DOI:10.16450/j.cnki.issn.1004-6801.2025.02.023

# 天轮及悬绳对提升系统纵向振动的影响特性<sup>\*</sup>

王彦栋<sup>1,2</sup>, 寇子明<sup>1,2</sup>

(1.太原理工大学机械工程学院 太原,030024)(2.矿山流体控制国家地方联合工程实验室 太原,030024)

摘要 针对含悬绳与天轮的矿井提升系统纵向振动问题,首先,采用多体动力学理论与连续体建模相结合的方式, 将提升绳的悬绳与垂直段作为整体建模,构建了矿井提升系统纵向振动模型;其次,推导了系统纵向振动方程,得到 了系统纵向固有频率随绳长的变化规律以及系统的纵向振动响应特性,数值结果与现场试验结果吻合良好。结果 表明:提出的模型准确显示了系统的共振区间,天轮对系统2阶以上的纵向固有频率有较大影响,悬绳对系统每一 阶固有频率均有影响;当提升系统在纵向方向发生共振时,天轮处的共振相比提升容器处更剧烈,该振动会造成天 轮井架的抖动,甚至会造成提升绳与天轮间发生相对滑动,对天轮衬垫及钢丝绳造成磨损,给系统带来安全隐患。

关键词 矿井提升系统;纵向振动;天轮;悬绳;数值模拟 中图分类号 TH113

# 1 问题的引出

在矿山生产中,提升系统是连接矿山井上和井 下的重要环节。图1所示为矿山立井常用的几种传 统提升系统,包括单绳缠绕式、落地式多绳摩擦式以 及井塔式摩擦式提升系统。近年来,为了满足超深 井的提运,又提出了双绳缠绕式提升系统,如图2所 示。由于井筒中安装有刚性或柔性罐道,提升容器 在运行过程中的横向和扭转振动会被抑制,但纵向 振动不可避免。提升系统的纵向振动影响系统运行 的平稳性以及工人乘坐的舒适性,因此构建精确的



提升系统纵向振动模型,揭示系统在自身及外界激励作用下的动态特性,对于提升系统的参数设计及安全运行有重要的意义。提升绳在较长距离下会表现出弹性,动力学建模时可近似为弹簧<sup>[12]</sup>或集中弹簧-质量-阻尼系统<sup>[3]</sup>,可用于简化分析提升系统的纵向特性及纵向振动的控制策略<sup>[4]</sup>。为了得到提升系统的精确动态特性,一般采用连续体理论对钢丝绳进行建模,借助Hamilton原理推导描述系统纵向振动的控制方程及边界条件<sup>[57]</sup>,通过Galerkin方法或有限差分等方法对方程进行空间离散<sup>[89]</sup>,得到一组常微分方程组,通过数值仿真来获取系统动态特性。当边界条件较为简单时,还可采用摄动法等进行近似解析求解<sup>[10-11]</sup>。



\* 国家自然科学基金资助项目(52205120);山西省应用基础研究计划资助项目(201901D211009) 收稿日期:2022-07-28;修回日期:2022-12-06

由图1,2可以看出,除井塔式摩擦提升系统外, 其余几种提升系统的提升绳均包含悬绳(即卷筒/滚 筒至天轮段),由于悬绳长度相比垂直段小很多,大 部分研究选择忽略不计[9,12-13],从而天轮的动态特性 也被忽略掉。然而,当提升容器运行至井筒顶部区 域时,悬绳与垂直段长度接近,此时悬绳将对系统纵 向振动仿真结果产生较大影响,而且天轮的参与也 会影响系统的纵向振动,同时天轮也是天轮平台振 动的主要激励源,其动态特性直接影响井架的安全 性。朱真才等[14]针对深井提升系统钢丝绳纵向振动 问题提出一种收敛性较快的鲁棒控制策略,动力学 模型中包含了天轮动态特性,但未分析天轮对系统 纵向振动的影响。针对包含悬绳的提升系统纵向振 动建模,目前采用的方式仍是通过Hamilton原理得 到分别描述悬绳与垂直段动态特性的控制方 程<sup>[8,15-16]</sup>,以及提升系统在天轮处与提升容器处的力 边界条件。由于边界条件相对复杂,导致对控制方 程空间离散求解时试函数的形式复杂,且每个长度 下的试函数均需通过求解一个超越方程得到,极大 增加了数值计算的难度和时间。因此,为了简化计 算过程,悬绳通常被简化建模为弹簧[15,17],这使得悬 绳和天轮的动能被忽略,因而无法揭示其动态特性 对系统纵向振动的影响。

提升系统由多个部件构成,可采用多体动力学的建模方法,通过推导各部件的动能、势能、耗散能 以及各部件间的位置约束关系,根据第1类拉格朗 日方程得到系统动力学方程<sup>[18-19]</sup>。该种方法的优点 在于无需推导系统的力边界条件,且可通过拉格朗 日乘子获取位移约束处部件间的相互作用力。

笔者针对含悬绳的提升系统纵向振动问题,考 虑悬绳与天轮的动态特性,结合连续体理论和多体 动力学建模方法,将悬绳与垂直段作为整体进行建 模,构建提升系统纵向振动力学模型,分析系统的纵 向固有频率特性、纵向动态特性以及天轮和悬绳对 系统纵向振动的影响。

# 2 考虑天轮及悬绳的矿井提升系统纵向振动模型的建立

笔者以河北兖州某矿主井落地式多绳摩擦提升 系统为例进行分析,为了限制分析的范围,本研究基 于以下假设:

 1)提升绳悬绳所受重力远小于提升绳张力,因 此悬绳重力势能可忽略不计;

2) 对于多绳摩擦提升系统,由于多根钢丝绳在 力学性质、长度及边界条件等方面均一致,因此可简 化建模为单根绳,尾绳视作提升容器的一部分;

3)提升绳单位长度质量和纵向刚度保持不变;4) 仅考虑提升绳的内阻尼,忽略除此之外的系统阻尼与摩擦;

5) 提升绳在天轮处不存在相对滑动。

基于以上假设,构建含悬绳的提升系统纵向振动模型,如图3所示。定义卷筒出绳点O为坐标原点,坐标轴y始终沿着提升绳,且出绳方向为正方向,将提升绳悬绳与垂直段作为整体进行建模,则系统动能K可被表示为

$$K = \int_{0}^{t(t)} \frac{1}{2} \rho \left[ \frac{D}{Dt} u(y, t) \right]^{2} dy + \frac{1}{2} m_{\rm h} [\dot{u}_{\rm h}(t) + v(t)]^{2} + \frac{1}{2} m_{\rm p} [\dot{u}_{\rm p}(t) + v(t)]^{2}$$
(1)

其中:l(t),v(t)分别为t时刻提升绳的长度与系统提 升速度,v(t) = d[l(t)]/dt;u(y,t)为t时刻y处提 升绳纵向动位移; $m_h, m_p$ 分别为天轮变位质量和提 升容器质量(对于多绳摩擦提升系统, $m_p$ 为提升容 器和尾绳质量之和); $u_h(t), u_p(t)$ 分别为天轮和提升 容 器 在 t 时 刻 的 动 位 移;微 分 算 子  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v(t)\frac{\partial}{\partial t}$ 为随体导数。



图 3 提升系统纵向振动模型

Fig.3 Longitudinal vibration model of the hoisting system

基于第1条假设,并定义天轮处系统的重力势 能为0,则系统的势能U为

$$U = \int_{0}^{L_{1}} \frac{1}{2} EA \left[ \frac{\partial}{\partial y} u(y,t) \right]^{2} + T_{1}(y,t) \frac{\partial}{\partial y} u(y,t) dy + \int_{L_{1}}^{l(t)} \frac{1}{2} EA \left[ \frac{\partial}{\partial y} u(y,t) \right]^{2} + T_{2}(y,t) \frac{\partial}{\partial y} u(y,t) dy - \int_{L_{1}}^{l(t)} \rho gu(y,t) dy - m_{p} g \left[ l(t) - L_{1} + u_{p}(t) \right]$$
(2)

其中:g为重力加速度; $L_1$ 为提升绳悬绳长度;  $T_1(y,t), T_2(y,t)$ 分别为提升绳悬绳与垂直段在t时刻y处的静张力。

$$\begin{cases} T_{1}(y,t) = mg + \rho g[l(t) - L_{1}] & (0 \leq y \leq L_{1}) \\ T_{2}(y,t) = mg + \rho g[l(t) - y] & (L_{1} < y \leq l(t)) \end{cases}$$
(3)

定义提升绳的内阻尼为µ,则系统耗散能D为

$$D = \int_{0}^{l(t)} \frac{1}{2} \mu \left[ \frac{\partial}{\partial t} u(y, t) \right]^{2} dy \qquad (4)$$

基于第5条假设,提升绳与天轮及提升容器间 的位移约束可表示为

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} u(L_1, t) + e(t) - u_{\rm h}(t) = 0\\ u(l(t), t) + e(t) - u_{\rm p}(t) = 0 \end{bmatrix} (5)$$

其中:e(t)为提升绳释放点处的外界位移激励。

为了方便后续数值解算,引入变量 $\xi = y/l(t)$ , 将 y 对应的时变域[0, l(t)]转变为 $\xi$ 所对应的固定 域[0, 1],并定义新的动位移变量为 $\bar{u}(\xi, t) =$ u(y, t),二者间有如下关系

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial y} = \frac{1}{l(t)} \frac{\partial \bar{u}(\xi,t)}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}(\xi,t)}{\partial t} - \frac{v(t)\xi}{l(t)} \frac{\partial \bar{u}(\xi,t)}{\partial \xi}$$
(6)

根据假设模态法<sup>[18,20]</sup>,将*t*时刻提升绳ξ处的动 位移近似为

$$\bar{u}(\boldsymbol{\xi},t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t) \boldsymbol{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}) \tag{7}$$

其中:n为假设模态所包含的模态数; $q_i(t)$ 为提升绳的广义坐标; $\phi_i(\xi)$ 为广义坐标所对应的试函数。

对于图 3 所示的模型,任意时刻提升绳在 O 处 可视为固定端,在提升绳的末端视为自由端,因此可 采用单位长度下一端固定、一端自由的弦绳振动特 征函数作为提升绳的试函数。对于一端固定、一端 自由的单位长度自由振动弦绳,其控制方程及其边 界条件分别为

$$\rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - P \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (0 < x < 1, t \ge 0)$$
(8)

$$\begin{cases} w(0,t) = 0\\ \frac{\partial}{\partial x} w(x,t)|_{x=1} = 0 \end{cases} \quad (t \ge 0) \qquad (9)$$

其中:w(x,t)为t时刻弦绳x处的振动位移;P为弦 绳张力。

式(8)、式(9)均为齐次方程,因此可采用分离变 量法进行求解,即假设其解的形式为

$$w(x,t) = X(x)T(t) \tag{10}$$

根据边界条件,可知X(x)的解为

$$X(x) = A \sin\left(\frac{2i-1}{2}\pi\right) \quad (i=1,2,\cdots,n) \quad (11)$$
进行如下归一化处理

$$\int_{0}^{1} A \sin\left(\frac{2i-1}{2}\pi x\right) A \sin\left(\frac{2j-1}{2}\pi x\right) dx|_{i=j} = 1$$
(12)

由式(12)可得参数A为 $\sqrt{2}$ ,则试函数的表达 式为

$$\psi_i(\boldsymbol{\xi}) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{2i-1}{2}\boldsymbol{\xi}\right) \tag{13}$$

若定义系统的广义坐标为

$$\boldsymbol{r} = \left[ q_1, q_2, \cdots, q_n, u_h, u_p \right]^{\mathrm{T}}$$
(14)

将式(1)、式(2)、式(4)和式(5)经过式(6)、 式(7)的变换后代入第1类Lagrange方程中,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_{j}} - \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{r}_{j}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_{j}} + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_{j}} = F_{j} + \sum_{i=1}^{2} \lambda_{i} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_{i}}{\partial \boldsymbol{r}_{j}} \quad (15)$$

系统纵向振动力学方程及位移约束条件为

$$M\ddot{r} + C\dot{r} + Kr + \boldsymbol{\Phi}_{r}^{\mathrm{T}}\lambda = F \qquad (16)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{17}$$

其中:*M*,*C*,*K*和*F*分别为系统的质量矩阵、阻尼矩 阵、刚度矩阵及广义力向量;**Φ**,为约束方程的雅可 比矩阵;λ为约束方程所对应的拉格朗日乘子。

# 3 仿真研究

为了分析悬绳及天轮对提升系统纵向振动的影响,笔者针对某矿主井落地式多绳摩擦提升系统分 别构建以下3种模型进行对比分析:

1)图3所示模型,包含悬绳与天轮;

2)图3所示模型,不包含天轮;

3)图3所示模型,不包含悬绳。

#### 3.1 纵向固有频率特性

为了求取系统的纵向振动固有频率,需先对 式(16)进行线性化处理。首先,引入矩阵U并满足

$$\boldsymbol{\Phi}_r \boldsymbol{U} = \boldsymbol{0} \tag{18}$$

其次,令*r*=*Ur*,将其代入式(16)中,并对方程 等号两边左乘*U*<sup>T</sup>,可得式(16)的线性化表达式为

 $U^{\mathrm{T}}MU\ddot{r} + U^{\mathrm{T}}CU\dot{r} + U^{\mathrm{T}}KU\bar{r} = U^{\mathrm{T}}F \quad (19)$ 

由于系统固有频率仅与自身参数有关,与外界 作用力无关,因此忽略式(19)中的F项,并令

$$\begin{cases} \bar{M} = U^{\mathrm{T}} M U \\ \bar{C} = U^{\mathrm{T}} C U \\ \bar{K} = U^{\mathrm{T}} K U \end{cases}$$
(20)

(21)

$$ar{M}\ddot{m{r}}\!+ar{C}\!\dot{m{r}}\!+ar{K}ar{m{r}}\!=\!0$$

将其改写为1阶的形式,即  
$$A\dot{z} + Bz = 0$$
 (22)

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \bar{M} \\ \bar{M} & \bar{C} \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} -\bar{M} & 0 \\ 0 & \bar{K} \end{bmatrix}$$
(23)
$$z = \begin{bmatrix} \dot{\bar{r}} \\ \bar{r} \end{bmatrix}$$

对式(22)等号两侧左乘
$$A^{-1}$$
,可得 $\dot{z} = Dz$  (24)

其中: $D = -A^{-1}B_{\circ}$ 

设式(24)的解为

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\Lambda} e^{\lambda t} \tag{25}$$

其中: $\Lambda$  为特征向量; $\lambda_i = -a \pm ib$  为特征向量所对 应的特征值。

将式(25)代入式(22)中,可得到关于系统固有 频率的特征方程为

$$\{\lambda I - D\}\Lambda = 0 \tag{26}$$

通过求解式(26)可得系统纵向固有频率随绳 长的变化曲线,如图4所示。仿真参数如下:提升绳 单位长度质量为9.5 kg,纵向刚度为6.051×10<sup>8</sup>N, 垂直段的初始长度与最大长度分别为18 m和 875 m,悬绳长度为60 m,提升容器与天轮的质量分 别为22 t和1.8 t。对于提升系统,其低阶频率为主





要振动频率,因此图中仅显示系统前5阶固有频率 随绳长的变化情况,自下向上分别为系统第1~5 阶。其中:实线为模型1频率曲线;水平直线代表激 励频率(10 Hz);图4(a)中虚线为模型2固有频率曲 线;图4(b)中虚线为模型3固有频率曲线。

由图4可知:10 Hz的激励频率在275 m(30 s) 附近及686 m(65 s)附近,分别与模型1的第2,3阶 固有频率接近,可以预测系统在此绳长范围内会发 生共振现象;对于不考虑天轮的模型2,共振区间在 357 m(37 s)和763 m(71 s)附近;对于不考虑悬绳 的模型3,所预测的共振区间则是在初始时刻、 415 m(42 s)和824 m(76 s)附近。

由图4(a)可以发现,有、无考虑天轮(模型1与 模型2)的系统第1阶纵向固有频率区别不大,但2 阶以上固有频率相差甚远,尤其第2阶固有频率在 变化形状上相差很大。由图4(b)可以发现,未考虑 悬绳时(模型3)的第1阶固有频率在初始段即与模 型1出现了较大差别,200m之后第1阶差距逐渐减 小,但2阶以上固有频率与模型1始终相差较大。 从上述结果可以看出,天轮对于系统2阶以上纵向 固有频率有较大的影响,而悬绳对系统各阶固有频 率均有较大影响。

#### 3.2 纵向振动响应

采用变加速运行曲线,提升系统加速度与速度如 图5所示,得到在10Hz频率纵向激励作用下系统向 下运行阶段的纵向振动特性。提升容器纵向振动对 比如图6所示。天轮与提升容器振动特性对比如图7 所示。提升绳与天轮间的相互作用力如图8所示。

由图 6 可以看出,3 种模型均显示系统在初始加 速与末端减速时会有大幅度的振动,尤其在减速时 由于绳长较长,纵向刚度较小,即使在变加速运行方 式下系统仍会有较大幅度的振动。在系统初始运行 的加速段和运行结束的减速段,模型1 与模型2 的差 别很小,而忽略悬绳的模型3 与模型1 的差别很大。

本研究方法还可得到天轮的动位移以及天轮与 提升绳间的相互作用力。由图7可以发现,天轮在两 共振区域内的振幅比提升容器的振幅大,而天轮的







Fig.6 Comparisons of the conveyance longitudinal vibration



图7 天轮与提升容器振动特性对比





图 8 提升绳与天轮间的相互作用力

Fig.8 Interaction force between the hoisting cable and the header-sheave

共振还会引起天轮平台的抖动及异响,对井架平台 造成安全隐患。本研究模型未考虑提升绳与天轮间 的相对滑动,由图8可以发现,在两个共振区域内提 升绳与天轮之间的相互作用力幅值较大,最大值约 为2150N,提升绳与天轮间极有可能发生相对滑动。

若要保证提升绳与天轮间无相对滑动,则必须 满足欧拉公式  $e^{-\mu \alpha} < T_a/T_b < e^{\mu \alpha}$ ,其中: $T_a = T_b$ 分 别为提升绳在天轮悬绳一侧和垂绳一侧的张力,且  $|T_a - T_b|$ 为提升绳与天轮间的相互作用力; $\mu =$ 0.25为摩擦因数(K25摩擦衬垫); $\alpha = 135°$ 为提升 绳在天轮上的围包角。因此,若提升绳张力比值在 [0.556,1.802]之间,即可保证提升绳与天轮无相对 滑动。本研究天轮与提升绳的最大相互作用力为 2 150 N,提升绳的最小张力达到 55 000 N,因此不 会发生相对滑动,也说明本研究模型假设条件是正 确的。但是,提升绳与天轮间的相互作用力会损坏 天轮的摩擦衬垫,且会造成钢丝绳的磨损,对提升系 统带来安全隐患。

# 4 试验研究

为了得到实际工况中提升绳受到的纵向激励频 率以及提升容器的纵向振动特性,笔者针对落地式 多绳摩擦提升系统进行了现场试验。摩擦轮处激励 频率测试如图9所示。为了采集摩擦轮处对提升绳 的位移激励,试验采用高精度激光位移传感器(型号 Wenglor CP35MHT80)进行测试,如图10所示。采 集卡采样频率为2500 Hz,激励频率测试结果如图 11所示。对所测数据进行频谱分析,得到摩擦轮处 的位移激励为10 Hz。由图10可以看出,激光信号 还检测了钢丝绳的股间隙。现场所用钢丝绳股在竖 直方向峰峰距离为60 mm,提升速度为12 m/s,即



1-激光位移传感器;2-三脚架;3-集成盒;4-上位机;5-上位机界面; 6-摩擦轮;7-提升钢丝绳

图 9 摩擦轮处激励频率测试图

Fig.9 Test on the excitation frequency arouse from the drum



图 10 激光位移传感器测试

Fig.10 Test photo of the laser displacement sensor





1 s 检测了 2 000 个峰/谷,属于高频干扰信号,因此可以确定 10 Hz 的频率信号为激励特征信号。

在激励频率测试中,激光位移传感器实际测量 了摩擦轮径向的凹凸变化。若定义摩擦轮理论半径 为r,转速为ω,摩擦轮与提升绳分离点处的凹凸变 化为r,sin(20πt),则在t时刻该分离点处提升绳的瞬 时速度为

$$v(t) = [r + r_e \sin(20\pi t)]\omega \qquad (27)$$

摩擦轮径向的10 Hz 位移激励同样造成了提升 绳在纵向方向的10 Hz 激励干扰,因此本研究选择 10 Hz 作为系统纵向振动的干扰频率。

由于直接测量提升绳/提升容器的纵向振动位 移存在困难,而提升绳的张力动态变化同样可以反 映系统的纵向振动特性,因此进行了多绳摩擦提升 系统提升容器纵向振动测试,如图12所示。其测量 原理如下:为了补偿多根钢丝绳间的长度差,提升绳 与提升容器之间通过张力自动平衡装置连接,各张 力自动平衡装置的油腔相联通,从而通过连通器原 理来平衡各绳张力。因此,通过测量张力平衡装置 的油压,通过简单换算便可获取提升钢丝绳张力的 变化特性。





提升绳底部张力理论与试验结果对比如图 13 所示。其中,理论曲线为模型1的数值结果,可以发 现其与试验结果吻合良好。由于提升系统向下运 行,提升容器底部的尾绳长度持续变短,因而施加在 提升容器上的作用力不断减小,所以提升绳底部张 力整体趋势不断变小。由图13还可发现,在30 s和



图 13 提升绳底部张力理论与试验结果对比

Fig.13 Theoretical and experimental result comparison on the tension of the hoisting cable

65 s附近,提升绳张力的理论与试验结果均出现较 大的波动,系统发生了共振现象,这与前述模型1的 固有频率分析结果相吻合。图6的局部放大图显 示,只有模型1正确反映了提升系统在10 Hz激励频 率作用下的共振区间,这也验证了本研究理论模型 (模型1)的正确性。

### 5 结 论

 1)考虑到悬绳及天轮的动态特性,结合连续体 建模理论与多体动力学方法,构建了矿井提升系统 纵向振动模型,推导了系统纵向振动力学方程。通 过数值分析得到了系统纵向固有频率随绳长的变化 规律,以及系统纵向振动数值仿真结果,其与试验结 果吻合良好,验证了本研究模型的正确性。

2)所提出的建模方法将提升绳悬绳与垂直段 作为整体建模,保证了提升绳整体的连续性,且试函 数形式简单,便于数值计算,可用于理论设计阶段预 测提升系统的纵向振动特性。本研究模型还能获取 天轮动态特性以及天轮与提升绳间的相互作用力, 可用于分析天轮对系统动态特性的影响机理。

3) 天轮对系统2阶以上纵向固有频率有较大 影响,而悬绳则影响着系统每一阶纵向固有频率。 本研究模型正确预测了在10 Hz外界激励作用下系 统的共振区间,并从理论结果可以看出在天轮处发 生了严重的共振现象。天轮共振不仅会造成天轮平 台的抖动,威胁天轮平台的安全,而且共振情况下提 升绳与天轮之间有较大的相互作用力,容易造成对 提升钢丝绳和天轮衬垫的磨损,对提升系统带来安 全隐患,因此对天轮振动的抑制尤为重要。

参考文献

- [1] WATANABE S, OKAWA T, NAKAZAWA D, et al. Vertical vibration analysis for elevator compensating sheave[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2013, 448: 012007.
- [2] 朱真才,戴兴国,古德生.缠绕式提升罐笼弹性承接 冲击动力学[J].中南工业大学学报(自然科学版), 2003,34(1):21-23.
  ZHU Zhencai, DAI Xingguo, GU Desheng. Dynamic research on cage elastic supporting impact of a drum hoist[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2003, 34(1):21-23.(in Chinese)
- [3] 张长友,朱昌明,吴广明.电梯系统垂直振动分析与 抑制[J].振动与冲击,2003,22(4):72-75.
   ZHANG Changyou, ZHU Changming, WU Guang-

ming. Suppression and analysis on the vertical vibration of elevator system[J]. Journal of Vibration and Shock, 2003, 22(4): 72-75.(in Chinese)

[4] 李翔,朱真才,沈刚,等.双绳缠绕式煤矿深井提升系
 统容器位姿调平控制方法[J].煤炭学报,2020(12):
 4228-4239.

LI Xiang, ZHU Zhencai, SHEN Gang, et al. Conveyance leveling control strategy of double-rope winding deep well hoisting systems [J]. Journal of China Coal Society, 2020(12): 4228-4239.(in Chinese)

- [5] YANG D H, KIM K Y, KWAK M K, et al. Dynamic modeling and experiments on the coupled vibrations of building and elevator ropes [J]. Journal of Sound and Vibration, 2017, 390: 164-191.
- [6] CRESPO R S, KACZMARCZYK S, PICTON P, et al. Modelling and simulation of a stationary high-rise elevator system to predict the dynamic interactions between its components [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2018, 137: 24-45.
- [7] WANG J J, CAO G H, ZHU Z C, et al. Lateral response of cable-guided hoisting system with timevarying length: theoretical model and dynamics simulation verification[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers (Part C): Journal of Mechanical Engineering Science, 2014, 229 (16): 2908-2920.
- [8] WANG J, PI Y J, HU Y M, et al. Modeling and dynamic behavior analysis of a coupled multi-cable double drum winding hoister with flexible guides [J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 108: 191-208.
- [9] WANG Y D, CAO G H, ZHU Z C, et al. Longitudinal response of parallel hoisting system with time-varying rope length [J]. Journal of Vibroengineering, 2014, 16(8): 4088-4101.
- [10] VAN-HORSSEN H W T. PISCHANSKYY O V, DUBBELDAM J L A. On the forced vibrations of an oscillator with a periodically time-varying mass [J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329 (6) : 721-732.
- [11] VAN-HORSSEN W T, PISCHANSKYY O V. On the stability properties of a damped oscillator with a periodically time-varying mass[J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, 330(13): 3257-3269.
- [12] 黄家海,贺亚彬,于培,等.落地式摩擦提升机建模和振动特性分析[J].机械工程学报,2019,55(12):205-214.

HUANG Jiahai, HE Yabin, YU Pei, et al. Modeling and vibration characteristics of ground mounted friction hoist [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(12): 205-214.(in Chinese)

- [13] WANG L, CAO G H, WANG N G, et al. Modeling and dynamic behavior analysis of rope-guided traction system with terminal tension acting on compensating rope [J]. Shock and Vibration, 2019, 2019 (1): 6362198.
- [14] 朱真才, 沈刚, 丁兴亚, 等. 摩擦式提升机钢丝绳鲁棒 纵向振动抑制[J]. 振动、测试与诊断, 2020, 40(5): 835-840.

ZHU Zhencai, SHEN Gang, DING Xingya, et al. Robust longitudinal vibration suppression of steel wire rope of friction hoist[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2020, 40(5): 835-840.(in Chinese)

- [15] KACZMARCZYK S, OSTACHOWICZ W. Transient vibration phenomena in deep mine hoisting cables (part 1): mathematical model [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 262(2): 219-244.
- [16] KACZMARCZYK S, OSTACHOWICZ W. Transient vibration phenomena in deep mine hoisting cables (part 2): numerical simulation of the dynamic response [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 262 (2): 245-289.
- [17] 吴娟,寇子明,王有斌.落地式多绳摩擦提升系统动态特性研究[J].煤炭学报,2015(增刊1):252-258.
  WU Juan, KOU Ziming, WANG Youbin. Research on dynamic characteristics of floored multi-rope friction hoisting system [J]. Journal of China Coal Society, 2015(supp1):252-258.(in Chinese)
- [18] WANG Y, CAO G. VAN HORSSEN W T. Dynamic simulation of a multi-cable driven parallel suspension platform with slack cables [J]. Mechanism & Machine Theory, 2018, 126: 329-343.
- [19] FAN W, ZHU W D. Dynamic analysis of an elevator traveling cable using a singularity-free beam formulation
   [J]. Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, 2017, 84(4): 044502.
- [20] LEONARD M. Principles and techniques of vibrations[M]. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1997: 542-544.



第一作者简介:王彦栋,男,1990年3月生, 博士、讲师。主要研究方向为矿井提升系 统装备设计、动力学分析与控制系统。 E-mail:wangyandong@tyut.edu.cn