

谐波微弱信号特征的方差曲线周期识别法*

薛强^{1,3}, 田瑞兰^{1,2}, 李海萍², 关淮桐²

(1. 石家庄铁道大学省部共建交通工程结构力学行为与系统安全国家重点实验室 石家庄, 050043)

(2. 石家庄铁道大学工程力学系 石家庄, 050043)

(3. 石家庄铁道大学电气与电子工程学院 石家庄, 050043)

摘要 针对随机因素和微弱信号初相位影响的问题, 构造了强噪声背景下检测谐波微弱信号频率、相位的方差曲线周期识别法。首先, 基于随机 Melnikov 函数和系统关于相位分岔图的周期特性, 初步提出周期识别法; 其次, 论证分岔图和方差曲线具有一致性, 进一步将周期识别法优化为方差曲线周期识别法; 然后, 基于频谱泄露最小原则, 设计自适应离散傅里叶变换数据处理方法来解决由方差曲线不光滑而引起的结果不准确问题; 最后, 采用二次检测来解决检测系统中策动力信号与被测信号存在频差而导致动力学转迁的不明显问题。仿真结果表明, 该方法不受被测信号初相位影响, 可识别淹没在强噪声中的微弱信号, 被识别信号的信噪比可低至 -74.96 dB。列车轴箱轴承故障实验中获得方差曲线周期现象清晰, 也表明了该方法的工程实用性。

关键词 轴承; 故障诊断; 信号处理; Duffing 系统; 方差曲线周期法; 自适应离散傅里叶变换
中图分类号 TH133.33; TH17

引言

轴箱轴承是高速列车走行部的关键部件, 承担着支承、传动、运动转换等重要功能, 掌握轴承状态, 做到早期故障早期诊断并及时预防意义重大。由于早期故障信号能量较小, 并淹没在强噪声背景中, 这给故障诊断带来困难^[1]。目前, 学者们对于机械故障的信号感知、特征分析与提取、损伤参数识别等方面均取得了丰硕成果^[2]。但是, 高速列车轴箱轴承内圈与轮对刚性连接, 轮轨激励直接影响其振动和载荷特性, 其故障特征与复杂背景噪声混杂在一起而难以识别^[3]。传统滤波方法仅适用于信噪比(signal noise ratio, 简称 SNR)较高的场合, 早期故障信号的低 SNR 特性给信号检测带来挑战。

混沌系统具有对信号敏感而对噪声相对免疫特性, 可将隐藏在强噪声背景下的微弱信号通过混沌系统的动力学行为突变凸显出来, 用来对谐波微弱信号进行识别^[4-5]。基于此, 学者们研究了各类非线性系统及相应的动力学行为特性, 并将其用于微弱信号参数识别。Gokyildirim 等^[6]提出了一种正弦混沌吸引子, 利用 Lyapunov 指数量化了系统策动力幅值与系统状态之间的关系, 并用于信号检测, 该方法具有精度高、被测信号 SNR 低的特点。Li 等^[7]提出

了一种将耦合 Lorenz 系统与功率谱相结合的轴承故障诊断方法, 利用混沌系统的抗噪性和非线性放大能力, 提高了被测信号的 SNR。

Duffing 振子分岔图中状态转迁边界清晰, 非常适合信号检测, 学者们对 Duffing 系统及其改进系统进行研究, 并用于微弱信号检测^[8]。赖志慧等^[9]利用 Duffing 系统对小谐波信号作用下的动力学行为突变进行信号检测, 研究被测信号初相位对检测效果的影响, 虽然在一定程度上克服了相位对信号检测的影响, 但不能精确测量系统的相位。Tian 等^[10]构造了变尺度 Duffing 系统, 利用 Melnikov 方法推导了系统的混沌阈值, 提出了用于微弱信号检测的同频凸峰法, 但该方法对被测信号相位的要求条件使其使用受到限制。笔者基于变尺度 Duffing 系统策动力函数和微弱信号同频同相产生凸峰的原理^[10], 利用检测系统动力学行为的周期性进行微弱信号检测, 以克服相位对检测的影响。

1 周期识别法

1.1 相位对同频凸峰法的影响

考虑变尺度 Duffing 检测系统为

* 国家自然科学基金资助项目(11872253, 12072203, 12032017); 河北省“三三三人才工程”资助项目(A202005007); 百名优秀创新人才支持计划资助项目(SLRC2019037)
收稿日期: 2022-06-10; 修回日期: 2022-08-05

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega_1 y \\ \dot{y} = \omega_1 [x - x^3 - \mu y + f(t) + r(t) + \sigma n(t)] \end{cases} \quad (1)$$

其中: $f(t) = f \cos(\omega_1 t)$, 为系统的正弦策动力; $r(t) + \sigma n(t)$ 为输入系统的被测信号; $r(t) = r \cos(\omega_2 t + \varphi)$, 为信号分量; $\sigma n(t)$ 为噪声分量, 其功率谱密度 $K = \sigma^2 / 2\pi$ 。

当 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ 时, 策动力与信号分量叠加, 得到合成函数为

$$f_{\text{eq}}(t) = f(t) + r(t) = f_{\text{eq}} \cos(\omega t + \Psi) \quad (2)$$

其中

$$f_{\text{eq}} = \sqrt{f^2 + r^2 + 2fr \cos \varphi} \quad (3)$$

$$\Psi = \arctan \frac{r \sin \varphi}{f + r \cos \varphi} \quad (4)$$

根据同频凸峰法原理^[10], 当信号分量与策动力同相, 使合成函数项的幅值大于系统的混沌阈值时, 式(1)的动力学行为出现混沌状态到周期状态的转迁, 可判断被测信号的存在。由式(3)可知, 当 $\varphi \neq 0$ 时, 合成函数幅值具有不大于混沌阈值的可能性, 此时同频凸峰法失效。

1.2 周期性与周期识别法

1.2.1 检测系统的混沌阈值

将式(2)代入式(1), 可得

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y \\ \dot{y} = \omega [x - x^3 - \mu y + f_{\text{eq}}(t) + \sigma n(t)] \end{cases} \quad (5)$$

其中: $f_{\text{eq}}(t) = f_{\text{eq}} \cos(\omega t + \Psi)$ 。

均方意义下式(5)的Melnikov函数^[11-13]为

$$M(t_0) = -\hat{M}^2 + \bar{M}^2(t_0) + E[\tilde{M}^2(t_0)] \quad (6)$$

其中:

$$-\hat{M}^2 = -\left(\frac{4\omega^2\mu}{3}\right)^2; \bar{M}^2(t_0) = \left[\sqrt{2} f_{\text{eq}} \pi \omega^3 \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) \times \sin(\omega t_0 + \Psi) \right]^2; E[\tilde{M}^2(t_0)] = 8\sigma^2 \pi K \omega^6。$$

式(5)的混沌阈值为

$$f_d = \frac{\left(\frac{4\mu}{3}\right)^2 - 8\sigma^2 \pi K \omega^2}{\left[\sqrt{2} \pi \omega \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) \right]^2} \quad (7)$$

式(7)中不含相角 Ψ , 混沌阈值与相角无关。

1.2.2 系统动力学行为的周期性

设 f_c 为式(5)由混沌状态跃迁到周期状态的混沌阈值。令 $\Theta = \arccos \frac{f_c^2 - f^2 - r^2}{2fr}$, 结合式(3), 当 $\varphi \in (2k\pi + \Theta, 2(k+1)\pi + \Theta)$, $k \in Z$ 时, $f_{\text{eq}} < f_c$, 系

统处于混沌状态; 当 $\varphi \in (2k\pi - \Theta, 2k\pi + \Theta)$, $k \in Z$ 时, $f_{\text{eq}} > f_c$, 系统处于周期状态。由此可知, 检测系统的状态随着被测信号的初相位呈周期性转迁。图1为检测系统状态周期性转迁原理图。当 $f_{\text{eq}}(t)$ 大于阈值时, 系统呈现周期状态; 反之, 系统呈现混沌状态。

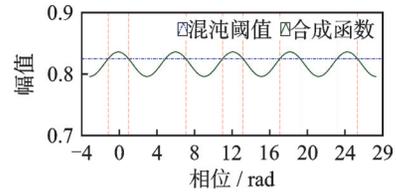


图1 检测系统状态周期性转迁原理图

Fig.1 Schematic diagram of the periodic transition of the detection system state

1.2.3 周期识别法

针对式(1), 由于被检测信号具有周期性, 即

$$r \cos(\omega_2 t + \varphi) = r \cos(\omega_2 t + \varphi + 2k\pi) \quad (8)$$

可得式(1)的等价系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega_1 y \\ \dot{y} = \omega_1 [x - x^3 - \mu y + f(t) + r'(t) + \sigma n(t)] \end{cases} \quad (9)$$

其中: $r'(t) = r \cos(\omega_2 t + \varphi + 2k\pi)$ 。

式(1)表明被测信号初相位变化是周期性的, 因此其动力学行为也是周期性的。应用该特性可形成周期识别法。式(1)中, 取参数为 $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 917 \text{ rad/s}$, $f = 0.822$, $\mu = 0.5$, $\sigma = 0.026$, $\varphi = -225^\circ$, $r = 0.013$, 得到式(1)关于被测信号相位的分岔图如图2所示。纵坐标为数值解时间序列在各周期内最大值与最小值之差。此时, 分岔图呈现清晰的周期性, 该周期性反映了 $\omega = 917 \text{ rad/s}$ 时周期信号的存在。

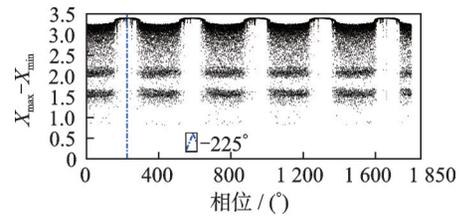


图2 式(1)关于被测信号相位的分岔图

Fig.2 Bifurcation diagram of system (1) with respect to the phase of the weak signal

周期识别法的实质是: 利用非线性系统把隐藏在强噪声背景下的微弱周期信号转化为清晰的周期性的相位分岔图, 相位分岔图与被测信号具有相同周期和初相位, 从而可识别被测信号。

1.3 噪声对周期识别法影响

周期识别法中相位分岔图周期性的清晰程度不

可避免地受到噪声影响。为研究噪声对识别效果的影响,进行如下仿真实验。式(1)中,令 $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 1005.31 \text{ rad/s}$, $f = 0.822$, $\mu = 0.5$, $r = 0.005$, $\varphi = -135^\circ$, 噪声参数 σ 分别为 0.025, 0.05, 0.1, 0.15。不同 SNR 下式(1)关于微弱信号相位的分岔图如图 3 所示。当 SNR 较高时,式(1)的状态转换清晰,分岔图的周期性也比较明显。随着信号 SNR 降低,这种周期现象变得越来越模糊。SNR 过低,会影响分岔图的清晰程度,给信号检测带来困难。为提高检测系统抗噪性,需要对识别方法进一步优化。

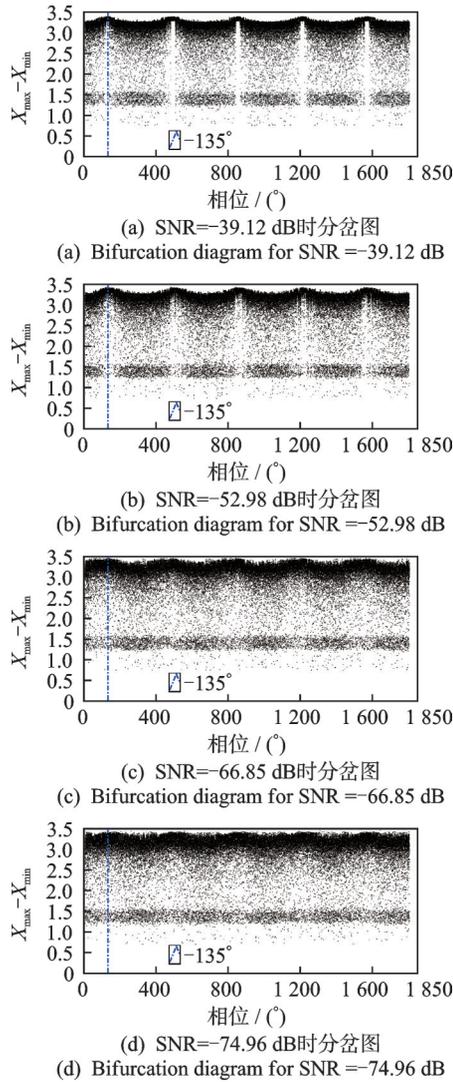


图 3 不同 SNR 下式(1)关于微弱信号相位的分岔图
Fig.3 Bifurcation diagram of system (1) with respect to the phase of the weak signal under different SNR

2 方差曲线周期识别法

2.1 分岔图与方差曲线

为了显化隐藏在噪声背景中被测信号的周期性和初相位,可借助式(1)动力学行为的统计特性,将

强噪声情况下模糊的相位分岔图转变为周期性较清晰的方差曲线,进一步将周期识别法优化为方差曲线周期识别法。

在获取式(1)关于相位的分岔图过程中,在遍历的每个采样点处对系统解序列中多个周期的最大值和最小值取方差,可得与相位分岔图对应的方差曲线。取图 3(a)对应参数,其相位分岔图和方差曲线如图 4 所示。可见,方差曲线与分岔图具有相同的周期性和相位。

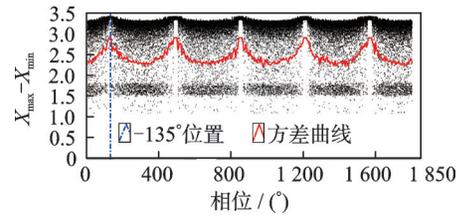


图 4 式(1)的分岔图和方差曲线
Fig.4 Bifurcation diagram and variance curve of system(1)

2.2 分岔图与方差曲线具有一致性

由图 4 可看出,式(1)相位分岔图与基于统计特性的方差曲线在系统的周期性及相位上具有一致性。事实上,由以下命题 1 和命题 2,可证明其具有一致性结论。

命题 1:对于实随机变量 X 和任意常数 C ,有 $DX = E(X - EX)^2 \leq E(X - C)^2$,当且仅当 $EX = C$ 时, $DX = E(X - C)^2$ 。

证明:

$$\begin{aligned} E(X - EX)^2 - E(X - C)^2 &= \\ EX^2 - (EX)^2 - E(X^2 - 2CX + C^2) &= \\ EX^2 - (EX)^2 - EX^2 + 2CEX - C^2 &= \\ -(EX)^2 + 2CEX - C^2 &= \\ -(EX - C)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

故 $DX = E(X - EX)^2 \leq E(X - C)^2$ 。

根据命题 1 结论,进一步可得命题 2。

命题 2: $\forall A < B, (A, B \in \mathbb{R})$, 存在序列 $\{d_{2n} | A = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{2n} = B\}$ 和序列 $\{e_{2n} | A = e_1 = e_2 = \dots = e_n, B = e_{n+1} = e_{n+2} = \dots = e_{2n}\}$, 则 2 个序列的方差满足 $D\{d_{2n}\} \leq D\{e_{2n}\}$ 。

证明:

令常数 $F = E\{e_{2n}\} = \frac{A+B}{2}$, 由命题 1 可得

$$D\{d_{2n}\} = \frac{\sum_{k=1}^{2n} (d_k - E\{d_{2n}\})^2}{2n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{2n} (d_k - F)^2}{2n}$$

由于 $d_1 < F < d_{2n}$, 设 $d_m \leq F \leq d_{m+1}$, 其中, $1 \leq$

$m \leq 2n - 1$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^{2n} (d_k - F)^2}{2n} &= \frac{\sum_{k=1}^m (d_k - F)^2 + \sum_{k=m+1}^{2n} (d_k - F)^2}{2n} \leq \\ &= \frac{\sum_{k=1}^m (A - F)^2 + \sum_{k=m+1}^{2n} (B - F)^2}{2n} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{2n} (e_k - E\{e_{2n}\})^2}{2n} = D\{e_{2n}\} \end{aligned}$$

故 $D\{d_{2n}\} \leq D\{e_{2n}\}$ 。

周期状态下 Duffing 检测系统解序列在各策动力周期内的最大值和最小值取恒定的 2 个数值, 这些值构成的序列满足命题 2 中 $\{e_{2n}\}$ 的条件; 而混沌状态下解序列在各策动力周期内的最大值与最小值是随机的, 其大小介于周期状态下的最大值和最小值之间, 由其构成的序列满足命题 2 中 $\{d_{2n}\}$ 的条件。由 $D\{d_{2n}\} \leq D\{e_{2n}\}$ 可知, 当系统处于周期状态, 分岔图处于凸峰点, 此时方差曲线恰好取最大值, 这证明了分岔图和方差曲线具有一致性。方差曲线在机器的自动识别上容易操作, 更适合开展故障诊断。

2.3 方差曲线周期识别法的抗噪性

为方便比较, 采用与图 3(d) 相同的参数, 生成强噪声背景下的方差曲线, 如图 5 所示。

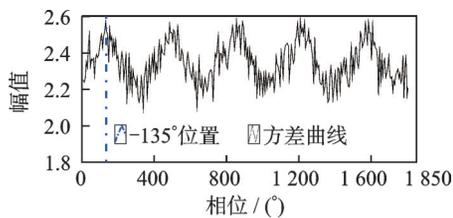


图 5 强噪声背景下的方差曲线
Fig.5 Variance curve under strong noise

对比图 3(d) 和图 5 可知, 在相同系统参数和 SNR 下, 方差曲线比分岔图具有更清晰的周期性。对比仿真结果, 在图(3)分岔图中, 当被测信号的 SNR 低于 -66.85 dB 时, 已经很难分辨出周期性, 而方差曲线却依然表现出非常清晰的周期性。因此, 方差曲线的周期识别法比分岔图的周期识别法在抗噪性能上有提升。根据图 3(d) 参数可以计算该参数下的 SNR^[10]

$$\text{SNR} = 10 \log \frac{r^2}{2\sigma^2} = -74.96 \text{ dB} \quad (10)$$

对比文献 [10] 采用的同频凸峰法达到的 -54.88 dB 检测效果, 笔者采用方差曲线来检测微

弱信号其 SNR 可以低至 -74.96 dB。该方法在克服了相位影响的同时, 还表现出对于噪声的鲁棒性。

2.4 方差曲线周期识别法的优化

由图 5 可知, 强噪声下方差曲线虽然周期性清晰, 但并不光滑, 这给机器自动识别带来困难, 有必要进一步探讨对方差曲线的处理方法。笔者基于频谱泄露最小原则设计自适应离散傅里叶变换 (discrete Fourier transform, 简称 DFT) 算法来处理方差曲线。算法以周期长度为变量, 对每个周期采样点数进行搜索, 当搜索周期长度等于方差曲线周期时, 频谱泄露最小, 此时对应的基波谱线能量最大。针对图 5 所示的方差曲线, 基波幅值随周期点数的变化曲线如图 6 所示。

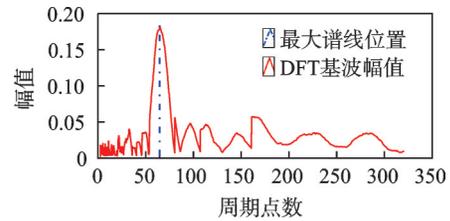


图 6 基波幅值随周期点数的变化曲线

Fig.6 Curve of fundamental wave amplitude with number of points per cycle

图 6 中, 当无量纲谱线幅值最大时, 频谱泄露最小, 此时周期点数为 64.2, 对应角频率为 1002.18 rad/s, 与设置的信号角频率 1005.31 rad/s 之间的相对误差为 0.31% 。同时, 由自适应 DFT 算法得到基波初相位为 -123.65° , 与实际设置的微弱信号相位 -135° 相差 11.35° , 相对误差为 6.31% 。为方便比较, 将基波与直流分量叠加, 得到方差曲线和基波曲线, 如图 7 所示。可见, 由自适应 DFT 算法得到的基波与直流分量合成曲线与原始方差曲线吻合较好。

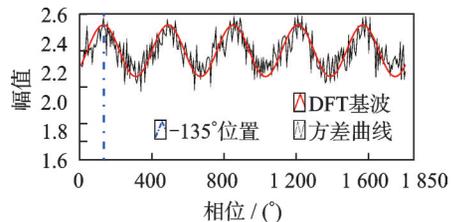


图 7 方差曲线和基波曲线

Fig.7 Variance curve and fundamental harmonic curve

2.5 频差情况下的二次检测

工程应用中, 目标故障频率通常为估算值, 与检测系统设置的的策动力频率存在一定误差, 不满足

文献[10]的同频条件,此时相位分岔图会一直表现为混沌状态。但事实上,由式(9)知式(1)是周期的,其动力学特性必有周期性,只是应用分岔图表现不明显,而具有统计量特性的方差曲线却能显化这种周期性。频率偏差情况下首次检测的动力学特性如图 8 所示。图 2 所对应参数中,令 $\omega_2 = 886.5 \text{ rad/s}$, $\omega_1 = 917 \text{ rad/s}$,并进行数值仿真,此时分岔图一直表现为混沌状态,而方差曲线却表现出了与被测信号相同的周期性,只是曲线非常不光滑,相位也不准确,如图 8 绿色曲线所示。对方差曲线进行局部均值滤波,效果仍不理想,如图 8 红色曲线所示;但根据自适应 DFT 算法可得到周期性的光滑曲线,如图 8 蓝色曲线所示。计算得到角频率为 888.67 rad/s ,与被测信号的实际角频率 886.5 rad/s 之间的相对误差为 0.24% ,二者非常接近。

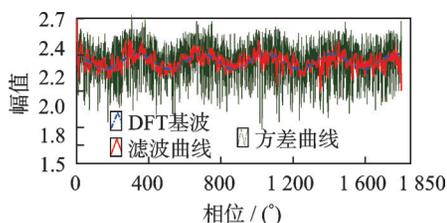


图 8 频率偏差情况下首次检测的动力学特性

Fig.8 Dynamic characteristics of first detection in the case of frequency difference

调整策动力函数的频率为 $\omega_1 = 888.67 \text{ rad/s}$,进行第 2 次检测,此时分岔图和方差曲线周期性都表现清晰,频率偏差情况下二次检测的动力学特性如图 9 所示。此时可计算被测信号的频率为 887.69 rad/s ,与设置的信号角频率 886.5 rad/s 之间的相对误差为 0.13% 。

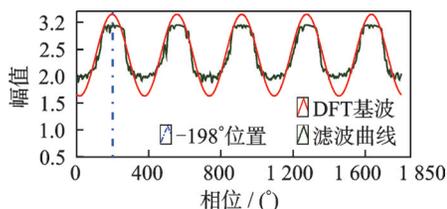


图 9 频率偏差情况下二次检测动力学特性

Fig.9 Dynamic characteristics of secondary detection in the case of frequency difference

3 实验

3.1 实验条件及实验过程

采用与文献[10]相同的实验数据进行实验,实验平台为铁路轴承综合实验台,如图 10 所示。



图 10 轴承综合实验台

Fig.10 Bearing test equipment

轴承型号为 FAG F-80781109 TAROL 130/240-B-TVP,节径 $P_d = 185 \text{ mm}$,滚子直径 $B_d = 26.5 \text{ mm}$,滚子数 $N_b = 17$,压力角 $\alpha = 10^\circ$,轴承外圈加工故障尺寸的长、宽和深分别为 $5, 1$ 和 0.7 mm ;滚动轴承转速设置为 $n = 1200 \text{ r/min}$,不加负载。振动传感器^[10]布置在轴箱端盖顶端,如图 11 所示,系统的采样频率为 51200 Hz 。



图 11 振动传感器^[10]

Fig.11 Vibration sensor^[10]

外圈故障计算公式^[10]为

$$\omega_{FO} = \frac{N_b}{2} \frac{n}{60} \left(1 - \frac{B_d}{P_d} \cos \alpha\right) = 917 \text{ rad/s}$$

由于滚轴滑动、测量精度和各种干扰因素的影响,该计算结果必然会存在误差。 917 rad/s 仅为近似估算值,与策动力存在频差而需要进行二次检测。

3.2 方差曲线周期识别法识别结果

首次检测时将策动力频率设置为 917 rad/s ,自适应 DFT 算法检测信号频率为 886.5 rad/s ,二次检测时将非线性系统的策动力频率调整为该频率,实验得到的滤波方差曲线和 DFT 基波曲线如图 12

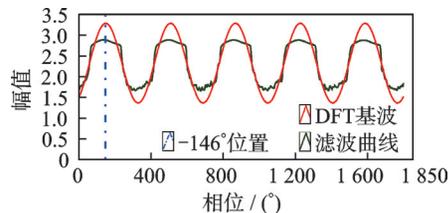


图 12 实验得到的滤波方差曲线和 DFT 基波曲线

Fig.12 Filtered variance curve and DFT fundamental curve of experimental data

所示。计算得到被测信号的频率为886.345 rad/s,其初始相位为 -146° ,可以判断角频率为886.345 rad/s附近存在故障信号,检测结果与估算的频率接近。

4 结 论

1) 提出了周期识别法。利用系统相位分岔图的周期性来判断微弱信号的存在,解决了文献[10]中参数识别受微弱信号相位限制的问题。

2) 改进周期识别法为方差曲线周期识别法。在证明了相位分岔图与方差曲线存在一致性的基础上,采用具有统计特性的方差曲线来代替系统相位分岔图,进一步提高了检测方法的噪声鲁棒性,将待检测信号的SNR由文献[10]的 -54.88 dB降低到了 -74.96 dB。

3) 采用自适应DFT数据处理对方差曲线识别法进行优化。采用自适应DFT算法得到与被测信号同频同相的光滑正弦曲线,解决了由于方差曲线的不光滑而带来的偶然性误差问题。

4) 提出了频率偏差情况下的二次检测算法。采用二次检测算法解决了由于策动力信号和被测信号存在频差而导致的系统状态转迁不明显的问题。

参 考 文 献

- [1] ZHENG K, LI T A, SU Z Q, et al. Sparse elitist group lasso denoising in frequency domain for bearing fault diagnosis [J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2021, 17(7): 4681-4691.
- [2] 张迪, 卢国梁. 基于图建模特征提取的滚动轴承故障诊断[J]. 振动、测试与诊断, 2021, 41(2): 249-253.
ZHANG Di, LU Guoliang. Fault diagnosis of rolling bearings based on graph modeling feature extraction[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2021, 41(2): 249-253. (in Chinese)
- [3] ZANG Y, WEI S G, CAI B G, et al. Methods for fault diagnosis of high-speed railways: a review [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part O: Journal of Risk and Reliability, 2019, 233(5): 908-922.
- [4] WANG Q B, ZHANG X, YANG Y J. Dynamic behaviors analysis of asymmetric stochastic delay differential equations with noise and application to weak signal detection [J]. Symmetry, 2019, 11(11): 1428.
- [5] ZHANG L, JI Y D, LUO M K. Parameter estimation of weak signal based on the steady attractor of duffing oscillator[J]. Chinese Journal of Electronics, 2019, 28(4): 781-788.
- [6] GOKYILDIRIM A, UYAROGLU Y, PEHLIVAN I, et al. A novel chaotic attractor and its weak signal detection application[J]. Optik, 2016, 127(19): 7889-7895.
- [7] LI G Z, TAN N L, LI X. Weak signal detection method based on the coupled lorenz system and its application in rolling bearing fault diagnosis[J]. Applied Sciences, 2020, 10(12): 4086.
- [8] MAHMUT A, NAZMI Y, GEDIZ AKDENIZ K. Automated system for weak periodic signal detection based on Duffing oscillator[J]. IET Signal Processing, 2020, 14(10): 710-716.
- [9] 赖志慧, 冷永刚, 孙建桥, 等. 基于Duffing振子的变尺度微弱特征信号检测方法研究[J]. 物理学报, 2012, 61(5): 60-68.
LAI Zhihui, LENG Yonggang, SUN Jianqiao, et al. Weak characteristic signal detection based on scale transformation of Duffing oscillator[J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(5): 60-68. (in Chinese)
- [10] TIAN R L, ZHAO Z J, XU Y. Variable scale-convex-peak method for weak signal detection [J]. Science China Technological Sciences, 2021, 64(2): 331-340.
- [11] SIMIU E, FREY M. Melnikov processes and noise-induced exits from a well [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1996, 122(3): 263-270.
- [12] FREY M, SIMIU E. Noise-induced chaos and phase space flux[J]. Physica D. Nonlinear Phenomena, 1993, 63(3/4): 321-340.
- [13] YAGASAKI K. Melnikov processes and chaos in randomly perturbed dynamical systems[J]. Nonlinearity, 2018, 31: 3057-3085.



第一作者简介:薛强,男,1977年5月生,博士生、讲师。主要研究方向为数字信号处理、微弱信号参数识别和故障诊断。曾发表《小波与相关函数算法在矿山震源定位中的应用》(《石家庄铁道大学学报(自然科学版)》2016年第29卷第4期)等论文。
E-mail: xueq77@163.com

通信作者简介:田瑞兰,女,1977年2月生,博士、教授、博士生导师。主要研究方向为非线性动力学及应用、早期故障诊断、力学超结构及装备动力学设计。
E-mail: tianrl@stdu.edu.cn