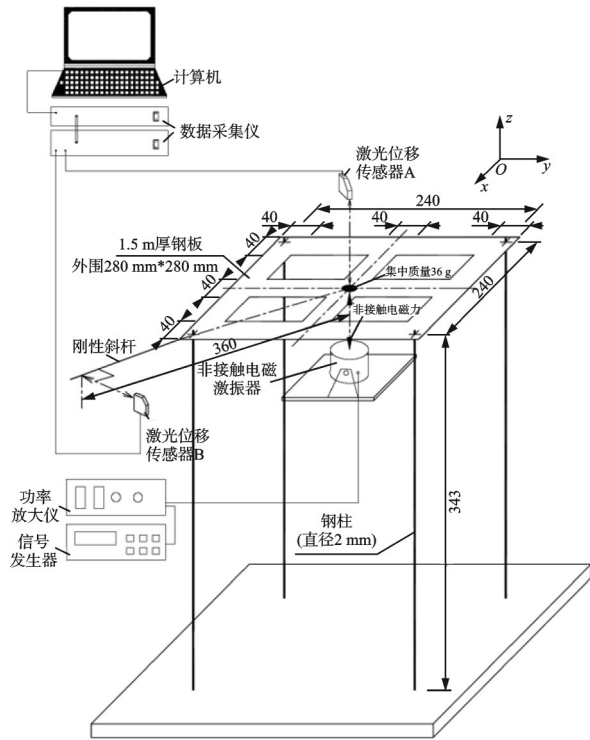


图1 空间框架扭转参数共振试验简图与模型尺寸(单位: mm)

Fig.1 Torsional parametric resonance test schematic diagram of spatial frame and the model dimension(unit:mm)

与底板刚接,田字板与柱组成一个简单的空间结构。

一般空间框架的前3阶自振频率分别为 $x, y$ 方向的平动频率 $f_{H1}, f_{H2}$ 以及扭转频率 $f_T$ ,前3阶的振动基本为框架柱的弯曲振动,而框架平面结构基本保持为一个刚性平面。

设作用在平面结构中点垂直方向( $z$ 方向)上周期荷载的频率为 $f$ ,当 $f = 2f_{H1}$ (或 $f = 2f_{H2}$ )时,空间框架将发生水平方向的平动参数共振;当 $f = 2f_T$ 时,空间结构则会发生扭转参数共振。

### 1.2 试验设备

试验设备照片如图2所示,包括激振和振动测量两部分。

1) 激振设备。激振设备包括信号发生器(EM32003B)、功率放大器(GF100)及定制的电磁

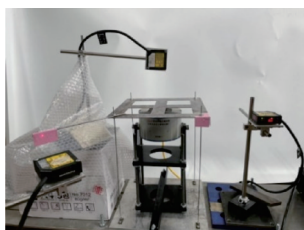


图2 试验设备照片

Fig.2 Photo of experimental facilities

激振器。信号发生器提供一个正弦波信号,该信号经功率放大器放大,然后传输至电磁激振器,从而对结构平面的条形板中点施加非接触周期激振力。该激振器的内部线圈会对铁质试件的某一小区域产生一个周期性的推拉电磁力,为了加大无接触的电磁作用,本试验在平面田字板中点增加了质量为36 g的强力磁铁。试验中难以直接测量激励电磁力,但可以间接测量激振点处的位移,将此位移视为激励位移。通过数值计算,该激励位移可以转化成等效的激励力<sup>[12]</sup>。

2) 振动测量设备。振动测量设备有激光位移传感器(HL-G112-S-J)、数据采集系统(INV306N)及计算机。激光位移传感器对测点位移信号进行捕捉,将测量信号传输至数据采集系统,最后再传给计算机进行监控和记录,采用的数据处理软件为Coinv DASP V10。试验中同时测量平板中点竖向( $z$ 方向)位移和 $x, y$ 方向的水平位移。为了测量平板的扭转位移,在平板上固定一个刚性斜杆,斜杆的延长线与平板中点相交,在斜杆上布置一个激光测点,且测点与平板中心距离为360 mm。当平板发生扭转振动时,可测量与斜杆相垂直的切线位移,将这个位移值除以中心距离(360 mm)就可近似得到平板的转角值。

### 1.3 结构扭转自振频率与阻尼比

采用自由衰减法测定空间框架扭转自振频率及阻尼比系数,让空间结构产生一个初始的扭转角位移,结构将发生空间的自由扭转振动。空间结构扭转振型示意图如图3所示。采用激光位移计B测量斜杆端部的切向位移,测量结构的扭转振动自由衰减曲线,如图4所示。其中,图4(a)为测量的切向位移衰减曲线,图4(b)为切向位移除以转动半径(360 mm)得到的转角位移衰减曲线。根据该衰减曲线可得到结构的自振频率及阻尼比系数。经过8次

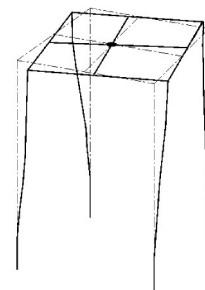


图3 空间结构扭转振型示意图( $f_T = 3.068$  Hz)

Fig.3 Schematic diagram of torsional mode of the spatial frame( $f_T = 3.068$  Hz)

测量,得到的结构扭转自振频率与阻尼比如表 1 所示。由表可以看出,测量频率的离散性较小,而阻尼比的离散性较大,这符合已有的结构动力学现象。

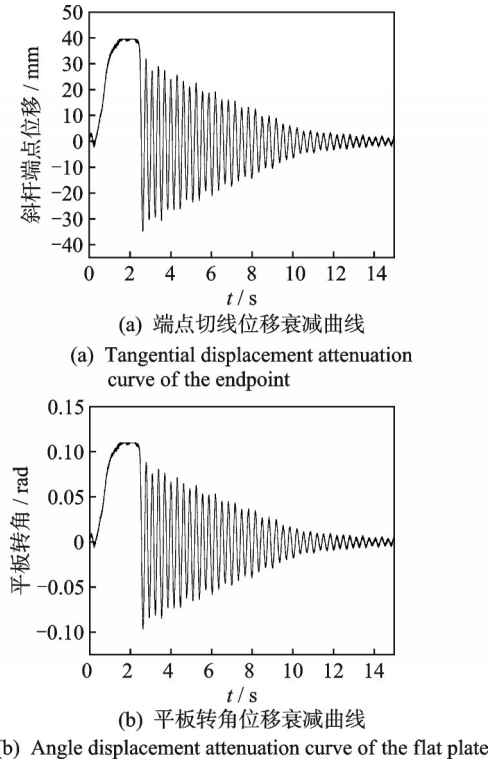


图 4 扭转振动自由衰减曲线

Fig.4 Free attenuation curve of torsional vibration

表 1 结构扭转自振频率与阻尼比

**Tab.1 Torsional natural frequency and damping ratio**

序号	自振频率/Hz	阻尼比/%
1	3.041	1.794
2	3.117	0.925
3	3.032	1.276
4	3.051	1.107
5	3.040	1.388
6	3.046	1.109
7	3.107	0.932
8	3.110	1.157
平均值	3.068	1.211

## 2 试验结果

### 2.1 扭转参数共振现象

试验时调节激振器支架,使激励源正对平板中点,然后固定电磁激振器,并按图 1 布置激光位移计 A 和 B,分别记录平板中点的竖向位移及斜杆端部的切线位移。平板中点的位移响应可以看成电磁激振器给予的位移激励。结构扭转自振频率  $f_T \approx$

3.068 Hz,可在 2 倍扭转自振频率的附近设置激振频率,这时可发生扭转参数共振。例如,可设  $f = 6.41$  Hz,即满足  $f \approx 2f_T$ ,保持频率不变,逐渐增大激励幅值,直到结构发生扭转参数共振(动力失稳)。动力失稳需要初始的扰动才能发生,为了能在较短时间内实现参数共振失稳,给结构施加一个初始的扭转扰动,记录下结构扭转失稳的整个过程。平板中点响应位移如图 5 所示。图 5 可看成参数共振的位移激励,测得的激励频率  $f = 6.413$  Hz,激励幅值约为 0.617 mm。结构扭转参数共振响应如图 6 所示。由图可知,在平板中点位移激励作用下,结构的扭转位移响应在失稳初期呈非线性(指数)增长,扭转振动的响应频率为 3.192 Hz,其频率约为激励频率  $f = 6.143$  Hz 的一半,说明空间框架结构发生了主参数共振。扭转位移增长经历了一段时间后达到最大值,开始进行稳态振动(振幅为一常值),这种稳态振动正是参数共振的“极限环振动”<sup>[1-2,12,14]</sup>。

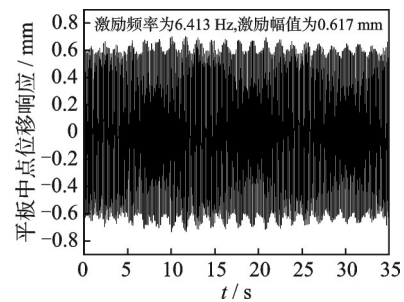


图 5 平板中点响应位移

Fig.5 Response displacement at the midpoint of the flat plate

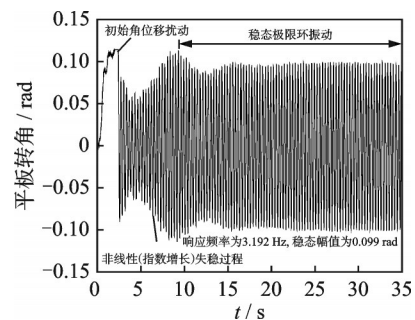


图 6 结构扭转参数共振响应

Fig.6 Torsional parametric resonance response of structure

### 2.2 扭转参数共振稳定边界曲线

基于参数共振理论,当激励频率  $f$  约为结构自振频率  $f_T$  的 2 倍、激励位移幅值大于失稳的临界值时,将触发结构的扭转参数共振,这时结构发生强烈振动。当激励位移幅值小于失稳的临界值时,结构几乎不振动或只有很微小的振动,存在一个临界频

率与振幅使结构刚好失去稳定而发生参数共振,由临界点(临界频率与振幅对应的点)组成的曲线称为不稳定边界。为了在试验中得到不稳定边界,固定激励频率不变,从小到大逐步增加激励幅值,直到结构产生扭转动力失稳,采集的边界点为刚好引发参数共振激励点的数据,通过滤波后去掉高频的噪声,最后得到(激励)稳定边界点的频率与对应的幅值。稳定边界测量结果如表2所示。根据表2绘制成扭转参数共振稳定边界,如图7所示。稳定边界的形状与已有其他结构平动参数共振的稳定边界相似,表明扭转参数共振的机制与平动参数共振相同。

表2 稳定边界测量结果

Tab.2 Measurement results of stability boundary

激励频率/Hz	位移激励幅值/mm
6.10	0.334 93
6.20	0.177 53
6.30	0.152 85
6.40	0.123 32
6.50	0.088 76
6.60	0.098 69
6.70	0.066 95
6.80	0.153 06
6.90	0.444 99
7.00	0.809 87

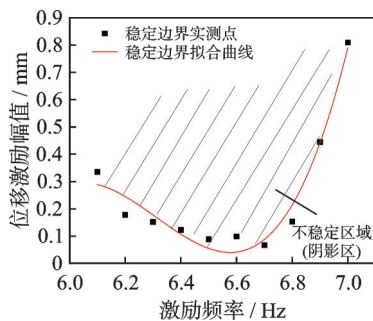


图7 扭转参数共振稳定边界

Fig.7 Stability boundary of torsional parametric resonance

### 2.3 参数共振下稳态激励与非线性响应幅值曲线

当结构失稳进入极限环振动状态后,结构处于大幅的非线性振动状态,采用理论方法计算空间结构的大幅非线性参数共振响应非常复杂,而通过试验则容易得到结构的非线性响应。在失稳区域内,固定激振频率,逐步提高激振的位移幅值,将分别得到不同的结构非线性稳态幅值响应。结构在激励频率 $f = 6.20, 6.30, 6.40, 6.50$  Hz时,参数共振下响应幅值随激励幅值的变化如图8所示。其中,实线

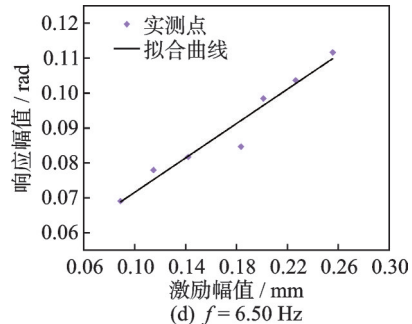
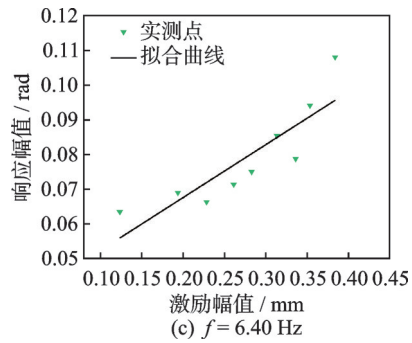
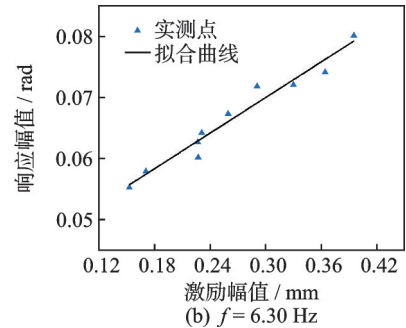
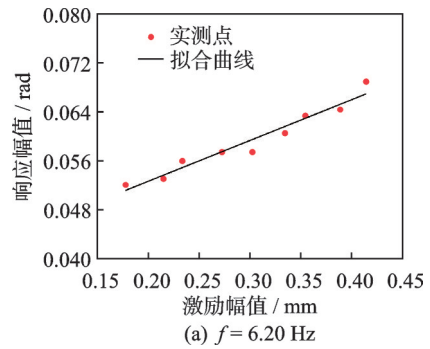


图8 参数共振下响应幅值随激励幅值的变化

Fig.8 Variation of response amplitude with the excitation amplitude under parametric resonance

为拟合线段。由图可知,随着位移激励幅值的增大,非线性稳态响应的幅值近似地呈线性逐步增大。本试验结果可为参数振动理论的非线性分析提供实测数据。

需要说明的是,当激振频率 $f = 6.60, 6.70, 6.80$  Hz时,结构的参数共振响应幅值很大,超过了位移传感器的量程范围,无法继续测量。当激振频率再继续增加时,会出现其他平动参数共振的干扰,也无法继续测量。

### 3 结 论

1) 在空间框架平板结构中点施加周期激励,当激励频率大约是2倍的结构扭转自振频率时,空间结构将发生整体扭转参数共振,当扭转动力失稳后,结构的扭转响应呈现非线性(指数)增长,最后趋向于大幅的“极限环振动”,振幅保持在一个稳定的状态。

2) 扭转参数共振稳定边界的形状与已有其他结构平动参数共振的稳定边界相似,表明扭转参数共振的机制与平动参数共振相同。

3) 在不稳定区域内,当固定激励频率时,随着激励幅值的增大,非线性稳态响应的幅值近似地呈线性逐步增大。

### 参 考 文 献

- [1] BOLOTIN V V. The dynamic stability of elastic systems[M]. San Francisco: Holden Day, 1964:266-312.
- [2] XIE W C. Dynamic stability of structures [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2006:245-257.
- [3] MAJORANA C E, PELLEGRINO C D. Dynamic stability of elastically constrained beams: an exact approach [J]. Engineering Computations, 1997, 14(7): 792-805.
- [4] MISHRA U K, SAHU S K. Parametric instability of beams with transverse cracks subjected to harmonic in-plane loading [J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2015, 15(1): 1540006.
- [5] CATELLANI G, PELLICANO F, DALL'ASTA D, et al. Parametric instability of a circular cylindrical shell with geometric imperfections [J]. Computers & Structures, 2004, 82(31/32): 2635-2645.
- [6] 钟子林, 刘爱荣. 矩形薄板的参数共振失稳理论与试验[J]. 实验室研究与探索, 2019, 38(7): 26-33.  
ZHONG Zilin, LIU Airong. Analytical and experimental research of parametric resonance instability on rectangular thin plate[J]. Research and Exploration in Laboratory, 2019, 38(7): 26-33.(in Chinese)
- [7] TONDL A, RUIJGROK M, VERHULST F, et al. Auto-parametric resonance in mechanical systems [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000:1-9.
- [8] XIA Y, FUJINO Y. Auto-parametric vibration of a cable-stayed-beam structure under random excitation [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2006, 132(3): 279-286.
- [9] 陈丕华, 王修勇, 陈政清, 等. 斜拉索面内参数振动的理论和试验研究 [J]. 振动与冲击, 2010, 29(2): 50-53.  
CHEN Pihua, WANG Xiuyong, CHEN Zhengqing, et al. Theoretical and experimental study on planar parametric oscillations in a stayed-cable [J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(2): 50-53.(in Chinese)
- [10] 王涛, 刘德贵, 黄辉. 大跨度铁路斜拉桥全桥索-梁相关振动研究 [J]. 振动与冲击, 2019, 38(17): 103-114.  
WANG Tao, LIU Degui, HUANG Hui. Cable-beam related vibration of a long span railway cable-stayed bridge [J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(17): 103-114.(in Chinese)
- [11] LI Y, GOU H, ZHANG L, et al. Auto-parametric resonance of framed structures under periodic excitations [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2017, 61(4): 497-510.
- [12] LI Y, LIU W, SHEN C, et al. Experimental and numerical analyses for auto-parametric internal resonance of a framed structure [J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2021, 21(1): 2150012.
- [13] LIU W, ZHANG B, SHEN C, et al. Stability analysis for spatial auto-parametric resonances of framed structures [J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2022, 22(6): 2250065.
- [14] 刘伟, 沈超, 于越, 等. 框架结构空间自参数共振的试验与数值研究 [J]. 振动与冲击, 2022, 41(21): 78-85, 120.  
LIU Wei, SHEN Chao, YU Yue, et al. Experimental and numerical studies on spatial self-parametric resonance of frame structure [J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(21): 78-85, 120.(in Chinese)



**第一作者简介:**沈超,女,1987年8月生,博士生、工程师。主要研究方向为水工结构动力学。曾发表《门式框架结构平面外的动力失稳试验研究》(《振动与冲击》2022年第40卷第20期)等论文。  
E-mail: shenc@tongji.edu.cn

**通信作者简介:**李遇春,男,1962年2月生,博士、教授。主要研究方向为水工结构动力学。  
E-mail: YCL2000@tongji.edu.cn