

基于改进正则化的多点平稳随机载荷识别方法*

井雯, 姜金辉, 许锋, 包欢迎, 陈爽

(南京航空航天大学航空航天结构力学及控制全国重点实验室 南京, 210016)

摘要 针对随机载荷识别中的病态逆问题影响识别精度、制约工程应用的问题,根据频响函数矩阵大小奇异值对识别结果稳定性影响程度的不同,在逆虚拟激励法的基础上提出一种改进正则化方法。首先,在识别过程中采用变正则化参数方式,对较小的奇异值采用较大的正则化参数修正,对较大的奇异值采用较小的正则化参数修正,以提高识别精度;其次,通过平板结构仿真分析了该方法与直接求逆法、传统 Tikhonov 正则化方法在 5% 和 10% 响应测量噪声水平下的载荷识别精度;最后,进行了简支梁多点平稳随机载荷试验,验证了方法的可行性。研究表明,与直接求逆法和传统 Tikhonov 正则化相比,该方法提高了载荷识别精度,对响应测量噪声具有良好的鲁棒性。

关键词 随机载荷识别;病态逆问题;Tikhonov 正则化;改进正则化

中图分类号 TH113.1;TU311.3;O324

引言

动载荷识别^[1-2]属于结构动力学的第 2 类逆问题,其根据已知结构的动态特性和实测的动力响应反识别作用在结构上的动态载荷。该技术给难以直接测量的动载荷提供了一种间接测量方法,为工程结构的设计和优化提供了基础。

根据载荷类型,动载荷识别可以分为确定性载荷识别和随机载荷识别。目前,确定性载荷的识别方法有频域法、时域法、小波变换及神经网络算法等^[3-6]。随机载荷的 2 种经典识别方法为频响函数矩阵求逆法^[7]和逆虚拟激励法^[8]。其中:频响函数矩阵求逆法简单易实施,但计算量大;逆虚拟激励法引入了谱分解理论,其相对复杂,但计算量小。

用频响函数矩阵求逆法或逆虚拟激励法识别随机载荷都会面临病态逆问题。当频响函数矩阵严重病态时,由于存在频响函数误差和响应测量误差,若直接求逆,则微小的误差扰动会导致识别结果远偏离真实值。目前,处理病态逆问题的方法有奇异值分解法、直接正则化法及迭代正则化法等。李东升等^[9]对钢和有机玻璃悬臂梁进行了多点随机载荷试验,在逆虚拟激励法的基础上采用奇异值分解法处理病态逆问题。姜金辉等^[10]基于谱分解理论对多点任意相干随机载荷识别进行了研究,提出条件数权重法来减轻频响函数矩阵病态,该方法比直接求逆法识别精度高。郭荣等^[11]提出综合使用奇异值分解

方法与 Tikhonov 正则化方法的载荷识别方法,其精度高于单独使用奇异值分解法或 Tikhonov 正则化方法。张磊等^[12]利用共轭梯度法求解总体最小二乘 Tikhonov 最优正则化解,不仅提高了载荷识别精度,还对频响函数误差具有良好的鲁棒性。Jia 等^[13]综合考虑了响应测量误差和频响函数误差对随机载荷识别结果的影响,提出加权总体最小二乘法 and 加权 Tikhonov 正则化方法,2 种方法都能有效提高固有频率附近的载荷识别精度。He 等^[14]提出一种改进正则化参数方法,提高了随机载荷识别精度,并避免了频响函数矩阵条件数较小频段的过度正则化。

上述方法在一定程度上减轻了频响函数矩阵的病态,但病态逆问题仍是随机载荷识别中的难点之一。因此,为提高随机载荷识别精度,笔者针对其中的病态逆问题,基于逆虚拟激励法,从频响函数矩阵大小奇异值对识别结果稳定性影响程度不同的角度出发,提出一种改进正则化方法,对不同的奇异值采用不同的正则化参数修正,并仿真和试验验证了该方法的可行性。

1 基于改进正则化的载荷识别方法

1.1 逆虚拟激励法

对于线性时不变系统,随机振动信号输入与输出之间的关系为

* 国家自然科学基金资助项目(12372066,U23B6009);航空科学基金资助项目(20240013052002);江苏高校“青蓝工程”资助项目

收稿日期:2022-08-22;修回日期:2022-09-22

$$S_{yy}(\omega) = H(\omega)^* S_{xx}(\omega) H(\omega)^T \quad (1)$$

其中: $S_{yy}(\omega) \in C^{m \times m}$, 为响应功率谱密度矩阵; $S_{xx}(\omega) \in C^{n \times n}$, 为激励功率谱密度矩阵; $H(\omega) \in C^{m \times n} (m \geq n)$, 为频响函数矩阵; * 表示共轭。

假设载荷作用位置已知, 系统的动力响应完全由待识别的载荷产生, 基于逆虚拟激励法识别平稳随机载荷的过程如下。

1) 将响应功率谱密度矩阵进行谱分解

$$S_{yy}(\omega) = \sum_{i=1}^r b_i(\omega)^* b_i(\omega)^T \quad (2)$$

2) 构造虚拟响应

$$y_i(\omega) = b_i(\omega) e^{j\omega t} \quad (3)$$

3) 认为虚拟响应 $y_i(\omega)$ 由虚拟激励 $x_i(\omega) = a_i(\omega) e^{j\omega t}$ 产生, 则

$$a_i(\omega) = H(\omega)^+ b_i(\omega) \quad (4)$$

4) 识别激励功率谱密度矩阵

$$S_{xx}(\omega) = \sum_{i=1}^r a_i(\omega)^* a_i(\omega)^T \quad (5)$$

其中: r 为响应功率谱密度矩阵的秩。

1.2 传统 Tikhonov 正则化方法

在逆虚拟激励法的基础上, 用传统 Tikhonov 正则化方法重构载荷, 逆问题转变为最小值问题, 即

$$\min \left\{ \|H(\omega) a_i(\omega) - b_i(\omega)\|^2 + \lambda_i \|L a_i(\omega)\|^2 \right\} \quad (6)$$

其中: $\|\cdot\|$ 表示范数; λ_i 为正则化参数; L 为正则化矩阵。

求式(6)对 $a_i(\omega)$ 的一阶导数, 一阶导数等于零时对应的解为 Tikhonov 正则化解, 即

$$a_i(\omega) = \left(H(\omega)^H H(\omega) + \lambda_i L^H L \right)^{-1} H(\omega)^H b_i(\omega) \quad (7)$$

对于离散线性系统, 将频响函数矩阵奇异值分解为

$$H(\omega) = U S A^H = \sum_{j=1}^n u_j \sigma_j v_j^H \quad (8)$$

其中: $U = [u_1, u_2, \dots, u_m] \in C^{m \times m}$; u_j 为频响函数矩阵的左奇异向量; $V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \in C^{n \times n}$; v_j 为频响函数矩阵的右奇异向量; $S = \text{dig}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$; σ_j 为频响函数矩阵的奇异值, 并且 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ 。

一般取 $L = I$, 将式(8)代入式(7)得离散线性系统的 Tikhonov 正则化解, 即

$$a_j(\omega) = \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2 + \lambda_i} \frac{u_j^H b_i(\omega)}{\sigma_j} v_j \quad (9)$$

1.3 改进正则化方法

传统 Tikhonov 正则化方法取正则化矩阵为单位矩阵, 对频响函数矩阵中每个奇异值都采用相同的正则化参数进行修正。当响应测量误差一定时, 频响函数矩阵中较小的奇异值倒数是一个较大的数, 对响应测量误差放大程度较大, 从而对载荷识别结果稳定性影响较大; 而较大的奇异值倒数是一个较小的数, 对响应测量误差放大程度较小, 从而对载荷识别结果稳定性影响较小。同时, 较小的奇异值及其特征向量包含的矩阵信息较少, 较大的奇异值及其特征向量包含的矩阵信息较多。因此, 笔者考虑对较小的奇异值采用较大的正则化参数修正, 对较大的奇异值采用较小的正则化参数修正。为此, 结合频响函数矩阵右奇异向量, 构造了一种新的正则化矩阵, 其表达式为

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt[1/4]{\sigma_1/\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt[1/4]{\sigma_1/\sigma_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt[1/4]{\sigma_1/\sigma_n} \end{bmatrix} V^H \quad (10)$$

其中: σ_1 为频响函数矩阵第1阶奇异值。

σ_1 及其特征向量包含的矩阵信息最多, 随着阶次 j 的增大, σ_j 及其特征向量包含的矩阵信息逐渐减少。

新的正则化矩阵对应的正则化解为

$$a_i(\omega) = \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2 + \lambda_i \sqrt{\sigma_j/\sigma_j}} \frac{u_j^H b_i(\omega)}{\sigma_j} v_j \quad (11)$$

式(11)表明, 本研究构造的正则化矩阵实现了对较小的奇异值采用较大的正则化参数修正, 对较大的奇异值采用较小的正则化参数修正。这样既能保留频响函数矩阵的主要信息, 又能减小较小的奇异值对识别结果稳定性的影响。

此外, 载荷识别中常用系数矩阵条件数衡量系统的病态程度, 条件数越大表示系统病态越严重。频响函数矩阵条件数的计算公式为

$$k(H(\omega)) = \|H(\omega)\| \|H(\omega)^{-1}\| \quad (12)$$

当频响函数矩阵条件数较大、系统病态严重时, 微小的误差扰动就会引起识别结果远偏离真实值。针对此问题, 提出的新正则化矩阵着重修正了较小的奇异值, 以提高解的稳定性。当频响函数矩阵条

件数较小、系统病态较轻时,为避免过度正则化,本研究对正则化参数乘以修正系数 $q(\omega)$,其表达式为

$$q(\omega) = k(H(\omega)) / k(H(\omega))_{\max} \quad (13)$$

其中: $k(H(\omega))_{\max}$ 为分析频段内最大频响函数矩阵条件数。

因此,本研究改进正则化解为

$$a_i(\omega) = \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2 + q(\omega)\lambda_i\sqrt{\sigma_1/\sigma_j}} \frac{\mathbf{u}_j^H \mathbf{b}_i(\omega)}{\sigma_j} \nu_j \quad (14)$$

其中: $q(\omega)$ 为一个小于等于 1 的正数。

频响函数矩阵条件数越小,则 $q(\omega)$ 越小,正则化修正程度就越小,从而避免了条件数较小、系统病态较轻时的过度正则化。

正则化参数用于平衡残差范数和解范数的大小,正则化参数的选取对正则化解至关重要。目前,常用的正则化参数选取方法有广义偏差准则、广义交叉检验(generalized cross validation,简称 GCV)方法和 L 曲线准则。笔者采用 L 曲线准则选取正则化参数。多点平稳随机载荷识别方法流程如图 1 所示。

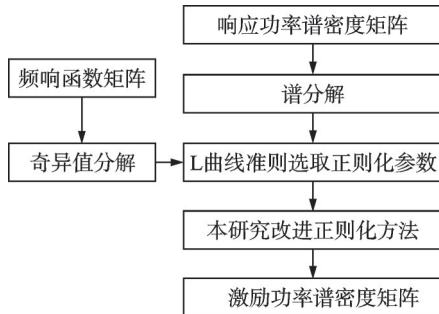


图 1 多点平稳随机载荷识别方法流程
Fig.1 Method flow of multi-point stationary random load identification

2 仿真算例

为验证本研究方法的可行性,采用一端固支、一端自由的平板结构进行仿真分析。平板几何参数和材料参数如表 1 所示。

平板有限元模型共有 351 个壳单元和 392 个单元结点。平板前 10 阶固有频率如表 2 所示。

表 1 平板几何参数和材料参数

Tab.1 Geometrical and material parameters of the plate			
参数	数值	参数	数值
长/m	0.8	密度/(kg·m ⁻³)	7 800
宽/m	0.4	泊松比	0.3
高/m	0.01	阻尼比	0.03
弹性模量/GPa	210		

表 2 平板前 10 阶固有频率

Tab.2 The first 10th order natural frequency of the plate

阶次	1	2	3	4	5
f/Hz	13.41	57.09	83.43	185.44	233.50
阶次	6	7	8	9	10
f/Hz	354.74	356.10	448.78	456.50	483.12

在平板上同时作用 3 个部分相干平稳随机载荷,并选取 5 个点的加速度响应反识别载荷。平板激励点与响应点位置示意图如图 2 所示。其中: F 为激励点; a 为响应点。

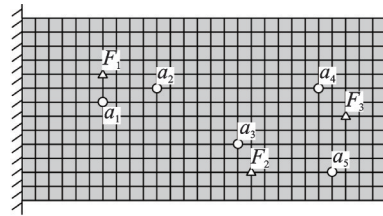


图 2 平板激励点和响应点位置示意图
Fig.2 Diagram of excitation points and response points on the plate

平板的频响函数矩阵条件数如图 3 所示。第 1 阶固有频率处条件数最大,频响函数矩阵病态严重。

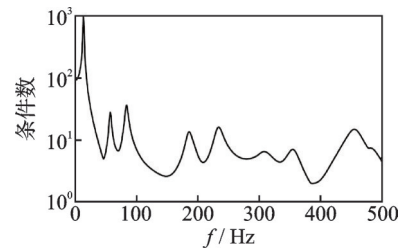


图 3 平板的频响函数矩阵条件数
Fig.3 Condition number of the frequency response function matrix for the plate

向加速度响应中分别加入 5% 和 10% 的高斯白噪声,模拟实际测量环境,分析不同响应测量噪声水平下本研究方法、直接求逆法与传统 Tikhonov 正则化方法的载荷识别精度。为具体评估载荷识别精度,笔者引入了相对误差(relative error,简称 RE)和平均相对误差(mean relative error,简称 MRE),其表达式分别为

$$RE = \left\| \hat{S}_x - S_x \right\| / \| S_x \| \quad (15)$$

$$MRE = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\left\| \hat{S}_x - S_x \right\| / \| S_x \| \right)}{N} \quad (16)$$

其中: \hat{S}_x 为识别载荷谱; S_x 为真实载荷谱; N 为待识别载荷谱的个数。

不同响应测量噪声下载荷识别平均相对误差如表3所示。与其他2种方法相比,本研究方法的载荷识别精度最高。随着响应测量噪声从5%增大到10%,其他2种方法的识别平均相对误差急剧增大,而本研究方法的识别平均相对误差只增大了4.52%,这表明本研究方法的抗噪能力较强。

5% 响应测量噪声下的载荷识别结果如图4所示。

表3 不同响应测量噪声下载荷识别平均相对误差
Tab.3 Mean relative error of load identification under different response measurement noises %

噪声	直接求逆法	Tikhonov方法	本研究方法
5%	253.12	112.03	8.45
10%	446.87	210.99	12.97

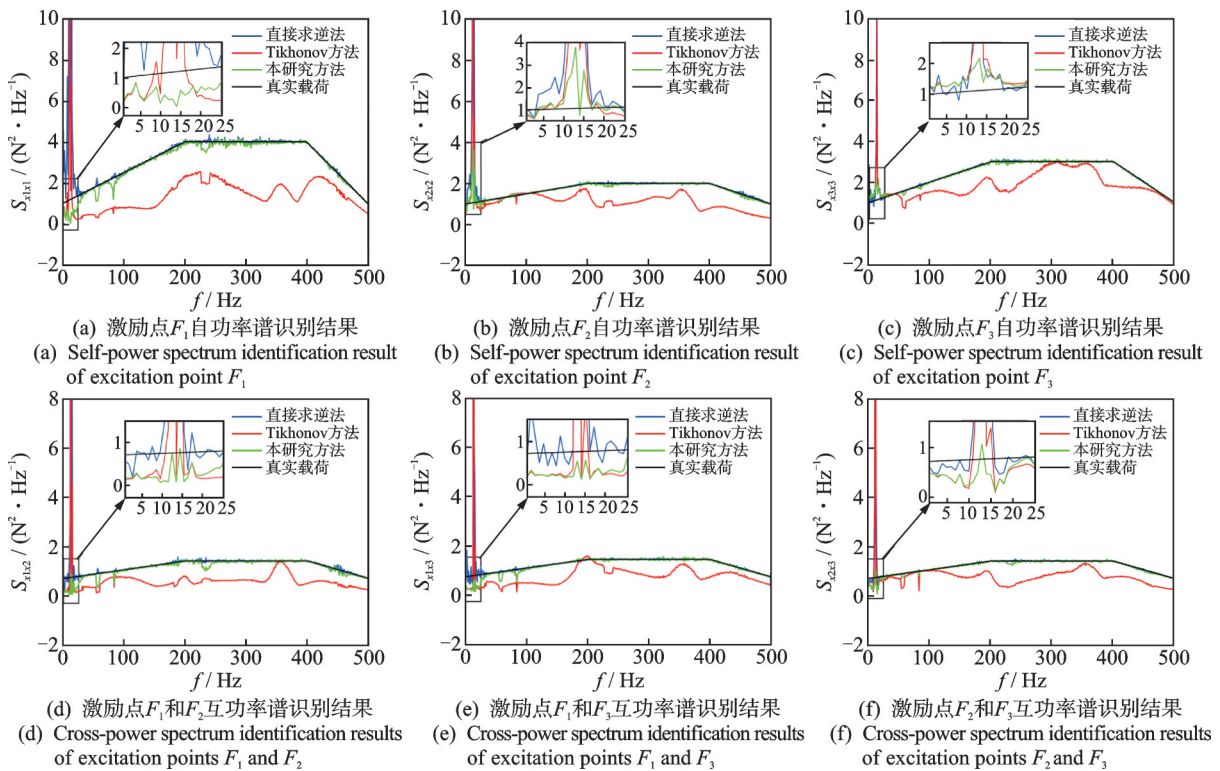


图4 5% 响应测量噪声下的载荷识别结果

Fig.4 Load identification results under 5% response measurement noise

表4 5% 响应测量噪声下载荷识别相对误差

Tab.4 Relative error of load identification under 5% response measurement noise %

功率谱	直接求逆法	Tikhonov方法	本研究方法	功率谱	直接求逆法	Tikhonov方法	本研究方法
$S_{x_1r_1}$	465.51	112.97	6.88	$S_{x_1r_2}$	529.70	204.66	12.17
$S_{x_2r_2}$	211.70	140.69	10.35	$S_{x_1r_3}$	178.55	90.64	10.43
$S_{x_3r_3}$	23.66	34.75	4.13	$S_{x_2r_3}$	109.61	88.45	6.73

3 试验验证

为进一步验证本研究方法的可行性,进行了简支梁多点平稳随机载荷试验。简支梁试验件几何参

数。其中: $S_{x_1r_1}, S_{x_2r_2}, S_{x_3r_3}$ 分别为激励点 F_1, F_2 和 F_3 的自功率谱; $S_{x_1r_2}$ 为激励点 F_1 和 F_2 的互功率谱; $S_{x_1r_3}$ 为激励点 F_1 和 F_3 的互功率谱; $S_{x_2r_3}$ 为激励点 F_2 和 F_3 的互功率谱。

由图4可知,在第1阶固有频率附近,本研究方法的载荷识别精度最高,传统Tikhonov正则化方法次之,直接求逆法最差。同时,与传统Tikhonov正则化方法相比,本研究方法既有效提高了第1阶固有频率附近的载荷识别精度,又避免了频响函数矩阵条件数较小频段的过度正则化。

5% 响应测量噪声下3种方法的载荷识别相对误差如表4所示。与其他2种方法相比,本研究方法对6个载荷谱的识别相对误差都最小。

数和材料参数如表5所示。

模态试验测得简支梁试验件前3阶固有频率,如表6所示。

表 5 简支梁试验件几何参数和材料参数

Tab.5 Geometry and material parameters of the simply supported beam test piece

参数	数值	参数	数值
长/m	0.7	弹性模量/GPa	210
宽/m	0.04	密度/(kg·m ⁻³)	7 800
高/m	0.008	泊松比	0.3

表 6 简支梁试验件前 3 阶固有频率

Tab.6 The first 3 order natural frequencies of the simply supported beam test piece

阶次	试验频率/Hz
1	37.70
2	148.33
3	335.76

在简支梁试验件上选取 2 个激励点和 3 个响应点,简支梁试验件激励点和响应点位置如图 5 所示。多点平稳随机载荷试验方案如图 6 所示。多点平稳随机载荷试验台如图 7 所示。试验中,采样频率为 1 024 Hz,频率分辨率为 0.25 Hz,先测得各激励点与各响应点之间的加速度频响函数,然后两点同时激励,施加两个部分相干的平稳随机载荷。

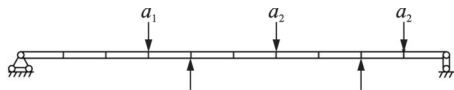


图 5 简支梁试验件激励点和响应点位置示意图

Fig.5 Diagram of excitation points and response points on the simply supported beam test piece

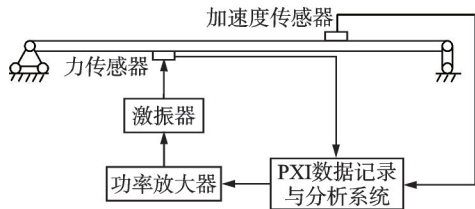


图 6 多点平稳随机载荷试验方案

Fig.6 Multi-point stationary random load test scheme

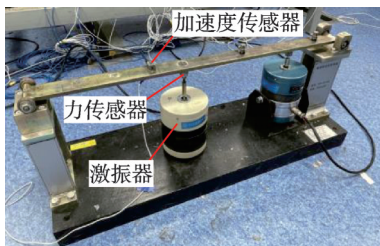


图 7 多点平稳随机载荷试验台

Fig7 Multi-point stationary random load test bench

简支梁试验件的频响函数矩阵条件数如图 8 所示,峰值分别出现在前 3 阶固有频率附近。其中,第 1 阶固有频率附近条件数最大,矩阵病态严重。

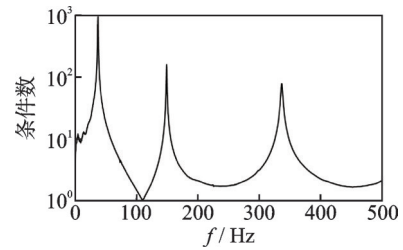


图 8 简支梁试验件的频响函数矩阵条件数

Fig.8 Condition number of the frequency response function matrix for the simply supported beam test piece

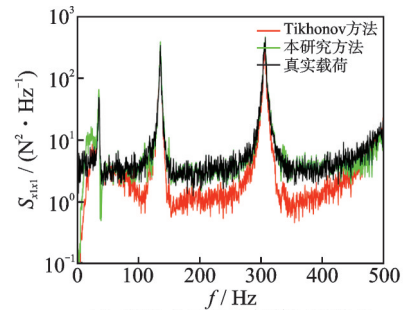
3 种方法的载荷识别相对误差如表 7 所示。由表可知,本研究方法对 2 个自功率谱的识别相对误差分别为 8.78% 和 13.19%,相比于传统 Tikhonov 正则化方法分别减小了 15.45% 和 6.66%。

表 7 3 种方法的载荷识别相对误差

Tab.7 Relative error of load identification for the three methods

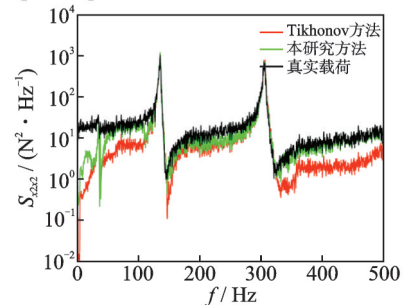
自功率谱	直接求逆法	Tikhonov 方法	本研究方法
S_{x1x1}	20.87	24.23	8.78
S_{x2x2}	25.00	19.85	13.19

将本研究方法与传统 Tikhonov 正则化方法进行对比,2 种正则化方法的载荷识别结果如图 9 所示。除低频段外,本研究方法识别的载荷谱与真实载荷谱吻合较好。低频段识别效果较差,可能是因为传感器在低频段灵敏度较低。同时,图 9 中真实载荷谱有峰值,这是因为试验中没有加入控制,简支梁试验件的模态与载荷谱发生耦合,从而导致了这一现象。



(a) 激励点 F_1 自功率谱识别结果

(a) Self-power spectrum identification result of excitation point F_1



(b) 激励点 F_2 自功率谱识别结果

(b) Self-power spectrum identification result of excitation point F_2

图 9 2 种正则化方法的载荷识别结果

Fig.9 Load recognition results of two regularization methods

4 结 论

1) 基于逆虚拟激励法对多点平稳随机载荷识别进行了研究,针对其中的病态逆问题,提出一种改进正则化方法。

2) 根据频响函数矩阵大小奇异值对识别结果稳定性影响程度的不同,构造了一种新的正则化矩阵,实现了对较大的奇异值采用较小的正则化参数修正,对较小的奇异值采用较大的正则化参数修正。为了避免频响函数矩阵条件数较小频段的过度正则化,对正则化参数进行了修正。

3) 仿真和试验结果验证了该方法的可行性。与直接求逆法和传统 Tikhonov 正则化方法相比,所提方法不仅提高了载荷识别精度,还对响应测量误差具有良好的鲁棒性。

参 考 文 献

- [1] 杨智春, 贾有. 动载荷的识别方法[J]. 力学进展, 2015, 45(1): 29-54.
YANG Zhichun, JIA You. The identification of dynamic loads[J]. Advances in Mechanics, 2015, 45(1): 29-54.(in Chinese)
- [2] LIU R X, DOBRIBAN E, HOU Z C, et al. Dynamic load identification for mechanical systems: a review[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2022, 29(2): 831-863.
- [3] 赵凤遥, 张建成, 葛巍, 等. 基于多项式拟合初值的动载荷识别修正算法[J]. 振动与冲击, 2021, 40(11): 211-219.
ZHAO Fengyao, ZHANG Jiancheng, GE Wei, et al. Dynamic load identification correction algorithm based on polynomial fitting initial value[J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40(11): 211-219.(in Chinese)
- [4] 张玉良, 杨飞, 岳洪浩, 等. 基于频域法的星箭连接分离装置的冲击载荷识别[J]. 振动与冲击, 2018, 37(17): 79-85.
ZHANG Yuliang, YANG Fei, YUE Honghao, et al. Impact load identification of connection-separation device between satellite and rocket with frequency domain method based on EEMD[J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37(17): 79-85.(in Chinese)
- [5] 杨帆, 张方. 动载荷识别的小波级数分解法阶次确定[J]. 振动、测试与诊断, 2015, 35(1): 56-62.
YANG Fan, ZHANG Fang. Order selection for wavelet series decomposition in dynamic load identification[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2015, 35(1): 56-62.(in Chinese)
- [6] ZHOU J M, DONG L L, GUAN W, et al. Impact load identification of nonlinear structures using deep recurrent neural network[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 133: 106292.
- [7] 裴焕斗, 孟松. 动态随机载荷识别技术研究[J]. 测试技术学报, 1998(3): 507-511.
PEI Huandou, MENG Song. The research of dynamic random load identification[J]. Journal of Test and Measurement Technology, 1998(3): 507-511.(in Chinese)
- [8] 林家浩, 智浩, 郭杏林. 平稳随机振动荷载识别的逆虚拟激励法(一)[J]. 计算力学学报, 1998, 15(2): 127-136.
LIN Jiahao, ZHI Hao, GUO Xinglin. Inverse pseudo excitation method for loading identification of stationary random vibration (1)[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1998, 15(2): 127-136.(in Chinese)
- [9] 李东升, 郭杏林. 逆虚拟激励法随机载荷识别试验研究[J]. 工程力学, 2004, 21(2): 134-139.
LI Dongsheng, GUO Xinglin. Experimental random loading identification using inverse pseudo excitation method[J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(2): 134-139.(in Chinese)
- [10] 姜金辉, 陈国平, 张方. 多点平稳随机载荷识别方法研究[J]. 振动工程学报, 2009, 22(2): 162-167.
JIANG Jinhui, CHEN Guoping, ZHANG Fang. Identification method of multi-point stationary random load[J]. Journal of Vibration Engineering, 2009, 22(2): 162-167.(in Chinese)
- [11] 郭荣, 房怀庆, 裘劼, 等. 基于 Tikhonov 正则化及奇异值分解的载荷识别方法[J]. 振动与冲击, 2014(6): 53-58.
GUO Rong, FANG Huaiqing, QIU Shan, et al. Novel load identification method based on the combination of Tikhonov regularization and singular value decomposition[J]. Journal of Vibration and Shock, 2014(6): 53-58.(in Chinese)
- [12] 张磊, 曹跃云, 杨自春, 等. 总体最小二乘正则化算法的载荷识别[J]. 振动与冲击, 2014(9): 159-164.
ZHANG Lei, CAO Yueyun, YANG Zichun, et al. Load identification using CG-TLS regularization algorithm[J]. Journal of Vibration and Shock, 2014(9): 159-164.(in Chinese)
- [13] JIA Y, YANG Z C, GUO N, et al. Random dynamic load identification based on error analysis and weighted total least squares method[J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 358: 111-123.
- [14] HE Z C, ZHANG Z M, LI E. Multi-source random excitation identification for stochastic structures based on matrix perturbation and modified regularization method[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 119: 266-292.



第一作者简介: 井雯, 女, 1998年3月生, 硕士生。主要研究方向为动载荷识别。
E-mail: jingwen@nuaa.edn.cn

通信作者简介: 姜金辉, 男, 1981年4月生, 博士、教授。主要研究方向为结构动力学逆问题、振动抑制及控制。
E-mail: jiangjinhui@nuaa.edn.cn