◀专家论坛▶

DOI:10.16450/j.cnki.issn.1004-6801.2025.03.001

# 耦合激励下行星滚柱丝杠非线性振动研究*

莫 帅[1,2,3]， 吴生阳[1,2]， 张燕琛[1,2]， 赵新浩[4]， 陈素姣[5]， 张 伟[1]

（1.广西大学特色金属材料与组合结构全寿命安全国家重点实验室 南宁，530004）
（2.广西大学机械工程学院 南宁，530004）
（3.华中科技大学智能制造装备与技术全国重点实验室 武汉，430074）
（4.中国航发中传机械有限公司 长沙，410200）
（5.柳工柳州传动件有限公司 柳州，545007）

**摘要** 针对现有行星滚柱丝杠刚体模型忽略螺纹弹性变形及齿轮啮合激励耦合效应的局限，构建了融合齿轮啮合激励以及螺纹变形的动载荷分布模型。首先，阐明了啮合激励对螺纹副瞬态接触行为的作用机制，并据此推导出齿轮啮合振动和螺纹轴向振动微分方程；其次，采用小波变换、相图和庞加莱截面等时频分析技术研究系统动态响应，揭示了在不同外部载荷频率下的分岔演化模式；最后，对系统行为进行全局分析，以研究初始条件对系统响应的影响，为理解系统的整体动态演化奠定了基础。结果表明，齿轮和螺纹啮合之间的耦合相互作用会引起明显的非线性动态行为，并且齿轮副系统对初始状态的依赖性更强。

**关键词** 行星滚柱丝杠；非线性动力学；螺纹变形；分岔与混沌；全局特性
**中图分类号** TH113.1

## 引 言

行星滚柱丝杠(planetary roller screw mechanism，简称PRSM)是一种高精度传动装置，通过螺纹啮合实现旋转与直线运动转换。其具有体积小、噪声低、承载强、速度快和寿命长等优势，在飞行器舵面控制、高精度机床及人形机器人等方面具有广阔应用前景，特别在人形机器人直线关节中具有关键作用。然而，由于结构复杂及运动特性具有明显非线性，其动态响应与振动特性对工况变化高度敏感，因此深入研究PRSM的非线性动力学特性是实现机器人精密控制与系统优化的重要课题。

目前，PRSM研究主要聚焦于结构参数优化设计[1]、接触机理与特性分析[2]以及运动学与动力学行为研究。研究表明，其载荷传递性能显著取决于接触状态[3]。相关研究涉及接触几何与运动学特性[4-5]，例如：局部功率耗散机制[6]、基于共轭接触的滑动速度分析及其受装配误差与几何参数的影响[7]，以及特定导程下的滚动行为稳定性[8]。为了深入理解力学行为，文献[9]基于赫兹接触与螺纹变形构建了力学模型，揭示了力学误差与载荷分布对性能的影响机制。

现有动力学模型多基于刚体假设，忽略弹性变形，据此建立螺旋曲面及螺纹接触方程。Fu等[10]针对含轴向载荷及误差的PRSM，建立了载荷分配模型及非线性六自由度动力学模型。Mo等[11]构建了综合考虑时变啮合刚度、侧隙、传动误差和螺纹摩擦的复杂非线性模型。然而，PRSM实际工况主要承受轴向载荷，系统部件普遍存在弹性变形[12]。这种变形导致接触点偏移，会引起接触状态的改变，从而对传动系统的精度与效率产生影响。此外，现有研究多聚焦于螺纹接触的静态分析，对齿轮副同步啮合动态接触特性及参数耦合效应的研究较少。许千斤等[13]提出了一种计入惯性力与啮合激励的螺纹副动载荷分布计算方法。在齿轮系统动力学领域，Mo等[14]建立了考虑时变啮合刚度、齿侧间隙及偏心误差的非线性动力学模型。莫帅等[15]构建了包含轴承滚动体变形、齿侧间隙与综合传递误差的模型，探究了参数对振动的影响。

笔者分析了螺纹弹性变形及齿轮副啮合激励对

* 广西杰出青年科学基金资助项目(2025GXNSFFA069016)；广西科技重大专项基金资助项目(AA24263074，AA23073019)；国家自然科学基金资助项目(52265004)；智能制造装备与技术全国重点实验室开放课题资助项目(IMETKF2025021)；中国航空发动机集团科技创新平台资助项目(CXPT-2023-044)
收稿日期：2025-05-21；修回日期：2025-06-04

载荷分布与系统动力学的影响，通过引入齿轮副啮合激励，结合螺纹副动载荷分布模型，构建了系统振动微分方程，并通过数值分析揭示其动力学响应特性，为其复杂激励下的非线性行为表征提供理论依据。

# 1 行星滚柱丝杠运动及受力分析

建立如图1所示的行星滚柱丝杠结构及坐标系来描述机构中各零件运动。全局坐标系 $O$-$xyz$ 固定在空间中，原点 $O$ 位于丝杠左端。局部坐标系 $O_p$-$x_p y_p z_p$ 固定在保持架的左端中心，随其旋转而同步转动。坐标系 $O_{pr}$-$x_{pr} y_{pr} z_{pr}$ 的原点位于每个滚柱中心，该坐标系与 $O_p$-$x_p y_p z_p$ 保持轴向平行。

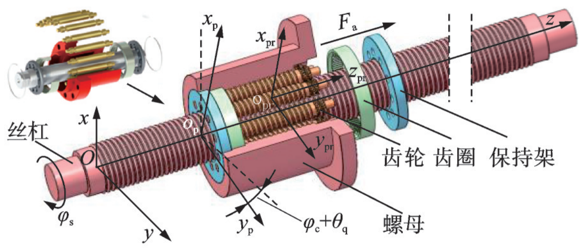



图1 行星滚柱丝杠结构及坐标系

Fig.1 Structure and coordinate system of PRSM

当丝杠角速度为 $\omega_s$ 时，螺母输出轴向速度为

$$v_N = \frac{p}{2\pi}\omega_S \tag{1}$$

其中：$p$ 为螺距；下标 N 表示螺母。

螺母轴向位移 $x_N$ 与丝杠转角 $\varphi_s$ 的关系为

$$x_N = \frac{p}{2\pi}\varphi_S \tag{2}$$

同时，螺母在轴向移动时，滚柱在其内部进行滚动，并且保持与螺母相同的轴向速度。

## 1.1 螺纹啮合弹性变形

螺纹在载荷作用下产生的主要变形形式包括：螺纹牙在接触力作用下产生的弯曲与剪切变形、螺纹轴段因拉压应力产生的轴向变形以及接触点的局部法向接触变形。螺纹牙受力变形形式如图2所示。

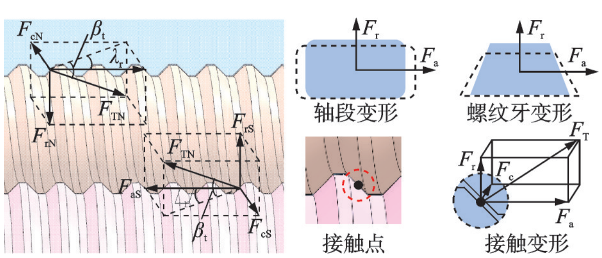



图2 螺纹牙受力变形形式

Fig.2 Thread deformation form

如图3所示，在载荷作用下，螺纹牙会产生多种形式的变形。径向载荷 $F_r$ 引起的径向压缩变形记为 $\delta_r^i$；轴向载荷则引发螺纹牙的弯曲与剪切变形记为 $\delta_{bend}^i$，同时牙根处的剪切变形及倾斜变形分别表现为 $\delta_{cut}^i$ 与 $\delta_{tilt}^i$。

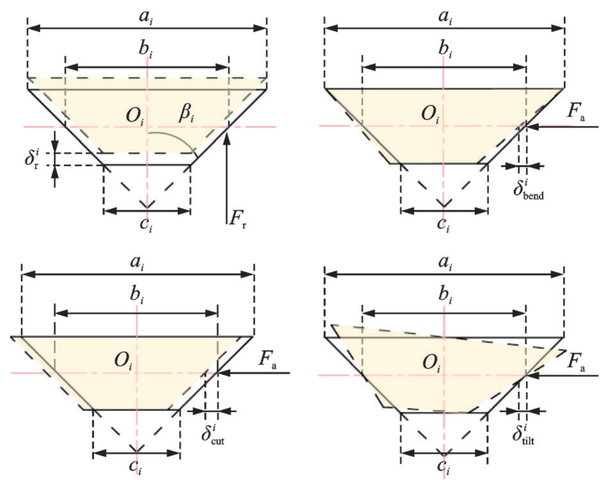


图3 螺纹牙变形

Fig.3 Thread deformation

由径向力引起丝杠或滚柱的螺纹牙变形[13]公式为

$$\delta_r^i = (1-\mu)\frac{F_r}{E}\frac{D_i}{p}\frac{1}{2}\tan^2\beta_i \tag{3}$$

其中：$i$ 取 S 或 R，分别表示丝杠或滚柱；$\mu$ 为泊松比；$D_i$ 为螺纹大径；$\beta_i$ 为螺纹牙侧角；$E$ 为弹性模量；下标 r 表示径向。

由径向力引起的螺母螺纹牙变形公式为

$$\delta_r^N = \left(\frac{D_N^2 + d_N^2}{D_N^2 - d_N^2} + \mu\right)\frac{F_r}{E}\frac{d_N}{p}\frac{1}{2}\tan^2\beta_N \tag{4}$$

其中：$D_N$ 为螺母大径；$d_N$ 为螺母小径。

轴向载荷引起的轴向总变形可视为螺纹牙在受力过程中因牙型几何特性所产生的弯曲、剪切、牙根倾斜及剪切等变形效应的综合结果。

$$\delta_a^i = \delta_{bend}^i + \delta_{cut}^i + \delta_{tilt}^i \tag{5}$$

其中：下标 a 表示轴向。

$$\begin{aligned}\delta_{bend}^i = {} & \frac{3F_a(1-\mu)^2}{4E}\frac{\left[1-\left(2-\frac{b_i}{a_i}\right)+2\ln\left(\frac{b_i}{a_i}\right)\right]}{\tan^3\beta_i} - \\ & \frac{3F_a(1-\mu)^2}{4E}\left(\frac{b_i}{a_i}\right)^2 4\tan\beta_i + \\ & \frac{6F_a(1+\mu)}{5E\tan^3\beta_i}\ln\left(\frac{b_i}{a_i}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

$$\delta_{cut}^i = \frac{12F_a(1-\mu^2)c_i}{\pi E a_i^2}\left(c_i - \frac{b_i\tan\beta_i}{2}\right) \tag{7}$$

$$\delta_{\mathrm{tilt}}^{i}=\frac{2F_{\mathrm{a}}(1-\mu^{2})}{\pi E}\frac{p}{a_{i}}\ln\left(\frac{p+a_{i}/2}{p-a_{i}/2}\right)+\frac{2F_{\mathrm{a}}(1-\mu^{2})}{\pi E}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4p^{2}}{a_{i}^{2}}-1\right)\tag{8}$$

其中:$i$取S、R或N,分别表示丝杠、滚柱或螺母。

根据式(5)~(8),得到螺纹轴向刚度的计算式为

$$k_{iz}=F_{\mathrm{a}i}/\delta_{\mathrm{a}}^{i}\tag{9}$$

### 1.2　齿轮啮入激励和时变啮合刚度激励

在实际工况下,内啮合齿轮承受啮合激励发生弹性变形,导致滚柱齿轮的法向齿距$P_{\mathrm{R}}$小于内齿圈的法向齿距$P_{\mathrm{G}}$,从而引发啮合干涉,出现法向冲击速度,造成齿轮啮入冲击。图4中的$A$点即为冲击发生位置,该冲击可简化为两圆柱体间的法向碰撞,冲击速度等效为两齿之间的法向相对速度。

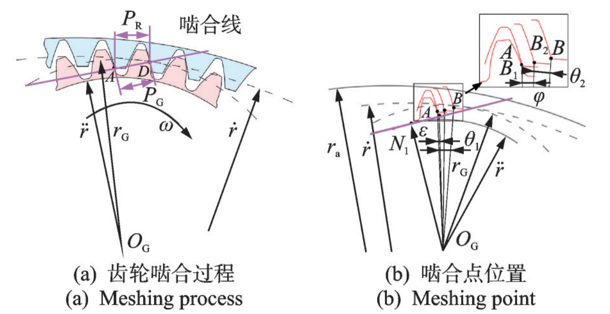



图4　齿轮副啮入冲击模型

Fig.4　Gear pair meshing impact

根据冲击力学理论,当齿轮副发生冲击时,齿轮齿面会产生一定的弹性变形,这个变形量达到最大值$\delta_{\max}$时,齿轮副在冲击过程中承受的冲击力也会随之增大,直到达到其峰值$F_{\max}$。冲击力最大值$F_{\max}$、变形量最大值$\delta_{\max}$及冲击能量$E$之间的关系式为

$$\begin{cases}\delta_{\max}=\dfrac{F_{\max}l}{b}\\ E=\dfrac{1}{2}\dfrac{m_{\mathrm{q}1}m_{\mathrm{q}2}}{m_{\mathrm{q}1}+m_{\mathrm{q}2}}v_{\mathrm{m}}^{2}=\dfrac{1}{2l}\delta_{\max}^{2}\end{cases}\tag{10}$$

其中:$m_{\mathrm{q}1}$、$m_{\mathrm{q}2}$为滚柱齿轮与内齿圈在瞬时啮合线方向上的等效质量;$l$为齿轮副在啮入冲击点的等效综合柔度,$l=l_1+l_2+l_{\mathrm{t}}$;$l_1$与$l_2$分别为齿轮与内齿圈在该点处的弯曲柔度;$l_{\mathrm{t}}$为接触柔度;下标m表示啮合;$b$为齿轮宽度。

由式(10)可得滚柱轮齿与内齿圈轮齿啮合最大冲击力的表达式为

$$F_{\max}=v_{\mathrm{m}}\sqrt{\frac{bI_{1}I_{2}}{(I_{1}\dot{r}_{\mathrm{R}}^{2}+I_{2}r_{\mathrm{G}}^{2})l}}\tag{11}$$

其中:下标G表示齿轮;$v_{\mathrm{m}}$为沿啮合线方向的冲击速度,$v_{\mathrm{m}}=v_{\mathrm{SG}}-v_{\mathrm{SR}}=\omega_{\mathrm{G}}r_{\mathrm{G}}-\omega_{\mathrm{R}}r'_{\mathrm{ring}}$;$v_{\mathrm{SG}}$、$v_{\mathrm{SR}}$分别为齿轮线速度$v_{\mathrm{G}}$、齿圈线速度$v_{\mathrm{ring}}$在瞬时啮合线方向的投影;$r'_{\mathrm{ring}}$为齿轮副啮合半径瞬时值,$r'_{\mathrm{R}}=a\cos(\alpha_{A}+\varepsilon+\theta_{1}+\alpha-\alpha_{B})-r_{\mathrm{G}}$;$\omega_{\mathrm{ring}}$、$\omega_{\mathrm{G}}$分别为齿圈和齿轮的角速度;$\alpha_{A}$、$\alpha_{B}$分别为啮合点$A$、$B$的压力角。

采用冲击力随时间变化的半正弦脉冲函数来表征碰撞冲击过程,则齿轮副在发生线外啮合时所产生的冲击力可表示为

$$F_{\mathrm{m}}(t)=F_{\mathrm{m}}\sin(\pi t/t_{\mathrm{m}})=F_{\mathrm{m}}\sin\omega_{\mathrm{m}}t\tag{12}$$

其中:$t_{\mathrm{m}}$为啮合冲击时间;$\omega_{\mathrm{m}}$为啮合冲击角速度,$\omega_{\mathrm{m}}=\pi/t_{\mathrm{m}}$。

在行星滚柱丝杠的齿轮副中,齿轮与齿圈之间的时变啮合刚度构成其主要内部激励源。为简化分析,将轮齿等效为固定在齿根圆上的悬臂梁模型。啮合刚度计算模型如图5所示。

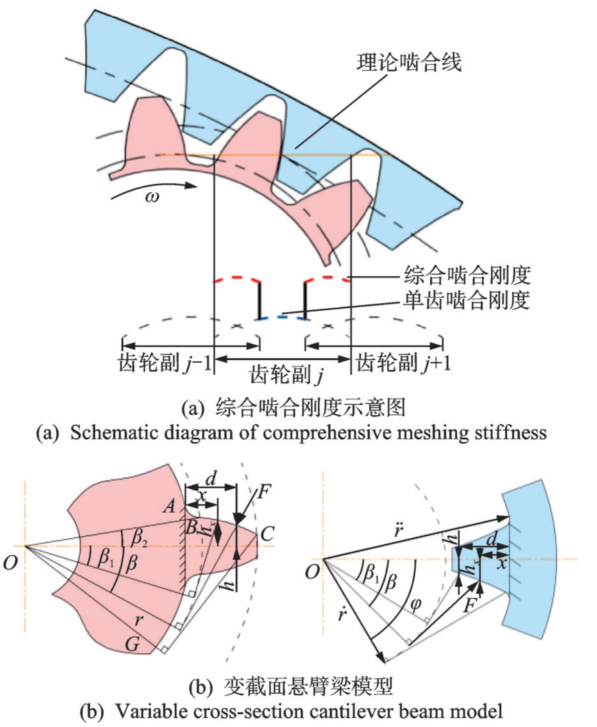



图5　啮合刚度计算模型

Fig.5　Meshing stiffness calculation model

齿轮副时变啮合刚度主要由接触刚度与弯曲刚度构成。在齿轮与内齿圈啮合过程中,由于重合度大于1,故啮合状态在单齿与双齿间交替变化。通过修正双齿啮合区基体刚度,来提高建模精度,进而得到时变啮合刚度$k_{\mathrm{m}}$为

$$k_{\mathrm{m}}=1/\left(\frac{1}{\xi_{\mathrm{G}}k_{\mathrm{G}}}+\frac{1}{k_{\mathrm{coin}}}+\frac{1}{\xi_{\mathrm{ring}}k_{\mathrm{ring}}}\right)\tag{13}$$

其中:$\xi_{\mathrm{G}}$与$\xi_{\mathrm{ring}}$分别为齿轮与齿圈的修正系数;$k_{\mathrm{G}}$、$k_{\mathrm{ring}}$为其相应的基体刚度;$k_{\mathrm{coin}}$为重合度对轮齿啮合对应的啮合刚度。

$k_{\mathrm{coin}}$的计算式为

$$k_{\mathrm{coin}}=\sum_{j=1}^{\gamma}k_{\mathrm{coin}}^{j}=\sum_{j=1}^{\gamma}1/\left(\frac{1}{k^{j}}+\frac{1}{k_{\mathrm{G}}^{j}}+\frac{1}{k_{\mathrm{ring}}^{j}}\right) \tag{14}$$

其中：$k_{\mathrm{coin}}^{j}$为第$j$对齿的啮合刚度；$k_{\mathrm{G}}^{j}$与$k_{\mathrm{ring}}^{j}$分别对应第$j$对齿的接触刚度，$k_{\mathrm{ring}}^{j}=1/\left(\frac{1}{k_{1}^{j}}+\frac{1}{k_{2}^{j}}+\frac{1}{k_{3}^{j}}\right)$，$k_{\mathrm{G}}^{j}=1/\left(\frac{1}{k_{4}^{j}}+\frac{1}{k_{5}^{j}}+\frac{1}{k_{6}^{j}}\right)$；$k^{j}$为赫兹接触刚度；$k_{4}^{j}$、$k_{5}^{j}$、$k_{6}^{j}$、$k_{1}^{j}$、$k_{2}^{j}$与$k_{3}^{j}$分别为齿轮与齿圈第$j$个齿的弯曲、剪切及轴向压缩刚度。

齿轮副啮合激励$F_{\mathrm{G}}$为

$$F_{\mathrm{G}}=k_{\mathrm{m}}(t)\left[y_{\mathrm{ring}}(t)-y_{\mathrm{G}}(t)\right] \tag{15}$$

其中：$y_{\mathrm{ring}}(t)$和$y_{\mathrm{G}}(t)$分别为内齿圈基圆和滚柱齿轮某点的振动位移。

### 1.3 齿轮啮合激励对螺纹动态接触力影响

图6为螺纹接触力示意图。图中：$O_{\mathrm{SR}}$表示滚柱与丝杠接触点；$r_{\mathrm{SR}}$与$r'_{\mathrm{SR}}$分别为滚柱侧与丝杠侧的啮合半径；$\theta_{\mathrm{SR}}$和$\theta'_{\mathrm{SR}}$为对应的啮合偏角。基于螺旋曲面啮合特性，笔者对滚柱与丝杠间的接触界面进行受力分析。

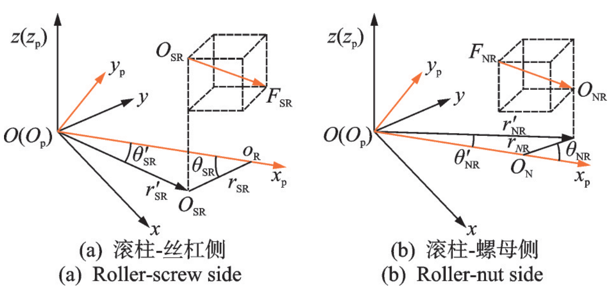



图6 螺纹接触力示意图

Fig.6 Contact force diagram of thread

对接触点螺旋曲面接触特性进行分析[12]，得到滚柱丝杠接触力为

$$F_{\mathrm{SR}}=\frac{f_{\mathrm{SR}}^{\max}\begin{bmatrix}\cos\theta_{\mathrm{SR}}\tan\beta_{\mathrm{SR}}-\sin\theta_{\mathrm{SR}}\tan\lambda_{\mathrm{SR}}\\-\sin\theta_{\mathrm{SR}}\tan\beta_{\mathrm{SR}}-\cos\theta_{\mathrm{SR}}\tan\lambda_{\mathrm{SR}}\\-1\end{bmatrix}}{\sqrt{1+\tan^{2}\lambda_{\mathrm{SR}}+\tan^{2}\beta_{\mathrm{SR}}}} \tag{16}$$

其中：$\beta_{\mathrm{SR}}$为接触点处的齿侧角；$\lambda_{\mathrm{SR}}$为接触点处的螺旋升角；$f_{\mathrm{SR}}^{\max}$为接触力最大值。

同理可推出滚柱-螺母侧接触力$F_{\mathrm{NR}}$。在综合考虑时变啮合激励以及啮入激励的条件下，丝杠与滚柱侧的接触力记为$f_{\mathrm{SR}}$，螺母与滚柱侧的接触力记为$f_{\mathrm{NR}}$，即

$$f_{\mathrm{SR}}=\begin{cases}f_{\mathrm{SR}}^{\max}+2F_{\mathrm{m}} & (0<t\leqslant t_{\mathrm{s}})\\ f_{\mathrm{SR}}^{\max}+2F_{\mathrm{G}} & (t_{\mathrm{s}}<t\leqslant t_{\mathrm{e}})\end{cases} \tag{17}$$

$$f_{\mathrm{NR}}=\begin{cases}f_{\mathrm{NR}}^{\max}+2F_{\mathrm{m}} & (0<t\leqslant t_{\mathrm{s}})\\ f_{\mathrm{NR}}^{\max}+2F_{\mathrm{G}} & (t_{\mathrm{s}}<t\leqslant t_{\mathrm{e}})\end{cases} \tag{18}$$

其中：$t_{\mathrm{e}}$为一对齿轮脱离啮合的时间；$t_{\mathrm{s}}$为啮入冲击时间。

在行星滚柱丝杠承受轴向载荷过程中，其螺纹牙发生相互接触并产生弹性变形。其中，某2组相邻的螺纹接触对，连同各自螺纹轴段，共同构成一个闭合的螺纹传力环路。该环路中，2对接触螺纹满足轴向上的变形协调条件。图7为某一轴段螺纹牙变形协调关系示意图。

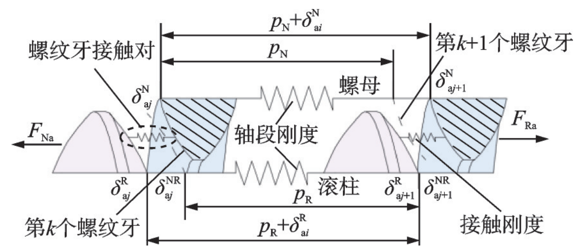



图7 螺纹牙变形协调关系示意图

Fig.7 Schematic diagram of thread deformation coordination relationship

在第$i$个螺纹闭环中，丝杠、滚柱与螺母对应的轴段可视为位于第$j$与第$j+1$螺纹牙之间的基体区域。根据变形协调条件，滚柱变形量等于螺母变形量，即

$$p_{\mathrm{N}}+\sum\delta_{ai}^{\mathrm{N}}=p_{\mathrm{R}}+\sum\delta_{ai}^{\mathrm{R}} \tag{19}$$

其中：$p_{\mathrm{N}}$与$p_{\mathrm{R}}$分别为螺母与滚柱的螺距。

螺母的轴向变形量$\sum\delta_{ai}^{\mathrm{N}}$以及滚柱的轴向变形量$\sum\delta_{ai}^{\mathrm{R}}$的计算公式为

$$\begin{cases}\sum\delta_{ai}^{\mathrm{N}}=\delta_{aj}^{\mathrm{N}}+\delta_{aj+1}^{\mathrm{N}}+\delta_{aj+1}^{\mathrm{NR}}\\ \sum\delta_{ai}^{\mathrm{R}}=\delta_{aj}^{\mathrm{R}}+\delta_{aj+1}^{\mathrm{R}}+\delta_{aj}^{\mathrm{NR}}\end{cases} \tag{20}$$

其中：$\delta_{aj}^{\mathrm{N}}$与$\delta_{aj}^{\mathrm{R}}$分别为螺母与滚柱第$j$个螺纹牙的轴向变形；$\delta_{aj+1}^{\mathrm{N}}$与$\delta_{aj+1}^{\mathrm{R}}$分别为螺母与滚柱在第$j+1$个螺纹牙的轴向变形；$\delta_{aj}^{\mathrm{NR}}$与$\delta_{aj+1}^{\mathrm{NR}}$分别为滚柱与螺母接触侧相邻两螺纹牙的轴向接触变形。

滚柱-螺母侧轴向运动状态下的动载荷分布方程为

$$\frac{\sum_{j=1}^{i}f_{\mathrm{NR}j}}{k_{\mathrm{Na}}}+\frac{f_{\mathrm{NR}i}-f_{\mathrm{NR}i+1}}{k_{\mathrm{Nz}}}+\frac{f_{\mathrm{NR}i}}{k_{\mathrm{NRa}}}=\frac{f_{\mathrm{NR}i+1}-f_{\mathrm{NR}i}}{k_{\mathrm{Rz}}}+\frac{f_{\mathrm{NR}i+1}}{k_{\mathrm{NRa}}}+\frac{\sum_{j=0}^{\lceil i/2\rceil}(f_{\mathrm{NR}j}-f_{\mathrm{SR}j})+f_{\mathrm{NR}(\lceil i/2\rceil+1)}}{k_{\mathrm{Ra}}}+\frac{\sum_{j=0}^{\lceil i/2\rceil}(f_{\mathrm{NR}j}-f_{\mathrm{SR}j})}{k_{\mathrm{Ra}}} \tag{21}$$

同理，滚柱-丝杠侧螺纹副动载荷分布方程为

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} f_{\mathrm{SR}j}-\sum_{j=1}^{i} f_{\mathrm{SR}j}}{k_{\mathrm{Sa}}}+\frac{f_{\mathrm{SR}i+1}-f_{\mathrm{SR}i}}{k_{\mathrm{Sz}}}+\frac{f_{\mathrm{SR}i+1}}{k_{\mathrm{SRa}}}=\frac{f_{\mathrm{SR}i}}{k_{\mathrm{SRa}}}+\frac{f_{\mathrm{SR}i}-f_{\mathrm{SR}i+1}}{k_{\mathrm{Rz}}}+\frac{2\sum_{j=0}^{\lceil i/2\rceil}(f_{\mathrm{NR}j}-f_{\mathrm{SR}j})+f_{\mathrm{NR}(\lceil i/2\rceil+1)}}{k_{\mathrm{Ra}}} \tag{22}$$

其中：$k_{ia}$、$k_{iz}$ 分别为螺纹轴段刚度和螺纹牙刚度；$k_{\mathrm{NRa}}$、$k_{\mathrm{SRa}}$ 分别为螺母-滚柱侧、丝杠-滚柱侧螺纹轴向接触刚度；$f_{\mathrm{NR}j}$、$f_{\mathrm{SR}j}$ 分别为第 $j$ 个螺纹牙上螺母-滚柱侧、丝杠-滚柱侧轴向接触力。

结合式(19)～(22)，采用表 1 所示的行星滚柱丝杠结构参数，得到考虑齿轮副啮入激励和时变啮合激励下的接触力 $f_{\mathrm{SR}}$ 和 $f_{\mathrm{NR}}$，以及螺纹副动载荷分布。齿轮啮合作用下的螺纹副动态接触力如图 8 所示。忽略齿轮副影响的螺纹副载荷分布如图 9 所示。齿轮啮合激励作用下的螺纹副动载荷分布如图 10 所示。

**表 1　行星滚柱丝杠结构参数**

**Tab.1　Structural parameters of PRSM**

| 参数 | 丝杠 | 螺母 | 滚柱 |
|---|---|---|---|
| 中径 $d_i$/mm | 25 | 45 | 10 |
| 螺距 $p$/mm | 2.5 | 2.5 | 2.5 |
| 螺纹头数 | 5 | 5 | 1 |
| 螺纹长度/mm | 100 | 25 | 20 |
| 牙侧角 $\beta$/(°) | 45 | 45 | 45 |
| 齿数 | — | — | 20 |
| 模数/mm | — | — | 0.5 |

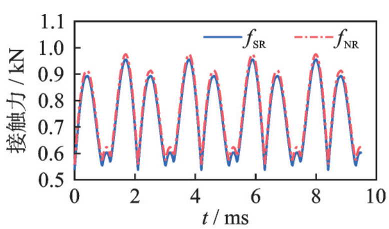



图 8　齿轮啮合作用下的螺纹副动态接触力

Fig.8　Dynamic contact force of threaded pair under gear meshing

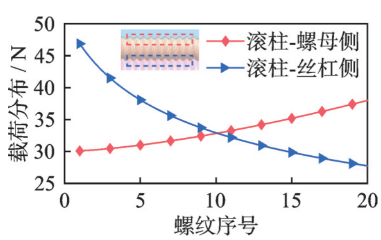



图 9　忽略齿轮副影响的螺纹副载荷分布

Fig.9　Load distribution of thread pair ignoring the influence of gear pair

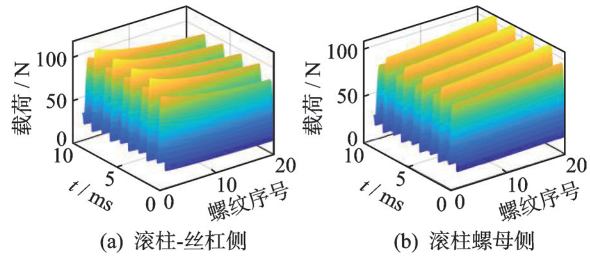



图 10　齿轮啮合激励作用下的螺纹副动载荷分布

Fig.10　Dynamic load distribution of threaded pair under gear meshing excitation

## 2　行星滚柱丝杠动力学建模

图 11 为行星滚柱丝杠系统动力学模型。为简化计算，只考虑丝杠、滚柱与螺母螺纹之间的库伦摩擦，忽略了保持架与滚柱之间以及保持架与内齿圈之间的摩擦，且每个滚柱的受力和运动状态相同。

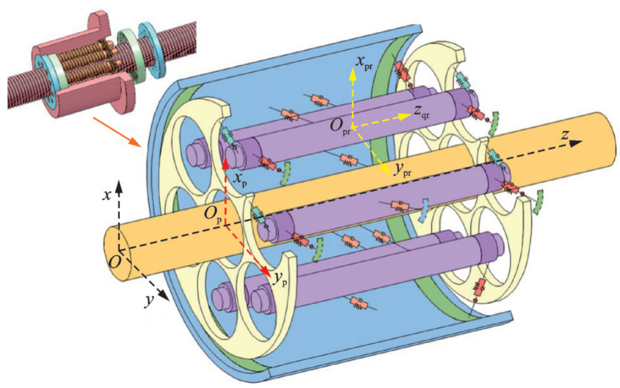


图 11　行星滚柱丝杠系统动力学模型

Fig.11　Dynamic model of PRSM

在齿轮传动过程中，为防止因齿轮轮齿直接接触摩擦导致的热膨胀，齿廓之间必须保留一定的间隙。为了精确描述齿侧间隙对齿轮啮合过程中的动力学行为的影响，引入间隙函数

$$h(x)=\begin{cases} x-b_{\mathrm{m}} & (x>b_{\mathrm{m}}) \\ 0 & (|x|<b_{\mathrm{m}}) \\ x+b_{\mathrm{m}} & (x<-b_{\mathrm{m}}) \end{cases} \tag{23}$$

其中：$b_{\mathrm{m}}$ 为齿侧间隙值的一半。

根据集中质量法，考虑滚柱和螺母在 $x$，$y$ 方向、绕自身轴线的振动位移以及丝杠在 $z$ 轴方向的振动位移。系统考虑 12 个自由度，据此可将广义坐标写为

$$\boldsymbol{X}=[z_{S}, x_{pn}, y_{pn}, z_{pn}, u_{pn}, x_{c}, y_{c}, u_{c}, x_{r}, y_{r}, y_{r}, u_{r}]$$
$$(n=1,2,\cdots,n_{roller}) \tag{24}$$

其中：下标 pn 表示第 $n$ 个滚柱轴端齿轮；下标 c 表示保持架；$u$ 为绕回转轴的振动角位移。

根据上述动力学模型，得到丝杠动力学微分方程为

$$m_{S}\frac{d^2 z_{S}}{dt^2}+c_{Sz}\frac{dz_{S}}{dt}+k_{Sz}z_{S}+f_{SR}+M_{Sqz}=0 \tag{25}$$

滚柱动力学微分方程为

$$\begin{cases} m_{q}\left(\frac{d^2 x_{pn}}{dt^2}-2\omega_{q}\frac{dy_{pn}}{dt}-\omega_{q}^2 x_{pn}\right)+J_{Sqx}+J_{rqx}+ \\ \quad M_{Sqx}+M_{rqx}-k_{qx}\delta_{rn}\sin\phi_{rn}-k_{qx}\delta_{cnx}-c_{qx}\frac{d\delta_{xn}}{dt}=0 \\ m_{q}\left(\frac{d^2 y_{pn}}{dt^2}+2\omega_{q}\frac{dx_{pn}}{dt}-\omega_{q}^2 y_{pn}\right)+J_{Sqy}+J_{rqy}+ \\ \quad M_{Sqy}+M_{rqy}-k_{qy}\delta_{rn}\cos\phi_{rn}-k_{qy}\delta_{cny}-\frac{c_{qy}d\delta_{yn}}{dt}=0 \\ m_{q}\frac{d^2 z_{pn}}{dt^2}+c_{qz}\frac{d\delta_{zn}}{dt}+k_{qz}\delta_{zn}+f_{SR}+f_{NR}=0 \\ \frac{I_{q}}{r_{q}^{2}}\frac{d^2 u_{pn}}{dt^2}-k_{qu}\delta_{rn}-\frac{c_{qu}d\delta_{un}}{dt}-\frac{T_{in}}{r_{q}}=0 \end{cases} \tag{26}$$

保持架动力学微分方程为

$$\begin{cases} m_{c}\left(\frac{d^2 x_{c}}{dt^2}-2\omega_{q}\frac{dy_{c}}{dt}-\omega_{q}^2 x_{c}\right)+\sum_{n=1}^{n_r}k_{qx}\delta_{cnx}+ \\ \quad k_{cx}x_{c}+c_{cx}\frac{dx_{c}}{dt}=0 \\ m_{c}\left(\frac{d^2 y_{c}}{dt^2}+2\omega_{q}\frac{dx_{c}}{dt}-\omega_{q}^2 y_{c}\right)+\sum_{n=1}^{n_r}k_{qy}\delta_{cny}+ \\ \quad k_{cy}y_{c}+c_{cy}\frac{dy_{c}}{dt}=0 \\ (I_{c}/r_{c}^{2})\frac{d^2 u_{c}}{dt^2}+\sum_{n=1}^{n_r}k_{qu}\delta_{cnu}+k_{cu}u_{c}+c_{cu}\frac{du_{c}}{dt}=0 \end{cases} \tag{27}$$

螺母动力学微分方程为

$$\begin{cases} m_{nr}\left(\frac{d^2 x_{nr}}{dt^2}-2\omega_{q}\frac{dy_{nr}}{dt}-\omega_{q}^2 x_{nr}\right)+J_{rqx}+M_{rqx}- \\ \quad \sum_{n=1}^{n_r}k_{rx}\delta_{rn}\sin\phi_{rn}+k_{rx}x_{r}+c_{rx}\frac{dx_{nr}}{dt}=0 \\ m_{nr}\left(\frac{d^2 y_{nr}}{dt^2}+2\omega_{q}\frac{dx_{nr}}{dt}-\omega_{q}^2 y_{nr}\right)+J_{rqy}+M_{rqy}+ \\ \quad \sum_{n=1}^{n_r}k_{ry}\delta_{rn}\cos\phi_{rn}+k_{ry}y_{r}+c_{ry}\frac{dy_{nr}}{dt}=0 \\ m_{nr}\frac{d^2 z_{nr}}{dt^2}+c_{rz}\frac{dz_{nr}}{dt}+k_{rz}z_{nr}+f_{NR}=0 \\ \frac{I_{nr}d^2 u_{nr}}{r_{nr}^{2}dt^2}-\sum_{n=1}^{2}k_{ru}\delta_{rn}+k_{ru}u_{nr}+c_{ru}\frac{du_{nr}}{dt}-\frac{T_{out}}{r_{nr}}=0 \end{cases} \tag{28}$$

其中：$J_{sq}$、$J_{rq}$ 分别为丝杠-滚柱、螺母-滚柱侧接触力及齿轮啮合力的合力；$M_{sq}$、$M_{rq}$ 分别为滚柱-丝杠、螺母-滚柱侧摩擦力，摩擦力公式可参考文献[14]；下标 $x$，$y$ 分别表示在 $x$，$y$ 方向。

$\delta_{rn}$ 为齿轮相对于内齿圈的位移沿啮合线上的投影，表达式为

$$\delta_{rn}=(x_{pn}-x_{r})\sin\phi_{rn}+(y_{r}-y_{pn})\cos\phi_{rn}+u_{r}+ \\ u_{n}+\gamma_{rn}(t) \tag{29}$$

上述振动微分方程求解过程中，各参数数量级相差较大，可能导致求解迟滞、求解精度低甚至求解错误等问题。因此，引入 $b_m$ 与 $\omega$ 对方程进行无量纲化处理。令 $\tau=\omega t$，即

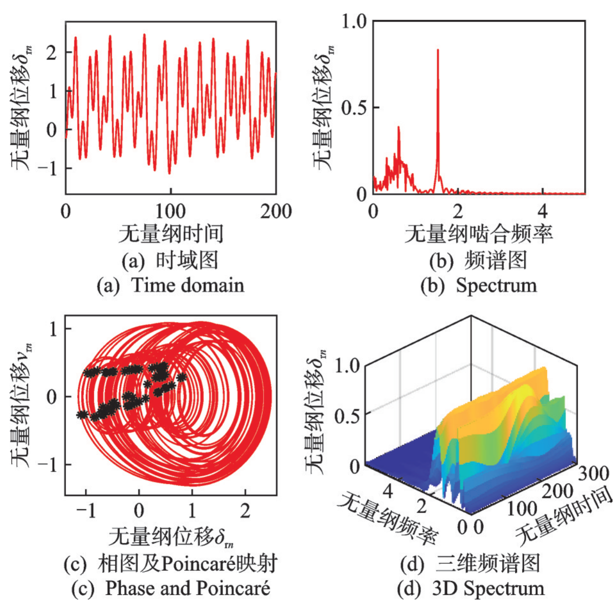
$$\omega=\sqrt{k_{m}\left(\frac{1}{m_{q}}+\frac{1}{m_{nr}}\right)} \tag{30}$$

其中：$m_q$、$m_{nr}$ 分别为滚柱与螺母质量。

## 3 行星滚柱丝杠系统动态响应

为分析系统非线性振动响应随着外部负载激励频率 $\omega_e$（$\omega_e=\omega_s/\omega$，$\omega_s$ 为丝杠转速）的变化规律，对微分方程进行求解，得到系统的振动响应。

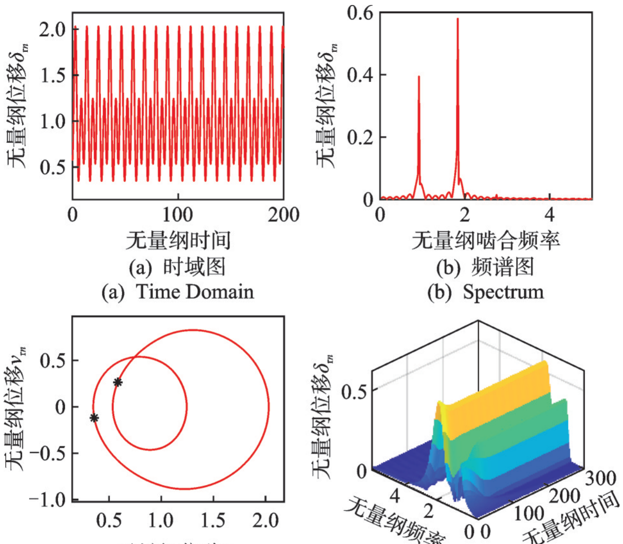
图 12、13 分别为 $\omega_e=0.96$ 和 $\omega_e=1.15$ 时齿轮副啮合位移振动响应。当 $\omega_e=0.96$ 时，系统处于混沌状态，表现为时域响应无明显周期性、频谱中低频成分丰富、相图轨迹杂乱且 Poincaré 截面呈离散分布，反映出系统高度非线性特性。当 $\omega_e=1.15$ 时，系统转入周期 2 运动，时域图表现出稳定的双周期特征，




(a) 时域图 (a) Time domain
(b) 频谱图 (b) Spectrum
(c) 相图及Poincaré映射 (c) Phase and Poincaré
(d) 三维频谱图 (d) 3D Spectrum

图 12　$\omega_e=0.96$ 时齿轮副啮合位移振动响应

Fig.12　Gear vibration displacement when $\omega_e=0.96$



(a) 时域图
(a) Time Domain
(b) 频谱图
(b) Spectrum
(c) 相图及Poincaré映射
(c) Phase and Poincaré
(d) 三维频谱图
(d) 3D Spectrum

图 13　$\omega_e=1.15$时齿轮副啮合位移振动响应

Fig.13　Gear vibration displacement when $\omega_e=1.15$

频谱中仅存在 2 个主频成分，Poincaré 截面呈现 2 个集中点，系统动力学行为趋于有序。图 12、13 表明，齿轮副振动响应受激励频率 $\omega_e$影响显著。三维频谱进一步验证了啮合频率随激励变化的分布特性。

图 14 为滚柱沿啮合线 $\delta_{rn}$频率-位移分岔图。系统随着激励频率 $\omega_e$的变化呈现典型的非线性动力学演化过程：在 $\omega_e$=0.76 处经倍周期分岔进入混沌状态，于 $\omega_e$=1.08 跃迁至周期 2 运动，并最终在 $\omega_e$=1.20 恢复为稳定的周期运动。

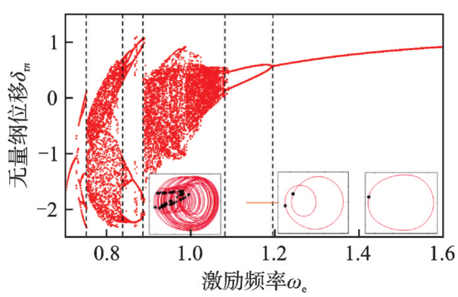
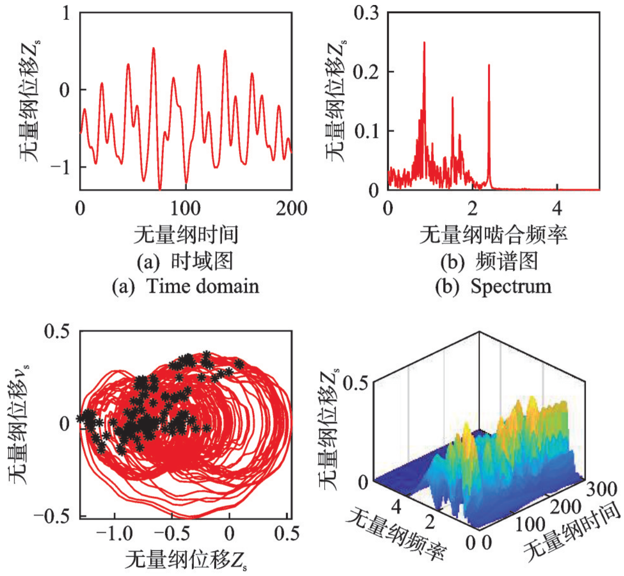


图 14　滚柱沿啮合线 $\delta_{rn}$频率-位移分岔图

Fig.14　Frequency-displacement bifurcation diagram of roller along meshing line $\delta_{rn}$

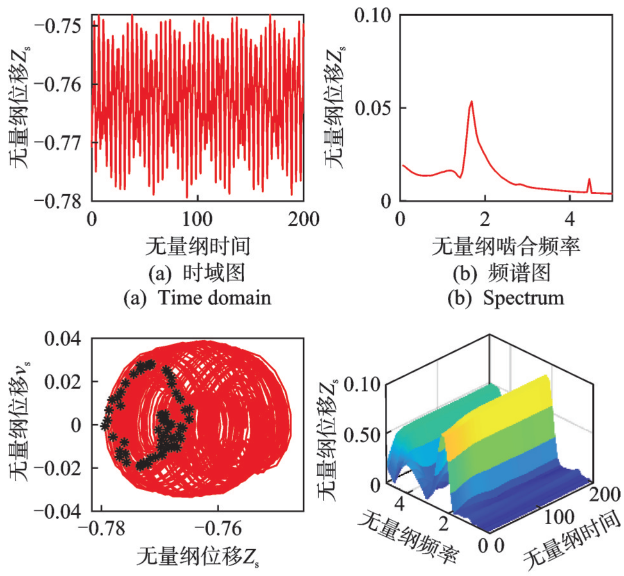
图 15、16 分别为 $\omega_e$=0.75 时和 $\omega_e$=1.4 时丝杠轴向位移振动响应。图 17 为丝杠轴向位移振动频率-位移分岔图。可见，其表现出与齿轮副相似的响应规律，系统由混沌转入倍周期分岔，最终进入准周期运动，但是丝杠轴向振动更小，分岔演化更为简单。



(a) 时域图
(a) Time domain
(b) 频谱图
(b) Spectrum
(c) 相图及Poincaré映射
(c) Phase and Poincaré
(d) 三维频谱图
(d) 3D Spectrum

图 15　$\omega_e=0.75$时丝杠轴向位移振动响应

Fig.15　Screw axial vibration displacement when $\omega_e=0.75$



(a) 时域图
(a) Time domain
(b) 频谱图
(b) Spectrum
(c) 相图及Poincaré映射
(c) Phase and Poincaré
(d) 三维频谱图
(d) 3D Spectrum

图 16　$\omega_e=1.4$时丝杠轴向位移振动响应

Fig.16　Screw axial vibration displacement when $\omega_e=1.4$

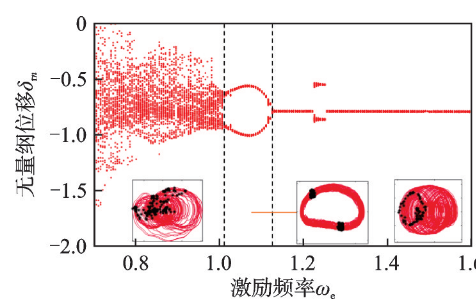


图 17　丝杠轴向位移振动频率-位移分岔图

Fig.17　Vibration frequency-displacement bifurcation diagram of screw axial displacement

## 4　行星滚柱丝杠系统全局特性分析

全局性态分析主要研究非线性系统长时间历程后稳态响应对系统初态的依赖性，以及动力学系统参数变化对稳态响应的影响。图 18 为齿轮副沿啮合线振动位移全局分岔图，展示了齿轮副在激励频率 $\omega_e \in (0.7, 1.6)$ 区间内的全局分岔特性，不同颜色代表不同吸引子类型。其中：$P_1$ 表示单周期运动；$P_2$ 表示周期 2 响应；PN 表示混沌行为。结果表明：在 $\omega_e \in (0.7, 0.89) \cup (1.19, 1.6)$ 范围内，系统响应相对稳定，分岔结构变化一致；在 $\omega_e \in (0.89, 0.96)$ 区间，$P_3$ 与混沌响应共存；$\omega_e \in (0.96, 1.09)$ 时，系统呈现多种复杂响应共存态；而在 $\omega_e \in (1.12, 1.16)$ 区间内，则主要表现为 $P_2$ 与 $P_3$ 并存的周期运动。上述结果揭示了系统在不同激励频率下显著的多稳态与非线性演化特征。

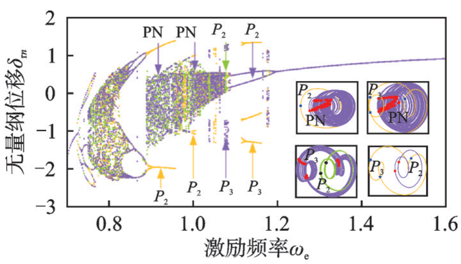



图 18　齿轮副沿啮合线振动位移全局分岔图

Fig.18　Global bifurcation diagram of gear vibration displacement

图 19 为滚柱沿轴向振动全局分岔图，展示了当 $\omega_e \in (0.7, 1.6)$ 时丝杠沿轴向等效位移全局分岔特性。当系统激励频率在 $\omega_e \in (0.7, 1.16) \cup (1.33, 1.6)$ 范围内时，多条分岔曲线的变化趋于一致。当激励频率 $\omega_e \in (1.18, 1.28)$ 时，系统表现出 2 种类型的 $P_2$ 响应；当激励频率 $\omega_e \in (1.28, 1.32)$ 时，系统同时存在 $P_1$ 和 $P_2$ 响应。

图 20、21 分别为齿轮副和丝杠轴向振动胞映射。可以看出，齿轮副和丝杠振动全局性态随着激励频率的变化情况，不同颜色区域对应不同响应状态。显然，随着激励频率的变化，齿轮副不同响应之间的边界更加复杂，吸引域的分形结构更加精细。

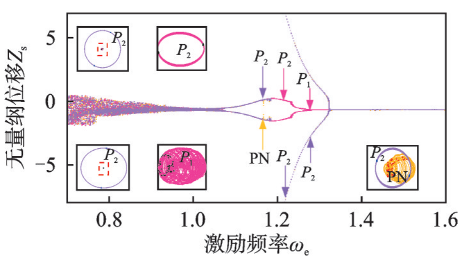



图 19　滚柱沿轴向振动全局分岔图

Fig.19　Global bifurcation diagram of roller vibration along axial direction

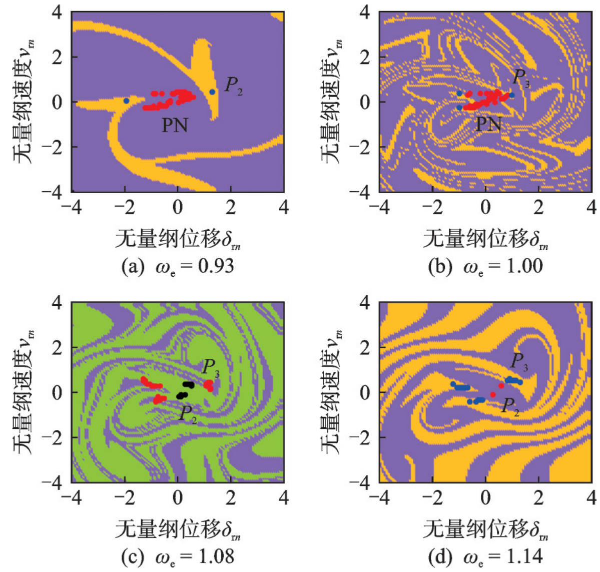



图 20　齿轮副振动胞映射

Fig.20　Gear vibration cell mapping

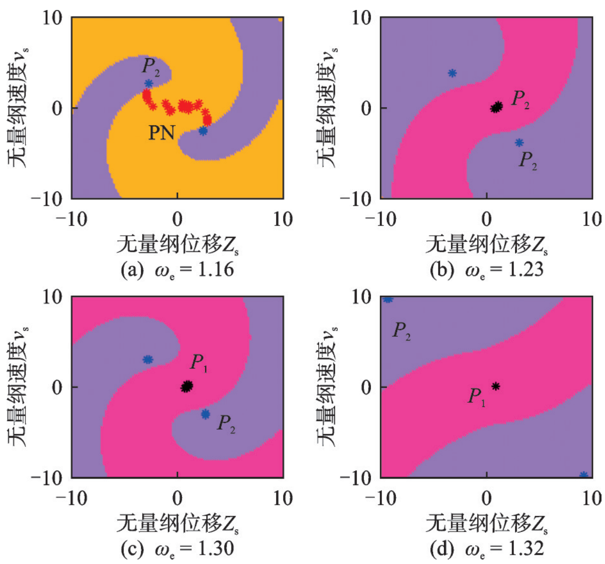



图 21　丝杠轴向振动胞映射

Fig.21　Screw axial vibration cell mapping

## 5　结　论

1）齿轮副啮合激励对螺纹副动载荷分布具有显著影响，导致滚柱-丝杠侧与滚柱-螺母侧各螺纹牙接触力呈周期性波动。同时，齿轮副非线性振动特性诱发丝杠轴向方向的非线性动力学响应。

2）在外部激励作用下，系统展现出典型的非线性动力学行为。在激励频率 $\omega_e \in (0.7, 1.6)$ 范围内，系统经历周期、倍周期及混沌演化过程。其中，

在 $\omega_e \in (1.19, 1.6)$,即丝杠转速 $\omega_S \in (73, 98)$ rad/s 时,对应稳定周期运动状态。

3) 基于胞映射法对系统全局响应进行分析表明,齿轮副与螺纹副系统均存在多稳定态共存现象,且齿轮副在频率演化过程中展现出更复杂的吸引域结构与响应分界,反映出其更强的初始条件敏感性。

## 参　考　文　献


[1] QIAO G, LIAO R, GUO S, et al. Design and dynamic analysis of the recirculating planetary roller screw mechanism [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2022, 35(1): 87.

[2] MA S J, WU L P, FU X J, et al. Modelling of static contact with friction of threaded surfaces in a planetary roller screw mechanism [J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 139: 212-236.

[3] MENG J, DU X, LI Y, et al. A multiscale accuracy degradation prediction method of planetary roller screw mechanism based on fractal theory considering thread surface roughness[J]. Fractal and Fractional, 2021, 5(4): 237.

[4] AUREGAN G, FRIDRICI V, KAPSA P, et al. Experimental simulation of rolling-sliding contact for application to planetary roller screw mechanism [J]. Wear, 2015, 332: 1176-1184.

[5] LEPAGNEUL J, TADRIST L, SPRAUEL J M, et al. Fatigue lifespan of a planetary roller-screw mechanism [J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 172: 104769.

[6] SANDU S, BIBOULET N, NELIAS D, et al. Analytical prediction of the geometry of contact ellipses and kinematics in a roller screw versus experimental results [J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 131: 115-136.

[7] XING M, ZHANG B, DENG P, et al. A comprehensive analysis of contact kinematics for planetary roller screw mechanism [J]. Tribology International, 2023, 179: 108127.

[8] HOJJAT Y, AGHELI M. A comprehensive study on capabilities and limitations of roller-screw with emphasis on slip tendency [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 40(10): 1887-1899.

[9] DU X, CHEN B, ZHENG Z. Investigation on mechanical behavior of planetary roller screw mechanism with the effects of external loads and machining errors [J]. Tribology International, 2021, 154: 106689.

[10] FU X, LI X, MA S, et al. A multi-roller static model of the planetary roller screw mechanism considering load sharing [J]. Tribology International, 2022, 173: 107648.

[11] MO S, WU S, HUANG X, et al. Nonlinear dynamics of planetary roller screw mechanism [J]. Chaos, 2024; 34(7): 073110.

[12] 吴林萍,马尚君,许千斤,等.考虑弹性变形的行星滚柱丝杠接触特性[J].机械工程学报, 2024, 60(5): 130-141.
WU Linping, MA Shangjun, XU Qianjin, et al. Contact characteristics of planetary roller screw mechanism considering elastic deformation [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(5):130-141. (in Chinese)

[13] 许千斤,马尚君,牛茂东,等.考虑齿轮副啮合激励的滚柱螺纹动载荷分布[J].华南理工大学学报(自然科学版),2023,51(11):119-130.
XU Qianjin, MA Shangjun, NIU Maodong, et al. Dynamic load distribution of roller thread considering gear pair meshing excitation [J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition), 2023, 51(11): 119-130. (in Chinese)

[14] MO S, WANG L, HU Q, et al. Coupling failure dynamics of tooth surface morphology and wear based on fractal theory [J]. Nonlinear Dynamics, 2024, 112(1): 175-195.

[15] 莫帅, 黄祖瑞, 刘翊恒,等.航空非正交偏置面齿轮分汇流系统非线性动力学[J].力学学报, 2024, 56(4): 2646-2658.
MO Shuai, HUANG Zurui, LIU Yiheng, et al. Nonlinear dynamics of aeronautical non-orthogonal offset gear split flow system [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2024, 56(4): 2646-2658. (in Chinese)


**第一作者简介:**莫帅,男,1987 年 6 月生,博士、教授、博士生导师。中国科协青年人才托举工程入选者(国家青年人才计划),广西杰出青年科学基金获得者。主要研究方向为高端装备振动控制与故障动力学、关键核心基础零部件(高性能齿轮/轴承)设计制造等。发表 SCI 期刊论文 78 篇,EI 期刊论文 110 篇,出版学术著作 3 部,获批软件著作权 3 项,参与编写 5 项国家标准,以第一发明人申请发明专利 140 余项,其中已授权发明专利 31 项。
E-mail: moshuai2010@163.com