DOI:10.16450/j.cnki.issn.1004-6801.2025.01.002

机载悬挂结构体分阶段主被动抑振*

蔡　赫[1]，王燕波[1]，邓松波[1]，李　科[1,2]，陈志鸿[1]，楼云江[2]
（1.北京精密机电控制设备研究所航天伺服驱动与传动技术实验室　北京，100076）
（2.哈尔滨工业大学（深圳）机械工程与自动化学院　深圳，518055）

摘要　针对机载重型悬臂体的瞬态和稳态抑振问题，提出了基于机械手的主被动分阶段抑振方法。由于机械手动态能力有限，在瞬态阶段，振动时间短振幅大，故采用机械手固定抱夹的被动减振方式；在稳态阶段，振动为周期性小振幅，故采用机械手多臂协同的主动抑振方式。首先，将机械手被动抱夹状态下的悬臂体等效为弹性支撑悬臂梁模型，通过分段构建弹性支撑边界条件，以脉冲激励的形式引入弹性力，获得被动减振模型；其次，在模态空间的基础上得到柔性基础下的振动模型，进一步提出了基于减振因子的主动抑振算法；最后，搭建了小机械手实验平台，将弯矩作为评价减振率的指标。实验结果表明，将主动抑振算法应用到实验平台中，理论与实验的抑振效果仅相差3.4％，验证了主动抑振算法的正确性。

关键词　机械手；被动减振；主动抑振；瞬态和稳态；弹性支撑悬臂梁
中图分类号　TH113；V246

引　言

载机执飞过程中力学环境复杂，其上的悬挂物在飞行过程中常经历低频振动，仅靠结构本身的阻尼很难对其进行衰减，长时间后易产生疲劳破坏。

被动减振大多对系统进行隔振、吸振和减振[1]。主动抑振常采用的方法有：基于独立模态法对挠性体进行振动控制[2]；采用混合自适应振动主动控制算法抑制多个目标频谱的结构微振动[3]；通过智能材料的结构技术进行振动控制[4]；采用自适应反馈时滞控制主动悬架在时变时滞下的减振效果[5]；将自适应滑膜控制用于空间柔性机械臂的精确控制[6]；以状态空间理论为基础采用最优控制法求解结构振动的最优控制输入[7]；利用奇异摄动法将动力学方程分解为慢变子和快变子，从而解耦进行控制[8]；调整机械臂的运动参数来抑制系统的残余振动[9]；用神经网络法[10]对机翼振动进行主动控制等。以上抑振方法多从动力源控制的角度出发，或单独的被动减振，对于机载上吨级悬挂物的减振问题并不适用。

笔者在悬挂物远端薄弱处加入支撑机械手，采用“主悬挂＋机械手”的方式挂载到舱内，悬挂物与主悬挂的连接可简化为悬臂梁模型，机械手简化为弹性支撑。通过机械手的被动刚度和主动作动实现悬挂物的瞬态被动减振和稳态主动抑振[11]。由于瞬态时间短，其对破断贡献大[12]，只要低于安全值即可，因此被动减振率指标为40％；而稳态时间长，其对疲劳损伤贡献大，因此主动抑振指标为70％。笔者以典型的低频机载环境信号作为输入信号，在悬臂梁结构动力学模型中引入弹性支撑。通过分段构建弹性支撑边界条件，考虑了弹性支撑刚度与悬臂梁系统耦合的影响，在此基础上推导出被动减振模型，通过仿真验证了计算结果。提出了在模态空间下基于减振因子的主动抑振算法，采用三爪机械手通过多臂协同的抱夹方式进行主动抑振[13]，并搭建了小型实验台，验证了该算法的正确性。

1　弹性支撑悬臂梁振动模型

1.1　悬臂梁振动模型

弹性支撑悬臂梁模型如图1所示。悬臂梁为RQ，弹性支撑机械手（以下简称弹性支撑）在P点处抱住箭体，其刚度为k。悬挂物在C处有一薄弱连接面，此面所受弯矩较大。由于无合作接口，需通过机械手的抑振将连接面C处的弯矩降低。

将悬臂梁在弹性支撑P处划分为两部分，分别为X_1和X_2坐标系。坐标系X_1的原点在第1段起始点R，坐标系X_2的原点在第2段起始点P。

*　国家自然科学基金资助项目（U1713202）
收稿日期：2023-02-20；修回日期：2023-06-02

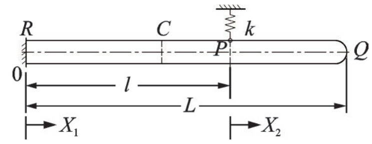


图 1　弹性支撑悬臂梁模型

Fig.1　Elastic supported cantilever beam model

1.2　弹性支撑悬臂梁振型方程及振型函数

利用欧拉-伯努利梁模型建立梁的弯曲振动微分方程，根据图 1 的分段情况得到振型函数[14]为

$$\begin{cases} X_1(x)=A_1\sin\beta_i x+B_1\cos\beta_i x+C_1\mathrm{sh}\beta_i x+D_1\mathrm{ch}\beta_i x \\ X_2(x)=A_2\sin\beta_i x+B_2\cos\beta_i x+C_2\mathrm{sh}\beta_i x+D_2\mathrm{ch}\beta_i x \end{cases} \tag{1}$$

其中：sh 为双曲正弦函数；ch 为双曲余弦函数。

边界条件中，左侧 R 点为固定约束。P 点为铰支约束，右侧 Q 点为自由约束。根据变形协调条件，左右两段在 P 点处的挠度和转角连续，有

$$\begin{cases} X_1(0)=0 \\ X_1'(0)=0 \\ X_1(l)=X_2(0) \\ X_1'(l)=X_2'(l) \\ X_1''(l)=X_2''(0) \\ EI\left[X_1'''(l)-X_2'''(0)\right]=kX_2(0) \\ X_2''(L-l)=0 \\ X_2'''(L-l)=0 \end{cases} \tag{2}$$

其中：E 为弹性模量；I 为梁截面的惯性矩。

将式(2)的边界条件代入式(1)的前 3 阶导数中，得到 8 组等价的齐次方程组。以系数 A_1，A_2，B_1，B_2，C_1，C_2，D_1 和 D_2 为变量，得到方程组的系数矩阵 T，当行列式 $|T|=0$ 时，求得振型方程的本征值 β_i。根据正则振型函数的正交性求唯一解。

RP 段的各阶参数为

$$\begin{cases} C_{1i}=-A_{1i} \\ B_{1i}=-D_{1i}=-\dfrac{J_i}{F_i}A_{1i} \end{cases} \tag{3}$$

PQ 段的各阶参数为

$$\begin{cases} A_{2i}=A_{1i}\left[\cos\beta_i l+\dfrac{J_i}{F_i}(\sin\beta_i l+M_i\mathrm{ch}\beta_i l- \right. \\ \qquad \left. M_i\cos\beta_i l)+M_i(\sin\beta_i l-\mathrm{sh}\beta_i l)\right] \\ B_{2i}=(\sin\beta_i l-\dfrac{J_i}{F_i}\cos\beta_i l)A_{1i} \\ C_{2i}=A_{1i}\left[-\mathrm{ch}\beta_i l+\dfrac{J_i}{F_i}(\mathrm{sh}\beta_i l+M_i\cos\beta_i l- \right. \\ \qquad \left. M_i\mathrm{ch}\beta_i l)-M_i(\sin\beta_i l-\mathrm{sh}\beta_i l)\right] \\ D_{2i}=(-sh\beta_i l+\dfrac{J_i}{F_i}ch\beta_i l)A_{1i} \end{cases} \tag{4}$$

振型函数中各系数的第 1 个角标代表在梁的 RP 或 PQ 段，第 2 个角标代表第 i 阶振型。其余参数为

$$\begin{aligned} J_i=&-\mathrm{sh}\beta_i l\mathrm{ch}\beta_i(L-l)-\sin\beta_i l\cos\beta_i(L-l)+ \\ &(M_i\mathrm{sh}\beta_i l-M_i\sin\beta_i l-\mathrm{ch}\beta_i l)\mathrm{sh}\beta_i(L-l)- \\ &\sin\beta_i(L-l)(M_i\sin\beta_i l-M_i\mathrm{sh}\beta_i l+\cos\beta_i l); \\ F_i=&-\mathrm{ch}\beta_i l\mathrm{ch}\beta_i(L-l)-\cos\beta_i l\cos\beta_i(L-l)+ \\ &(M_i\mathrm{ch}\beta_i l-M_i\cos\beta_i l+\sin\beta_i l)\sin\beta_i(L-l)+ \\ &\mathrm{sh}\beta_i(L-l)(M_i\mathrm{ch}\beta_i l-M_i\cos\beta_i l-\mathrm{sh}\beta_i l); \\ M_i=&k/(2EI\beta_i^3)。 \end{aligned}$$

根据式(3)和式(4)，A_{1i}，A_{2i}，B_{1i}，B_{2i}，C_{1i}，C_{2i}，D_{1i} 和 D_{2i} 可唯一确定。RP 段和 PQ 段各阶振型函数分别为

$$\begin{cases} X_{1i}(x)=A_{1i}\left[\sin\beta_i x-\mathrm{sh}\beta_i x-\dfrac{J_i}{F_i}(\cos\beta_i x-\mathrm{ch}\beta_i x)\right] \\ X_{2i}(x)=A_{2i}\sin\beta_i x+B_{2i}\cos\beta_i x+C_{2i}\mathrm{sh}\beta_i x+D_{2i}\mathrm{ch}\beta_i x \end{cases} \tag{5}$$

由正则函数的正交性，RP 段各阶振型和 PQ 段各阶振型共同组成了整个梁的各阶振型 $X_i(x)$。当 $i=j$ 时，广义质量 M_i 为单位质量，则

$$\rho S\int_0^L X_i(x)X_j(x)\mathrm{d}x=\rho S\int_0^L X_i^2(x)\mathrm{d}x= \\ \rho S\left(\int_0^l X_{1i}^2(x)\mathrm{d}x+\int_0^{L-l}X_{2i}^2(x)\mathrm{d}x\right)=1 \tag{6}$$

其中：ρ 为梁的密度；S 为梁的横截面面积。

将式(6)积分展开，可知 A_{1i}，RP 和 PQ 的振型式也唯一确定。

1.3　弹性支撑悬臂梁数值模拟

通过 Matlab 数值计算和有限元仿真的对比，来验证弹性支撑悬臂梁模态和振型公式的正确性。利用 Matlab 对行列式 $|T|$ 进行计算，获得在弹簧刚度 k 下的各阶 β_i 值，再结合固有频率公式计算得到弹性支撑悬臂梁的固有频率。

机械手刚度为 $k=5\times10^6$ N/m，利用式(6)求出 A_{1i}，通过式(3)和式(4)求出前 2 阶频率对应的参数值。这里的悬臂梁以真实的模型参数建模，有限元仿真与 Matlab 仿真结果对比如下。

1) 对于一阶基频 $\beta_1=0.257\,5$，可得振型参数为：$B_{11}=-1.627A_{11}$；$C_{11}=-A_{11}$；$D_{11}=-B_{11}$；$A_{21}=2.483A_{11}$；$B_{21}=0.553A_{11}$；$C_{21}=0.158A_{11}$；$D_{21}=1.152A_{11}$。根据正则函数的正交性，可得 $A_{11}=0.007\,1$。

2) 对于二阶频率 $\beta_2=0.578\,5$，可得振型参数为：$B_{12}=-0.984A_{12}$；$C_{12}=-A_{12}$；$D_{12}=-B_{12}$；$A_{22}=-0.826A_{12}$；$B_{22}=1.114A_{12}$；$C_{22}=-0.241A_{12}$；$D_{22}=-0.116A_{12}$。根据正则函数的正交性，可得 $A_{12}=0.014\,9$。

一阶和二阶振型的仿真与理论分别如图 2,3 所示。模态振型的理论与仿真对比如表 1 所示。可见,仿真与理论结果误差在 5% 以内,满足计算精度要求,验证了弹性支撑悬臂梁基频和振型部分理论推导的正确性。

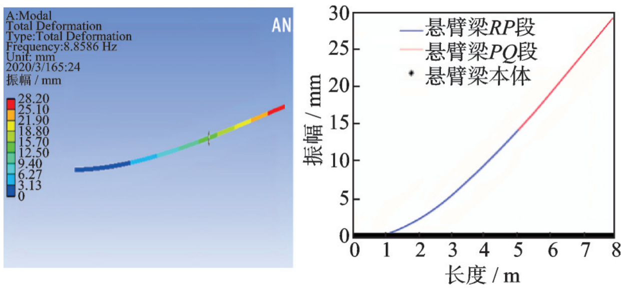


图 2　一阶振型的仿真与理论

Fig.2　Simulation and theory of first-order mode

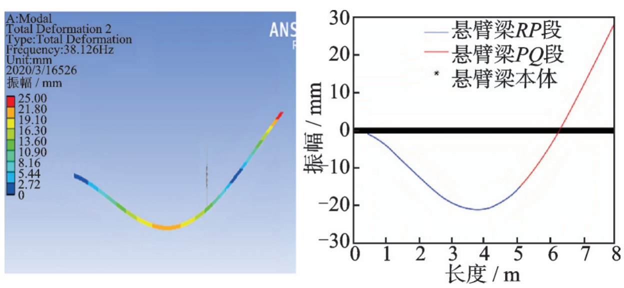


图 3　二阶振型的仿真与理论

Fig.3　Simulation and theory of second-order mode

表 1　模态振型的理论与仿真对比

Tab.1　Comparison of theoretical and simulation modes

结果	一阶振型		二阶振型	
	f/Hz	幅值/mm	f/Hz	幅值/mm
仿真	8.86	28	38.20	25
理论	9.09	29	40.10	26
误差/%	2.59	3.57	4.73	3.84

2　被动减振

2.1　弹性支撑悬臂梁被动减振理论

将 R 端看作柔性基础的弹簧阻尼系统,由柔性基础传递的振动通过惯性力的形式加载到整个悬臂梁上,弹性支撑机械手等效为一施加在 P 点的弹性力。参数 k_b,c 分别为柔性基础的等效刚度与阻尼,k_p 为弹性支撑的刚度。被动减振模型如图 4 所示。

基础受到位移激励 $x(t)=x_0\sin\omega t$ 时,该系统的输出响应为 $y(t)$,则柔性基础的传递函数[15]为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{cs+k_b}{ms^2+cs+k_b} \tag{7}$$

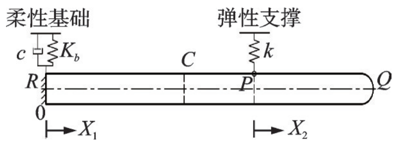


图 4　被动减振模型

Fig.4　Passive vibration reduction model

挂载阻尼可写为 $c=2\xi\sqrt{mk_b}$,实际情况中不考虑挂载阻尼,令 $c=0$,$\omega_m^2=k_b/m$。

$$Y(s)=\frac{x_0\omega\omega_m^2}{(s^2+\omega_m^2)(s^2+\omega^2)} \tag{8}$$

在弹性支撑的作用下,P 点振动响应的挠度为

$$u(x_p,t)=\sum_{i=1}^{\infty}X_{2i}(x_p)q_i(t) \tag{9}$$

弹性支撑悬臂梁受到 2 个力:①整个悬臂梁系统加载的惯性力;②通过弹性支撑以脉冲激励的形式在 $x_p=0$ 处加载的弹性力。

惯性力为

$$F_g=\rho S\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}\left(\int_0^l X_{1i}(x_1)\mathrm{d}x_1+\int_0^{L-l}X_{2i}(x_2)\mathrm{d}x_2\right) \tag{10}$$

根据变形协调关系,弹性支撑在 P 点由弹性力反作用下产生的变形量等于悬臂梁在 P 点施加弹性力后的振动响应 $u(x_p,t)$,因此弹性力为

$$F_s=-\int_0^{L-l}X_{2i}(x_2)\delta(x_2-x_p)\cdot k\left[\sum_{i=1}^{n}X_{2i}(x_p)q_i(t)\right]\mathrm{d}x_2 \tag{11}$$

弹性支撑悬臂梁广义坐标 $q_i(t)$ 的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2q_i(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\xi_i\omega_i\frac{\mathrm{d}q_i(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_i^2q_i(t)=F_g+F_s \tag{12}$$

根据相似结构体的模态实验,悬臂体结构阻尼系数 ξ 在 0.01~0.03 之间,取 $\xi=0.02$。结合柔性基础的传递函数,对式(12)进行拉普拉斯变换,即

$$\begin{cases}(s^2+2\xi_i\omega_is+\omega_i^2)Q_i(s)=\\ \quad -k\left[\sum_{j=1}^{n}X_{2j}(0)Q_j(s)\right]X_{2i}(0)+\eta_{1i}s^2Y(s)\\ \eta_{1i}=\rho S\int_0^l X_{1i}(x_1)\mathrm{d}x_1+\int_0^{L-l}X_{2i}(x_2)\mathrm{d}x_2\end{cases} \tag{13}$$

考虑一阶计算,此时方程中只计算到一阶,即

$$Q_1(s)=\frac{\eta_{11}s^2Y(s)}{s^2+2\xi_1\omega_1s+\kappa_1^2} \tag{14}$$

其中:ω_i 为各阶频率。

令 $\kappa_1^2=\omega_1^2+kX_{21}^2(0)$,对式(14)进行拉氏反变换,得到悬臂梁一阶振型对应的广义坐标 $q_1(t)$ 为

$$q_1(t)=\frac{\eta_{11}x_0\omega\omega_m^2}{\omega^2-\omega_m^2}\Big[\Big(\frac{B-aA}{\omega_n}-\frac{B'-aA'}{\omega_n}\Big)e^{-at}\sin\omega_n t+(A-A')e^{-at}\cos\omega_n t+C\cos\omega_m t-C'\cos\omega t+\frac{D}{\omega_m}\sin\omega_m t-\frac{D'}{\omega}\sin\omega t\Big] \tag{15}$$

其中：$a=\xi_1\omega_1$；$\omega_n=\sqrt{\kappa_1^2-\xi_1^2\omega_1^2}$；$A'=-C'$；$C'=\frac{2\xi_1\omega_1\omega^2}{(\omega^2-\kappa_1^2)^2+(2\xi_1\omega_1\omega)^2}$；$D'=\frac{\omega^2-\kappa_1^2}{2\xi_1\omega_1}C'$；$B'=-\frac{\kappa_1^2D'}{\omega^2}$；$C=\frac{2\xi_1\omega_1\omega_m^2}{(\omega_m^2-\kappa_1^2)^2+(2\xi_1\omega_1\omega_m)^2}$；$A=-C$；$D=\frac{\omega_m^2-\kappa_1^2}{2\xi_1\omega_1}C$；$B=-\frac{\kappa_1^2D}{\omega_m^2}$。

式(15)中含指数 e^{-at} 的前 2 项是系统自由振动的解，即瞬态解。负指数项的存在使振动随着时间逐渐减小，其余项是由外界激励产生，为系统的稳态解。

考虑到第 i 阶，令 $\kappa_i^2=\omega_i^2+kX_{2i}^2(0)$，结合式(13)和(14)，得到 $Q_1(s)$，$Q_2(s)$，…，$Q_{i-1}(s)$，则 $Q_i(s)$ 为

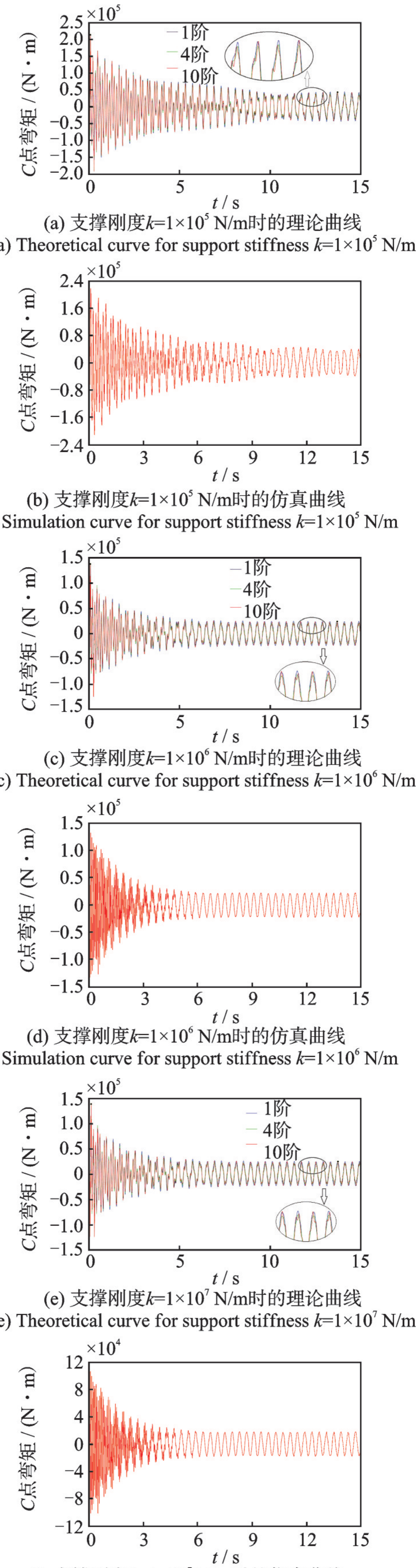
$$Q_i(s)=\frac{\eta_{1i}s^2Y(s)-\left[\sum_{k=1}^{i}X_{2k}(0)Q_k(s)-X_{2i}(0)Q_i(s)\right]}{s^2+2\xi_i\omega_i s+\kappa_i^2} \tag{16}$$

式(16)采用 Matlab 进行拉氏反变换得到广义坐标 $q_i(t)$，将其与各振型相乘叠加，得到悬臂梁的挠度。如图 4 所示，梁上任意点 x_c 位于区域 RP 段内，对挠度公式求二阶导数即可得到 x_c 点弯矩随时间的变化关系。

$$M(x_c,t)=EI\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=x_c}=EI\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d^2X_{1i}(x)}{dx^2}\Big|_{x=x_c}q_i(t)\frac{d^2X_{1i}(x)}{dx^2}\Big|_{x=x_1}=\beta_i^2(-A_{1i}\sin\beta_ix_1-B_{1i}\cos\beta_ix_1+C_{1i}sh\beta_ix_1+D_{1i}ch\beta_ix_1) \tag{17}$$

2.2　弹性支撑悬臂梁模型的振动响应仿真对比

将振幅为 0.02 m、激励角频率为 2.5 Hz 的正弦信号 $x(t)=0.02\sin(15.7t)$ 和 $x_c=3.4$ m 代入式(17)，得到在薄弱点 C 处的弯矩响应曲线。通过 Patran 仿真可得到在 n 阶响应叠加状态下 C 点弯矩响应曲线。图 5 为在不同弹性支撑刚度下，不同阶数弯矩的理论和仿真曲线。



(a) 支撑刚度$k=1\times10^5$ N/m时的理论曲线
(a) Theoretical curve for support stiffness $k=1\times10^5$ N/m

(b) 支撑刚度$k=1\times10^5$ N/m时的仿真曲线
(b) Simulation curve for support stiffness $k=1\times10^5$ N/m

(c) 支撑刚度$k=1\times10^6$ N/m时的理论曲线
(c) Theoretical curve for support stiffness $k=1\times10^6$ N/m

(d) 支撑刚度$k=1\times10^6$ N/m时的仿真曲线
(d) Simulation curve for support stiffness $k=1\times10^6$ N/m

(e) 支撑刚度$k=1\times10^7$ N/m时的理论曲线
(e) Theoretical curve for support stiffness $k=1\times10^7$ N/m

(f) 支撑刚度$k=1\times10^7$ N/m时的仿真曲线
(f) Simulation curve for support stiffness $k=1\times10^7$ N/m

图 5　弯矩的理论和仿真曲线

Fig.5　Theoretical and simulation curves of moment

由图5和式(17)得到C点瞬态和稳态的弯矩幅值如表2所示。

表2 瞬态和稳态的弯矩幅值

Tab.2 Transient and steady moment amplitudes

刚度/($N \cdot m^{-1}$)	状态	理论值/(N•m)		仿真值/(N•m)	误差/%	
		1阶	10阶		1阶	10阶
1×10^5	瞬态	20.30	21.30	22.10	8.2	3.6
	稳态	4.27	4.29	4.43	3.7	3.2
1×10^6	瞬态	12.60	13.70	13.20	4.5	3.8
	稳态	2.35	2.312	2.21	5.9	4.7
1×10^7	瞬态	10.00	10.60	10.80	7.4	1.9
	稳态	1.74	1.72	1.80	3.4	4.5

在不同支撑刚度时,理论值和仿真值误差相差不大。由于10阶的误差比1阶的误差小,只考虑一阶时误差的最大值在瞬态时为8.2%,稳态时为5.9%,满足设计要求,因此这里在计算时只考虑一阶。

图6和图7分别为不同刚度时瞬态和稳态的弯矩幅值。随着支撑刚度k的增大,弯矩响应幅值逐渐减小,符合预期趋势。因此,可通过弯矩选择合适的刚度。

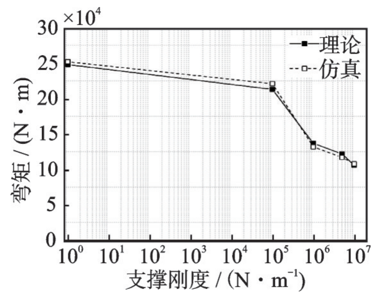


图6 不同刚度时瞬态的弯矩幅值

Fig.6 Transient moment amplitudes at different stiffness

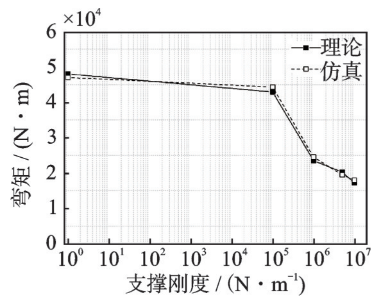


图7 不同刚度时稳态的弯矩幅值

Fig.7 Steady state moment amplitudes at different stiffness

通过上述对比分析看出,仿真和理论计算误差在合理的范围内,验证了弹性支撑理论计算式(16)和式(17)的正确性。可以看出,当机械手刚度大于1×10^6 N/m时,减振率变化减慢。为了满足轻量化设计需求,选择机械手刚度为5×10^6 N/m时,瞬态减振率为45%,稳态减振率为48%。

3 主动抑振

3.1 弹性支撑悬臂梁模型的主动抑振理论

主动抑振是在悬臂梁上施加主动抑振力来抵消柔性基础带来的振动响应。图8为带柔性基础的主动抑振模型。将图4中的弹性支撑换为主动抑振力,并将机械手本身刚度和阻尼的影响放在控制模型中考虑,主动抑振理论只考虑主动抑振力,此时坐标系不再分段,弹性支撑悬臂梁变为悬臂梁模型。频率方程为

$$\cos\beta_i l \cosh\beta_i l = 1 \tag{18}$$

根据式(18)求出整体坐标系下的β_i,则悬臂梁的振型为

$$X_i(x) = C_i[\sin\beta_i x - \sinh\beta_i x - a_i(\cos\beta_i x - \cosh\beta_i x)] \tag{19}$$

其中:$a_i = \dfrac{\sin\beta_i l + \sinh\beta_i l}{\cosh\beta_i l + \cos\beta_i l}$。

根据归一化公式$M_i = \int_0^L \rho A X_i^2(x)\mathrm{d}x = 1$,可求得$C_i$。

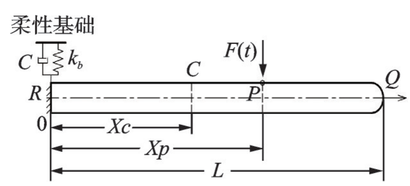


图8 带柔性基础的主动抑振模型

Fig.8 Active vibration suppression model of flexible foundation

式(11)中的弹性力是支撑刚度在被动变形时产生的。P点处的主动抑振力是靠机械手多臂协同主动施加的,抑振力为

$$F_a(t) = -\int_0^L F(t)\delta(x - x_p)X_i(x)\mathrm{d}x \tag{20}$$

其中:$\delta(x - x_p)$为脉冲函数。

通过叠加原理,在柔性基座激励和主动抑振力的共同作用下,悬臂梁的振动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 q_i(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\xi_i\omega_i\frac{\mathrm{d}q_i(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_i^2 q_i(t) = F_g + F_a \tag{21}$$

将式(10)和式(20)代入式(21),可得

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \eta_{1i}\ddot{y}(t) - \eta_{2i}F(t) \tag{22}$$

其中：$\eta_{1i}=\rho S\int_0^L X_i(x)\mathrm{d}x$；$\eta_{2i}=\int_0^L \delta(x-x_p)X_i(x)\mathrm{d}x=X_i(x_p)$。

对式(22)进行拉普拉斯变换

$$Q_i(s)=\frac{\eta_{1i}s^2Y(s)-\eta_{2i}F(s)}{s^2+2\xi_i\omega_i s+\omega_i^2} \tag{23}$$

若使式(17)在任意点 x_c 的弯矩减小，则在 C 点的挠度 $u(x_c,t)$ 减小，此时 n 阶挠曲线方程为

$$U(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i(x_c)\left[s^2Y(s)\eta_{1i}-F(s)\eta_{2i}\right]}{s^2+2\xi_i\omega_i s+\omega_i^2} \tag{24}$$

当抑振力 $F(t)$ 与激励 $y(t)$ 同周期同相位时，抑振效果最好。取减振因子 $0<\alpha\leqslant 1$，主动抑振力为

$$F(s)=a\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{X_i(c)\eta_{1i}}{s^2+2\xi_i\omega_i+\omega_i^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{X_i(c)\eta_{2i}}{s^2+2\xi_i\omega_i+\omega_i^2}}s^2Y(s) \tag{25}$$

此时，挠曲线方程为

$$U(s)=(1-a)s^2Y(s)\sum_{i=1}^{n}\frac{\eta_{1i}X_i(x_c)}{s^2+2\xi_i\omega_i s+\omega_i^2} \tag{26}$$

只考虑一阶时，主动抑振力为

$$F_1(s)=a\frac{n_{11}}{n_{21}}s^2Y_0(s) \tag{27}$$

此时，挠曲线方程为

$$U_1(s)=(1-a)s^2Y(s)\frac{\eta_{11}X_1(x_c)}{s^2+2\xi_1\omega_1 s+\omega_1^2} \tag{28}$$

主动抑振针对稳态振动，只考虑基频时振动曲线高频掺杂少，容易实现抑振控制。对式(28)进行拉氏反变换，得到时域的挠曲线振动响应公式。在不同的减振因子 α 下，仅考虑基频时 C 点振幅响应曲线，$\alpha=0$ 为无抑振状态下悬臂梁的自由振动曲线。图 9 为不同减振因子的抑振效果。可以看出，随着 α 的增大，振幅成比例减小。

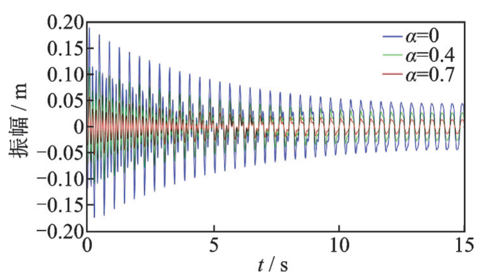


图 9　不同减振因子的抑振效果

Fig.9　Vibration suppression effect of different vibration suppression factors

将图 8 中的 $F(t)$ 换为机械手。控制模型中考虑机械手刚度和阻尼的影响，图 10 为主动抑振机械手模型。其中：M 为机械手质量；K 为机械手刚度；B 为机械手系统阻尼；u 为抑振后的挠曲线振幅；y 为机械手作动位移。

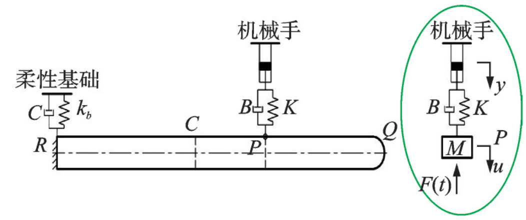


图 10　主动抑振机械手模型

Fig.10　Active vibration suppression manipulator model

在主动抑振作用下机械手的位移输入方程为

$$M\ddot{u}=K(y-u)+B(\dot{y}-\dot{u})-F(t) \tag{29}$$

选择减振因子为 0.7，即机械手的主动抑振率为 70%，根据式(27)得到主动抑振力。

3.2　弹性支撑悬臂梁模型主动抑振实验平台

以悬臂梁的主动抑振理论为基础，搭建小型缩比实验平台如图 11 所示。机械手通过多臂协同控制实现主动抑振。所用的模型为与真实悬挂物一致的薄壁圆环模型。由于薄板结构相对于圆环结构的振动响应更大且抑振力更小，故小型实验台上悬臂梁选择薄板结构。由于小机械手抑振能力有限，因此用板式结构更容易被抑振。

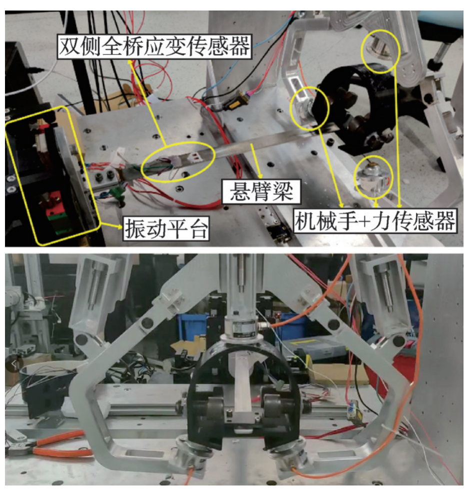


图 11　小型缩比实验平台

Fig.11　Small scale experimental platform

机械手由竖直臂和两侧抱夹臂组成，通过多臂协同控制，使其在 y 方向上对悬臂梁进行主动抑振。图 12 为抱夹手爪坐标系。

竖直臂可直接提供 y 向位移，两侧抱夹臂通过几何关系分解 y 向位移。根据抱夹臂作动器与接触

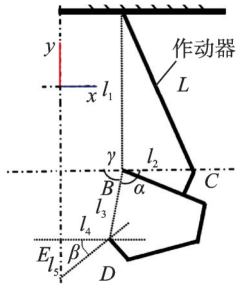


图 12　抱夹手爪坐标系

Fig.12　Clamping arm coordinate system

点 D 的几何关系，则

$$y_E = y_B - l_3 \sin\gamma - (x_B - l_3 \cos\gamma)\tan\beta \quad (30)$$

其中：$\gamma = \dfrac{3\pi}{2} - \alpha - \arccos\left(\dfrac{l_1^2 + l_2^2 - L^2}{2l_1 l_2}\right)$。

对式(30)求导，得到作动器的输出位移与 y 向位移的运动关系为

$$\frac{\partial y_E}{\partial L} = \frac{-\tan\beta L l_3 \sin\gamma - L l_3 \cos\gamma}{l_1 l_2 \sqrt{1 - \left(\dfrac{l_1^2 + l_2^2 - L^2}{2l_1 l_2}\right)^2}} \quad (31)$$

式(31)即为机械臂的多臂协同关系。实验过程如下。

1) 设定悬臂梁系统的一阶模态。悬臂梁固定端连接振动台，输入激励 $y(t) = 0.004\sin(6\pi t)$，在自动振动状态下将 Matlab 理论仿真与小型实验台采集的末端加速度结果进行对比，确认实验台调整完成。

2) 根据梁弯曲时弯矩、应力和应变的关系，C 点所受应变和弯矩近似成线性关系，用应变代替弯矩测试抑振率。机械进行主动抑振控制，减振因子 α 取 0.7。通过对比自由振动和主动抑振时应变(无量纲)曲线的抑振效果来等效弯矩的抑振效果，在机械手作用下，抑振效果可达到 73.4%。

图 13 为小型实验台自由振动无抑振时理论与实验加速度曲线。通过对比，证明了理论和仿真的正确性。图 14 为自由振动和主动抑振的应变曲线。可以看出，抑振率达到了 73.4%，验证了主动抑振理论的正确性。

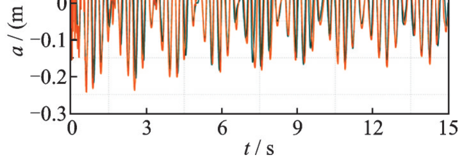


图 13　无抑振时理论与实验加速度曲线

Fig.13　Theoretical and experimental acceleration curves without vibration suppression

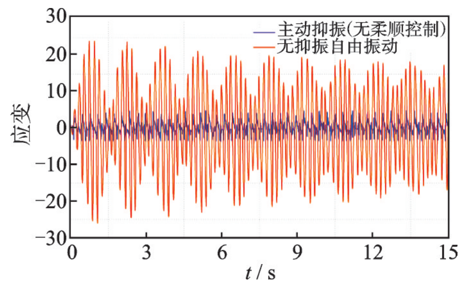


图 14　自由振动和主动抑振的应变曲线

Fig.14　Strain curves of free vibration and active vibration suppression

4　结　论

1) 提出了一种瞬态被动减振和稳态主动抑振的主被动联合抑振方法，解决了机载悬挂物远端薄弱面的低频全阶段减载问题。由于机械手动态输出能力有限，故机械手仅在稳态阶段通过多臂协同抱夹的方式进行主动抑振。通过分段构建弹性支撑边界条件，在受到悬臂梁基座惯性力和弹性支撑的条件下，推导出被动减振模型。对比在薄弱点 C 处理论和仿真的弯矩响应幅值，当只考虑一阶时，瞬态误差的最大值为 8.2%，稳态为 5.9%，验证了被动减振模型的准确性。

2) 在模态空间的基础上提出了基于减振因子的主动抑振算法。区别与被动抑振时将弹性支撑刚度放在振动模型中计算，主动抑振时将弹性支撑刚度放在机械手控制模型中考虑。通过小型实验台验证了主动抑振的正确性。由于瞬态对断裂贡献大、对疲劳贡献少，故选择机械手刚度为 5×10^6 N/m，使被动减振率达到 45%；而稳态对疲劳损伤贡献大，选择减振因子为 0.7，使主动抑振率达到 73.4%。

参　考　文　献

[1] 杜华军，黄文虎，邹振祝．航天支架结构的被动振动控制[J]．应用力学学报，2002，19(3)：10-13.
DU Huajun, HUANG Wenhu, ZOU Zhenzhu. Passive vibration control of aerospace supporter[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2002, 19(3): 10-13. (in Chinese)

[2] 郭空明，江俊．悬臂 Kagome 夹心板独立模态空间振动控制研究[J]．振动与冲击，2015，34(2)：55-60.
GUO Kongming, JIANG Jun. Independent modal

space vibration control of cantilever Kagome sandwich plate [J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(2): 55-60. (in Chinese)

[3] 方昱斌, 朱晓锦, 高志远, 等. 多频线谱激励下的混合自适应微振动主动控制[J]. 振动、测试与诊断, 2021, 41(1): 96-104.
FANG Yubin, ZHU Xiaojin, GAO Zhiyuan, et al. Hybrid adaptive algorithm for active vibration control of piezoelectric flexible manipulator[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2021, 41(1): 96-104. (in Chinese)

[4] 袁秋帆, 刘延芳, 马明阳, 等. 集成压电元件的挠性太阳帆板振动抑制控制系统[J]. 振动与冲击, 2016, 35(9): 86-93.
YUAN Qiufan, LIU Yanfang, MA Mingyang, et al. Piezoelectric-based vibration control system for solar panels [J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(9): 86-93. (in Chinese)

[5] 寇发荣, 张海亮, 许家楠, 等. 电动静液压主动悬架自适应 Smith 反馈时滞控制[J]. 振动、测试与诊断, 2022, 42(5): 864-870.
KOU Farong, ZHANG Hailiang, XU Jianan, et al. Adaptive Smith feedback time delay control of active suspension with electro hydrostatic actuator[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2022, 42(5): 864-870. (in Chinese)

[6] 陈志勇, 陈力. 柔性空间机械臂基于混合滑膜思想的自适应变结构控制[J]. 工程力学, 2012, 29(2): 216-221.
CHEN Zhiyong, CHEN Li. Adaptive variable structure control for flexible space manipulator based on hybrid sliding mode concept [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(2): 216-221. (in Chinese)

[7] KORAYEM M H, IRANI M, RAFEE-NEKOO S. Load maximization of flexible joint mechanical manipulator using nonlinear optimal controller[J]. Acta Astronautica, 2011, 69(7/8): 458-469.

[8] 谢立敏, 陈力. 漂浮基柔性关节、柔性臂空间机器人动力学建模、饱和鲁棒模糊滑模控制及双重柔性振动主动抑制[J]. 机械工程学报, 2015, 51(1): 76-82.
XIE Limin, CHEN Li. Modeling, saturation robust fuzzy sliding control and vibration suppression of free-floating flexible-joint flexible-link space robot[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(1): 76-82. (in Chinese)

[9] 杜严峰, 王聪. 柔性机械臂残余振动控制[J]. 振动与冲击, 2019, 38(7): 165-171.
DU Yanfeng, WANG Cong. Residual vibration control for a flexible manipulator[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(7): 165-171. (in Chinese)

[10] 李伟, 童中翔. 基于神经网络的机翼振动主动控制[J]. 机械与电子, 2004(9): 56-58.
LI Wei, TONG Zhongxiang. Active control of airfoil vibration based on neural network[J]. Machinery & Electronics, 2004(9): 56-58. (in Chinese)

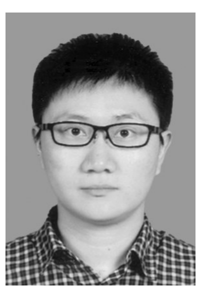
[11] 易群, 李彩丽. 机械振动主动控制技术的研究现状和发展趋势[J]. 机械工程与自动化, 2016(3): 220-221.
YI Qun, LI Caili. Research status and development trend of active control technology of mechanical vibration [J]. Mechanical Engineering & Automation, 2016(3): 220-221. (in Chinese)

[12] 王元兴, 聂旭涛, 麻越垠, 等. 高压气流管道瞬态冲击振动分析及抑振研究[J]. 振动、测试与诊断, 2021, 41(4): 812-817.
WANG Yuanxing, NIE Xutao, MA Yueyin, et al. Structural vibration analysis and suppression technique of high-pressure transient impact airflow pipeline system [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2021, 41(4): 812-817. (in Chinese)

[13] 杨慧, 汪祥, 乔尚岭, 等. Kresling 和 Miura 折痕混合型三指机械手的运动学分析及其设计[J]. 机器人, 2022, 44(1): 35-44.
YANG Hui, WANG Xiang, QIAO Shangling, et al. Design and kinematics analysis of a three-finger manipulator with kresling and miura hybrid origami crease[J]. Robot, 2022, 44(1): 35-44. (in Chinese)

[14] 赵宇飞, 张中哲, 李科, 等. 一种长悬臂梁结构动力学建模方法[J]. 导弹与航天运载技术, 2020(1): 83-88.
ZHAO Yufei, ZHANG Zhongzhe, LI Ke, et al. A structural-dynamic-modeling method for long cantilever beam[J]. Missiles and Space Vehicles, 2020(1): 83-88.(in Chinese)

[15] 翟兆阳. 柔性基础悬臂梁振动主动控制[D]. 西安: 西安理工大学, 2010.



第一作者简介:蔡赫,男,1983年4月生,硕士、高级工程师。主要研究方向为空间机械臂、多体动力学和结构动力学。曾发表《机载悬臂体结构的主被动联合抑振》(《应用力学学报》2024年第5期)等论文。
E-mail:ch1768@163.com

通信作者简介:李科,男,1986年1月生,博士、高级工程师。主要研究方向为空间多自由度机构、机器人技术和运动控制。
E-mail:keli@stu.hit.edu.cn