

# 应用质量线法测定弹性车轮的惯性参数\*

郑沥昕<sup>1,2</sup>, 圣小珍<sup>1,2</sup>

(1. 上海工程技术大学城市轨道交通学院 上海, 201620)

(2. 上海工程技术大学上海市轨道交通振动与噪声控制技术工程研究中心 上海, 201620)

**摘要** 针对各类刚体惯性参数识别方法均存在工程局限性以及三维模型仿真结果与实测结果存在偏差等问题, 提出应用质量线法测定某款有轨电车弹性车轮的质心坐标和惯性矩阵, 并通过锤击试验的加速度频响函数得到质量线。首先, 对质量线法的理论进行重新推导, 明确频响函数测试中激励点与响应点的选取原则; 其次, 研究激励点个数、施力方向等对最终结果的影响; 最后, 对比质量线先平均后计算与先计算后平均这 2 种数据处理流程的精度差异。结果表明: 应至少采用 3 个锤击点与 3 个测点生成的 27 个频响函数, 并确定了 27 个质量线值可得出矩阵方程唯一解, 增加激励点数量可提升超定性并提高精度。3 个锤击点的选择应该使得车轮分别有绕  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的角加速度, 必要时可通过附加轻质工装优化落锤位置。用于测试的三轴加速度计应尽量分散放置, 不可在同一直线上。此外, 应采用先平均质量线再求质心坐标和惯性矩阵的方式。

**关键词** 惯性参数识别; 质量线法; 弹性车轮; 锤击试验  
**中图分类号** TH6; U211.5

## 引言

识别结构的惯性特性如质量、质心位置和惯性张量等是静态和动态设计过程中的重要参数。若存在高精度数字模型, 可直接计算这些参数, 否则需通过试验方法进行测量。刚体惯性参数识别方法可分为静态方法和动态方法。静态法(如称重法、悬挂法)仅能获取质量和质心位置, 动态法是基于动力学方程进行计算, 可同时求解转动惯量和惯性积, 适用性更强<sup>[1]</sup>。

根据对待测刚体的约束不同, 动态法可分为自由运动测试法、小角度运动测试法以及微小角度运动测试法<sup>[2]</sup>。微小角度运动测试法是基于试验模态分析, 利用频响函数(frequency response function, 简称 FRF)识别系统的模态参数(如固有频率、振型)和物理参数(如质量、转动惯量), 包括模态模型法、剩余惯量法和直接系统识别法等<sup>[1]</sup>。

模态模型法是基于刚体模态振型与质量矩阵的正交性, 结合质量归一化振型和坐标变换矩阵识别惯性参数, 常用方法如 C-B(Conti-Bretl)法<sup>[3]</sup>和 T-N(Toivola-Nuutila)法<sup>[4]</sup>等。张勇等<sup>[5]</sup>推导了刚体模态振型与惯性参数的显式关系, 于锋<sup>[1]</sup>将其应用于

整车动力总成参数识别。然而, 实际测试中难以精确获取四阶刚体模态, 导致参数识别精度受限。

剩余惯量法又称质量线法, 该方法通过在高阶刚体模态和第 1 阶柔性模态之间选择一段平滑的 FRF 曲线来识别刚体的惯性参数。该方法以已知质量为基础, 忽略刚度和阻尼影响, 分步求解其余 9 个参数, 简化了计算流程<sup>[1]</sup>。刘承鹭等<sup>[6]</sup>提出基于质量线法的大尺寸飞行器质量特性参数测量方法, 推导了质量线法公式, 并优化了测点选取原则。高云凯等<sup>[7]</sup>将该测量方法应用于重卡驾驶室测试, 验证了该方法与称重法的一致性。

然而, 在实际应用中常常面临质量参数未知的情况, 且对大型结构称重较为困难。直接系统识别法的原理是直接从频域运动方程出发, 将系统刚度与阻尼参数视作未知量, 结合最小二乘法, 利用实测 FRF 识别出所有惯性参数<sup>[5]</sup>。但研究表明, 该方法对噪声和弹性模态的敏感性较高<sup>[8]</sup>。

综上, 各类刚体惯性参数识别方法均存在工程局限性, 但对于列车车轮、构架等质量适中且可称重的部件, 质量线法凭借其优异的可靠性和高效性, 成为首选的识别方法。在目前的工程应用中, 多采用三维模型仿真计算以获取惯性参数, 但由于材质不

\* 国家自然科学基金面上资助项目(52272352); 国家自然科学基金青年基金资助项目(52202477)  
收稿日期: 2023-10-02; 修回日期: 2023-11-12

均、边界条件简化等问题,仿真结果常与实测数据存在偏差,仍须通过试验进行验证<sup>[1]</sup>。

笔者应用质量线法,测定某款有轨电车弹性车轮的质心坐标和惯性矩阵,其中的质量线通过锤击试验的加速度 FRF 得到。下文第 1 节对质量线法的理论重新进行推导,从推导过程中得出测试 FRF 时选择激励点和响应点应该遵循的原则;第 2 节详细揭示如何应用所推导的方法来测定某弹性车轮的质心坐标和惯性矩阵。

## 1 基于 FRF 计算刚体惯性特征

### 1.1 基本原理

图 1 为空间直角坐标系下的刚体,假设在空间直角坐标系下存在一个刚体,刚体的质量为  $M$ ,刚体质心  $C$  的坐标为  $(x_c, y_c, z_c)$ 。图中:  $H_{kj}$  为点  $k$  绕坐标原点转动的加速度在测量方向上的投影。

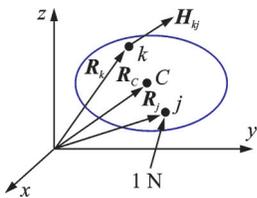


图 1 空间直角坐标系下的刚体

Fig.1 Rigid body in cartesian coordinate system

该刚体关于所选坐标系的惯性矩阵为

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (1)$$

该刚体的质量可通过称重来确定,仅需确定质心坐标和惯性矩阵中的 6 个未知数。假设该结构为软支撑结构,对该结构进行常规频响测量。在刚体上任意一点  $j$  上作用一个单位力  $(F_{xj}, F_{yj}, F_{zj})$ ,激励点  $j$  的坐标为  $(x_{ej}, y_{ej}, z_{ej})$ 。在该刚体上选择一点  $k$  作为响应点,点  $k$  坐标为  $(x_{rk}, y_{rk}, z_{rk})$ ,在单位力的作用下,  $k$  点加速度矢量为  $H_{kj}$ ,方向为  $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ 。

图 2 为加速度频响曲线定义质量线,由图可确定  $H_{kj}$  的值。图中左侧峰表示结构作为刚体在软支撑上的最高阶刚体模态,右侧峰对应结构作为弹性体的第 1 阶模态。在 2 个峰值间存在 1 个频带,FRF 在该频带内基本保持恒定(实际结果有一定波动),这条 FRF 值的水平线被称为质量线。质量线的含义是结构作为刚体在上述单位力的作用下  $k$  点在测试方向上的加速度。支撑越软,刚体模态峰值的频

率越低,质量线频带越大。为消除测量噪声的影响,  $H_{kj}$  应取该频带的平均值。

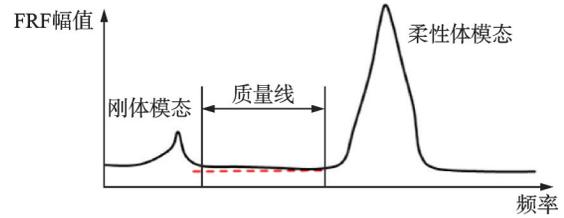


图 2 加速度频响曲线定义质量线

Fig.2 Defining mass line on acceleration frequency response curve

将响应点  $k$  处的加速度记为  $(a_{xk}, a_{yk}, a_{zk})$ ,刚体质心的加速度记为  $(a_{xc}, a_{yc}, a_{zc})$ ,刚体绕坐标原点的角速度和角加速度的矢量分别记为  $\omega$  和  $\epsilon$ 。假定结构从其静止位置加速,角速度为 0,即在 FRF 测量过程中,应尽量避免结构的摆动。依据理论力学中的运动学原理,即

$$\begin{Bmatrix} a_{xk} \\ a_{yk} \\ a_{zk} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{xc} \\ a_{yc} \\ a_{zc} \end{Bmatrix} + \epsilon \times (R_{rk} - R_c) \quad (2)$$

$$\epsilon \times (R_{rk} - R_c) = \begin{Bmatrix} (z_{rk} - z_c)\epsilon_y - (y_{rk} - y_c)\epsilon_z \\ (x_{rk} - x_c)\epsilon_z - (z_{rk} - z_c)\epsilon_x \\ (y_{rk} - y_c)\epsilon_x - (x_{rk} - x_c)\epsilon_y \end{Bmatrix} \quad (3)$$

由式(3)可将式(2)改写为

$$\begin{Bmatrix} a_{xk} \\ a_{yk} \\ a_{zk} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{xc} \\ a_{yc} \\ a_{zc} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (z_{rk} - z_c)\epsilon_y - (y_{rk} - y_c)\epsilon_z \\ (x_{rk} - x_c)\epsilon_z - (z_{rk} - z_c)\epsilon_x \\ (y_{rk} - y_c)\epsilon_x - (x_{rk} - x_c)\epsilon_y \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} (z_{rk} - z_c)\epsilon_y - (y_{rk} - y_c)\epsilon_z \\ (x_{rk} - x_c)\epsilon_z - (z_{rk} - z_c)\epsilon_x \\ (y_{rk} - y_c)\epsilon_x - (x_{rk} - x_c)\epsilon_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z_{rk} - y_{rk} \\ -z_{rk} & 0 & x_{rk} \\ y_{rk} - x_{rk} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 0 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{Bmatrix} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)得到

$$\begin{Bmatrix} a_{xk} \\ a_{yk} \\ a_{zk} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{xc} \\ a_{yc} \\ a_{zc} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & z_{rk} & -y_{rk} \\ -z_{rk} & 0 & x_{rk} \\ y_{rk} & -x_{rk} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 0 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{Bmatrix} \quad (6)$$

根据动量定理,质心的加速度可以写成

$$\begin{cases} a_{xC} \\ a_{yC} \\ a_{zC} \end{cases} = \frac{1}{M} \begin{cases} F_x \\ F_y \\ F_z \end{cases}. \text{ 将此式代入式(6), 即}$$

$$\begin{cases} a_{xk} \\ a_{yk} \\ a_{zk} \end{cases} = \frac{1}{M} \begin{cases} F_x \\ F_y \\ F_z \end{cases} + \begin{bmatrix} 0 & z_{rk} & -y_{rk} \\ -z_{rk} & 0 & x_{rk} \\ y_{rk} & -x_{rk} & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{cases} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 0 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} x_C \\ y_C \\ z_C \end{cases} \quad (7)$$

对于激励点 $j$ 和响应点 $k$ , 则有

$$H_{kj} = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) \begin{cases} a_{xk} \\ a_{yk} \\ a_{zk} \end{cases} = \frac{1}{M} (\alpha_k F_{xj} + \beta_k F_{yj} + \gamma_k F_{zj}) +$$

$$(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) \begin{bmatrix} 0 & z_{rk} & -y_{rk} \\ -z_{rk} & 0 & x_{rk} \\ y_{rk} & -x_{rk} & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{cases} +$$

$$(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 0 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} x_C \\ y_C \\ z_C \end{cases} \quad (8)$$

刚体质心绕坐标原点的旋转加速度为

$$\begin{cases} X \\ Y \\ Z \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 0 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} x_C \\ y_C \\ z_C \end{cases} \quad (9)$$

将式(9)代入式(8)得到

$$H_{kj} - \frac{1}{M} (\alpha_k F_{xj} + \beta_k F_{yj} + \gamma_k F_{zj}) =$$

$$(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) \begin{bmatrix} 0 & z_{rk} & -y_{rk} \\ -z_{rk} & 0 & x_{rk} \\ y_{rk} & -x_{rk} & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{cases} +$$

$$(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) \begin{cases} X \\ Y \\ Z \end{cases} \quad (10)$$

其中:  $\frac{1}{M} (\alpha_k F_{xj} + \beta_k F_{yj} + \gamma_k F_{zj})$  为刚体质心绕坐标原点转动的加速度在同一方向上的投影。

对于给定的激励点 $j$ , 若测量 $k = 1, 2, \dots, 6$ 这6个响应点(若为2个测点, 每个测点安装1个三轴加速度计), 则由式(10)可建立至少6个等式(由式(10)表示), 包含的未知量也为6个, 即角加速度的3个分量 $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$ 和质心绕坐标原点的加速度的3个分量 $(X, Y, Z)$ 。若仅使用2个三轴加速度计, 则可证明由式(10)建立的6个方程没有唯一解。实际可通过令

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0 & z_{r_1} & -y_{r_1} \\ -z_{r_1} & 0 & x_{r_1} \\ y_{r_1} & -x_{r_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0 & z_{r_2} & -y_{r_2} \\ -z_{r_2} & 0 & x_{r_2} \\ y_{r_2} & -x_{r_2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}, \mathbf{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 \\ \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 \end{bmatrix}, \text{ 则系数矩阵为}$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_1 Z_1 & \mathbf{\Gamma}_1 \\ \mathbf{\Gamma}_2 Z_2 & \mathbf{\Gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Gamma}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 & I \\ Z_2 & I \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中:  $I$  为单位矩阵。

由于 $\mathbf{\Gamma}_1$ 和 $\mathbf{\Gamma}_2$ 是由3个单位正交矢量构成, 因而 $\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2$ 以及 $\text{diag}(\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$ 均是可逆矩阵, 可证明矩阵 $\begin{bmatrix} Z_1 & I \\ Z_2 & I \end{bmatrix}$ 是不可逆矩阵。因此, 至少需要3个响应点。并通过在响应点放置加速度计来确定角加速度 $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)^T$ 和质心加速度 $(X, Y, Z)^T$ 。式(11)的系数矩阵为

$$A = \text{diag}(\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2, \mathbf{\Gamma}_3) \begin{bmatrix} Z_1 & I \\ Z_2 & I \\ Z_3 & I \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} Z_1^T Z_1 + Z_2^T Z_2 + Z_3^T Z_3 & Z_1^T + Z_2^T + Z_3^T \\ Z_1 + Z_2 + Z_3 & I \end{bmatrix} \quad (13)$$

式(12)的阶数为 $9 \times 6$ , 由式(13)可得最小二乘法的系数矩阵。式(13)仅由3个加速度计的坐标确定, 且为保证式(13)是非奇异的, 3个加速度计不可沿同一直线放置。

激励点 $j$ 的角加速度和质心加速度分别为 $(\epsilon_{xj}, \epsilon_{yj}, \epsilon_{zj})^T, (X_j, Y_j, Z_j)^T$ 。  $j = 1, 2, 3$ 时, 由式(9)得

$$\begin{bmatrix} 0 & \epsilon_{z_1} & -\epsilon_{y_1} \\ -\epsilon_{z_1} & 0 & \epsilon_{x_1} \\ \epsilon_{y_1} & -\epsilon_{x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} x_C \\ y_C \\ z_C \end{cases} = \begin{cases} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \epsilon_{z_2} & -\epsilon_{y_2} \\ -\epsilon_{z_2} & 0 & \epsilon_{x_2} \\ \epsilon_{y_2} & -\epsilon_{x_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} x_C \\ y_C \\ z_C \end{cases} = \begin{cases} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \epsilon_{z_3} & -\epsilon_{y_3} \\ -\epsilon_{z_3} & 0 & \epsilon_{x_3} \\ \epsilon_{y_3} & -\epsilon_{x_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} x_C \\ y_C \\ z_C \end{cases} = \begin{cases} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{cases} \quad (16)$$

由于(14)、(15)、(16)中系数矩阵的奇异性, 质心坐标不能通过其中单独的一个唯一地确定。式(14)、(15)、(16)可写为

$$\begin{bmatrix} 0 & -z_C & y_C \\ z_C & 0 & -x_C \\ -y_C & x_C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{x_1} & \epsilon_{x_2} & \epsilon_{x_3} \\ \epsilon_{y_1} & \epsilon_{y_2} & \epsilon_{y_3} \\ \epsilon_{z_1} & \epsilon_{z_2} & \epsilon_{z_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

若3个角加速度矢量不共面, 则式(17)中第2个矩阵可逆, 可得到第1个矩阵的唯一解, 并求出质心坐标。由式(13)和(17)可知, 求出的质心坐标与响应点的位置相关, 而与锤击点的位置无关。求出质心坐标后, 为确定3个惯性矩和3个惯性积, 可采

用以下动力学关系,即

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xj} \\ \epsilon_{yj} \\ \epsilon_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (y_{ej} - y_c)F_{zj} - (z_{ej} - z_c)F_{yj} \\ (z_{ej} - z_c)F_{xj} - (x_{ej} - x_c)F_{zj} \\ (x_{ej} - x_c)F_{yj} - (y_{ej} - y_c)F_{xj} \end{Bmatrix} \quad (j=1, 2, 3) \quad (18)$$

由于至少需要3个响应点,根据式(18)建立的方程组为

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{x_1} & -\epsilon_{y_1} & -\epsilon_{z_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon_{x_1} & 0 & \epsilon_{y_1} & -\epsilon_{z_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_{x_1} & 0 & -\epsilon_{y_1} & \epsilon_{z_1} \\ \epsilon_{x_2} & -\epsilon_{y_2} & -\epsilon_{z_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon_{x_2} & 0 & \epsilon_{y_2} & -\epsilon_{z_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_{x_2} & 0 & -\epsilon_{y_2} & \epsilon_{z_2} \\ \epsilon_{x_3} & -\epsilon_{y_3} & -\epsilon_{z_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon_{x_3} & 0 & \epsilon_{y_3} & -\epsilon_{z_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_{x_3} & 0 & -\epsilon_{y_3} & \epsilon_{z_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_{xx} \\ I_{xy} \\ I_{xz} \\ I_{yy} \\ I_{yz} \\ I_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (y_{e_1} - y_c)F_{z_1} - (z_{e_1} - z_c)F_{y_1} \\ (z_{e_1} - z_c)F_{x_1} - (x_{e_1} - x_c)F_{z_1} \\ (x_{e_1} - x_c)F_{y_1} - (y_{e_1} - y_c)F_{x_1} \\ (y_{e_2} - y_c)F_{z_2} - (z_{e_2} - z_c)F_{y_2} \\ (z_{e_2} - z_c)F_{x_2} - (x_{e_2} - x_c)F_{z_2} \\ (x_{e_2} - x_c)F_{y_2} - (y_{e_2} - y_c)F_{x_2} \\ (y_{e_3} - y_c)F_{z_3} - (z_{e_3} - z_c)F_{y_3} \\ (z_{e_3} - z_c)F_{x_3} - (x_{e_3} - x_c)F_{z_3} \\ (x_{e_3} - x_c)F_{y_3} - (y_{e_3} - y_c)F_{x_3} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

式(19)也可写为

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{x_1} & \epsilon_{x_2} & \epsilon_{x_3} \\ \epsilon_{y_1} & \epsilon_{y_2} & \epsilon_{y_3} \\ \epsilon_{z_1} & \epsilon_{z_2} & \epsilon_{z_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_{e_1} - y_c)F_{z_1} - (z_{e_1} - z_c)F_{y_1} & \dots \\ (z_{e_1} - z_c)F_{x_1} - (x_{e_1} - x_c)F_{z_1} & \dots \\ (x_{e_1} - x_c)F_{y_1} - (y_{e_1} - y_c)F_{x_1} & \dots \end{bmatrix} \quad (20)$$

综上,若3个角加速度矢量不共平面,则式(20)中的第2个矩阵可逆,因此第1个矩阵才有唯一解,从而可以求出结构的惯性张量。

### 1.2 FRF测量注意事项

质心坐标、惯性矩/积等惯性参数由3个三轴加速度计测得,其质量通常可忽略不计。如1.1节所述,至少需3个激励点和3个响应点(共27个FRF),通过求解式(17)、(20)确定27个质量线值,并导出

3个质心坐标和6个惯性张量。

为确保矩阵方程有唯一解,激励点应选择3个不同方向以避免力通过质心,且产生的角加速度矢量须尽量正交。同时,3个加速度计应避免共线布置。为提高精度,可增加激励点数量,使质量线总数从27条增至36条及以上。

## 2 某弹性车轮惯性参数测定

### 2.1 弹性车轮特点

轨道车辆弹性车轮是通过在轮辋与轮芯间设置橡胶层以降低轮轨噪声与冲击,可延长部件寿命,也是低噪声车轮之一<sup>[9]</sup>,已广泛应用于有轨电车并已逐步推广至地铁<sup>[10]</sup>。图3为某地铁压缩剪切型弹性车轮。在车轮装配时橡胶挤压易导致轮辋与轮芯不同轴,使惯性参数偏离设计值,从而影响车轮寿命与运营安全,须及时进行检测。

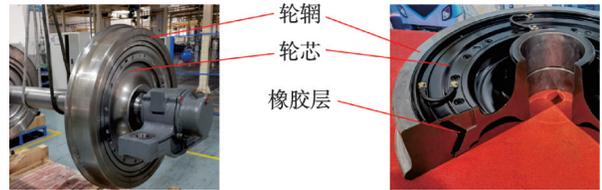


图3 压缩剪切型地铁弹性车轮

Fig.3 Compressible shear-type resilient metro wheel

### 2.2 惯性参数仿真预测

将第1节方法应用于某有轨电车压缩剪切型弹性车轮(直径为636 mm,质量为197 kg)。根据弹性车轮的截面尺寸建立ANSYS有限元模型:轮辋、轮芯采用SOLID185单元(钢密度为7 850 kg/m<sup>3</sup>,橡胶密度为1 200 kg/m<sup>3</sup>)。设置全局坐标系,原点近质心,x平行于轨道,y平行于轮轴,z垂直于地面。随后进行自由模态和谐响应分析。

图4为弹性车轮有限元模型中响应点和激励点。表1为有限元仿真响应点和激励点坐标。选取

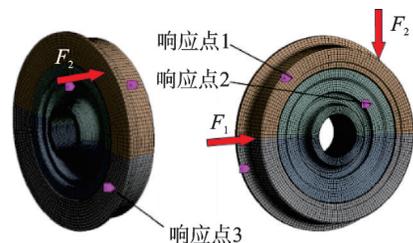


图4 弹性车轮有限元模型中响应点和激励点

Fig.4 Response and excitation points in finite element model of resilient wheel

表1 有限元仿真响应点和激励点坐标

**Tab.1 Coordinates of finite element simulation response and excitation points** m

响应点&激励点	$x$	$y$	$z$
响应点1	-0.088	0.001	-0.192
响应点2	0.223	-0.019	-0.092
响应点3	-0.173	-0.126	0.112
激励点1	-0.203	-0.015	0
激励点2	-0.112	-0.126	-0.200
激励点3	0.219	-0.049	-0.257

的3个激励点施力方向与 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 轴平行且避开质心, 3个响应点受力方向、FRF幅值及第1阶柔性模态如图5所示。该弹性车轮的第1阶弹性模态为436 Hz, 表现为轮辋-橡胶层-轮芯的整体振动。表2

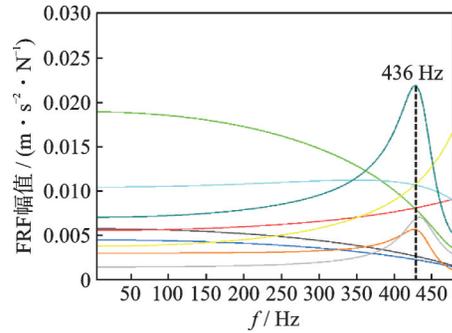


图5 3个响应点受力方向、FRF幅值及第1阶柔性模态  
Fig.5 Force direction, FRF amplitude, and the first order flexural mode of three response points

为弹性车轮仿真试验惯性参数, 由于制造精度高且材料参数准确, 有限元模型计算的惯性参数可作为实际车轮的参考值。

表2 弹性车轮仿真试验惯性参数

**Tab.2 Inertial parameters for resilient wheel simulation experiment**

参数	质心坐标/m			转动惯量/(kg·m <sup>2</sup> )			惯性积/(kg·m <sup>2</sup> )		
	$x_c$	$y_c$	$z_c$	$I_{xx}$	$I_{yy}$	$I_{zz}$	$I_{xy}$	$I_{xz}$	$I_{yz}$
参考值	0.085	-0.067	0	6.117	11.373	7.533	1.137	$1.0 \times 10^{-5}$	$2.6 \times 10^{-4}$

2.3 锤击法获取弹性车轮 FRF

2.3.1 测试设备设置

通过锤击试验得到力和响应。锤头硬度越大, 激励频带脉冲越窄, 低频相干性越差。图6为锤击试验设备及测试环境。为避免在100 Hz以下弹性车轮质量线频段出现FRF信号相干性不足的问题, 试验选用软橡胶锤头。采用3个50g三轴加速度计和B&K多通道采集系统进行测试。



图6 锤击试验设备及测试环境

Fig.6 Hammer impact test equipment and testing environment

2.3.2 原点选择及测点坐标获取

图7为测试坐标系及加速度计安装位置。将弹性车轮通过尼龙绳悬挂在半空中, 在车轮上选择一点O作为坐标原点建立测试坐标系, 并在车轮上选择3个响应点布置3个三轴加速度传感器。本研究中弹性车轮是扁平圆柱体, 为关于 $x$ 轴和 $z$ 轴对称的结构, 因此车轮的质心在车轮轴孔内。布置3个三

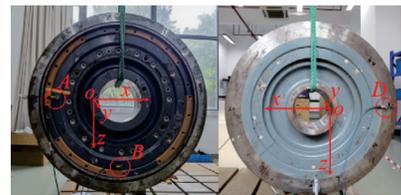


图7 测试坐标系及加速度计安装位置

Fig.7 Test coordinate system and accelerometer installation locations

轴加速度计时, 确保至少一轴与全局坐标系平行, 并对称分布于车轮两侧平面内(测点A、B、D), 以保障坐标测量精度。

响应点与锤击点的坐标精度直接影响计算结果。图8为结合有限元模型获取各测点坐标, 测点的 $x$ 轴、 $z$ 轴坐标可直接测量, 由于车轮侧面不平整,  $y$ 轴坐标则须借助有限元模型确定。基于设计图纸获取的坐标比直接测量更精确, 最终的加速度计布置参数见表3。



图8 结合有限元模型获取各测点坐标

Fig.8 Obtaining coordinates of various measurement points by combining finite element model

表3 加速度计布置信息

**Tab.3 Accelerometer placement information**

通道编号	$x/m$	$y/m$	$z/m$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1(A点)	-0.120	-0.011	0	1	0	0
2(A点)	-0.120	-0.011	0	0	0	1
3(A点)	-0.120	-0.011	0	0	1	0
4(B点)	0.092	-0.011	0.205	1	0	0
5(B点)	0.092	-0.011	0.205	0	0	1
6(B点)	0.092	-0.011	0.205	0	1	0
7(D点)	-0.186	-0.126	0	-1	0	0
8(D点)	-0.186	-0.126	0	0	0	-1
9(D点)	-0.186	-0.600	0	0	-1	0

表4 锤击点位置及方向

**Tab.4 Hammer impact point location and direction**

锤击点	$x/m$	$y/m$	$z/m$	$F_x/N$	$F_y/N$	$F_z/N$
1	-0.185	-0.126	0.028	0	1	0
2	0.056	-0.126	-0.270	0	1	0
3	-0.204	-0.023	0	0	0	1
4	0.085	-0.126	0.281	1	0	0

2.3.3 锤击点选取

试验选取4个锤击点,分别在 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 这3轴方向施加激励。根据理论力学平行轴定理,锤击力必须偏离质心以确保转动惯量测量精度。车轮为扁平圆柱体,其侧面锤击可产生绕 $x$ 轴、 $z$ 轴角加速度,但绕 $y$ 轴激励需锤击踏面。由于车轮踏面为圆弧面,锤击法要求力锤尽量垂直于待测面锤击,若锤击方向不够垂直,锤头和待测面发生摩擦会产生较大测量误差。按照前文理论,锤击方向应尽量平行于坐标轴,否则正常锤击将无法产生车轮绕 $y$ 轴的角加速度,将导致求出的 $y$ 轴转动惯量远小于实际值。

为解决上述问题,笔者设计了2块轻质铝制工装,图9为铝制工装实物图。踏面工装保证 $x$ 轴方向的锤击垂直度,侧面工装实现 $y$ 轴向激励。工装由胶水进行固定,质量仅为20 g,且体积较小,对车轮惯性特性影响可忽略。同理,按照2.2节中有限元模型获取坐标值的方法,得到锤击位置的坐标,锤击点位置及方向如图10所示,锤击点位置及方向如表4所示。



图9 铝制工装实物图

Fig.9 Picture of aluminum tooling

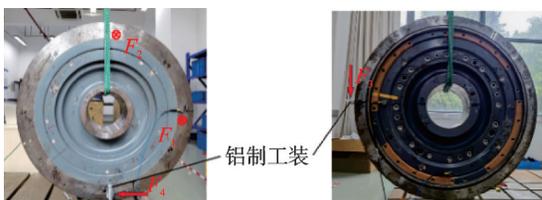


图10 锤击位置及方向

Fig.10 Hammer impact location and direction

3 结果及讨论

3.1 质量线频率范围

为确定质量线频率范围,通过FRF分析定位弹性车轮的第1阶柔性模态。采用塑料锤头进行锤击试验,在700 Hz范围内进行测试,各加速度计在受力方向的FRF幅值如图11所示。图中, $h_{A1x}$ 表示第1次激励下测点A的 $x$ 轴方向的FRF幅值,其他符号含义同理。

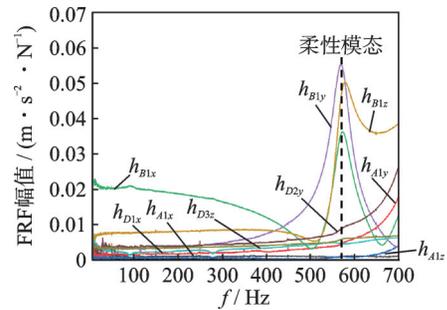


图11 各加速度计在受力方向的FRF幅值

Fig.11 Amplitude of FRF for force direction on each accelerometer

由图可知,车轮第1阶柔性模态位于550 Hz附近,该模态使低频段FRF幅值发生波动,因此质量线频段的选取范围应远离第1阶柔性模态。图中低频段内FRF幅值出现明显的毛刺,这是由于塑料锤头锤击产生的信号在低频段内的相干性较差。为准确获取质量线频段,将分析上限频率定为50 Hz。改用橡胶锤头可改善低频信号相干性,但会引入摆绳晃动干扰,因此采用指数窗函数处理FRF,可有效抑制摆绳振动影响。

图12为所有采集信号的相干性(无量纲)。表5为各通道相干函数平均值,表中 $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$ 和 $F_4$ 的方向见图10。分析图12和表5可知,锤击方向的函数平均值 $>0.95$ ,信号相干性良好。而非受力方向的理论值接近0,其较低的相干性不影响测量精度。图13为加速度计受力方向的FRF幅值,用于确定质量线频段。在5~25 Hz频段内出现摆绳晃动的FRF峰值,而在25~45 Hz频段内的曲线平稳且相干性高,符合质量线选取标准。

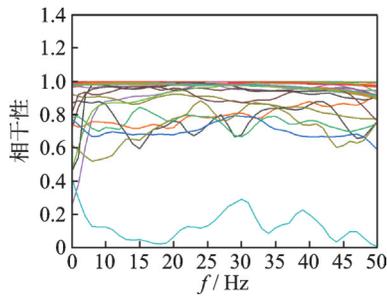


图 12 所有采集信号的相干性

Fig.12 Coherence of all acquired signals

表 5 各通道相干函数平均值

Tab.5 Average coherence function of each channel

通道	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$
1x	0.998	0.796	0.185	0.967
1y	0.999	0.972	0.852	0.968
1z	0.965	0.943	0.911	0.967
2x	0.998	0.746	0.994	0.970
2y	0.994	0.948	0.844	0.706
2z	0.844	0.939	0.952	0.894
3x	0.993	0.750	0.926	0.971
3y	0.998	0.972	0.685	0.965
3z	0.909	0.934	0.990	0.970

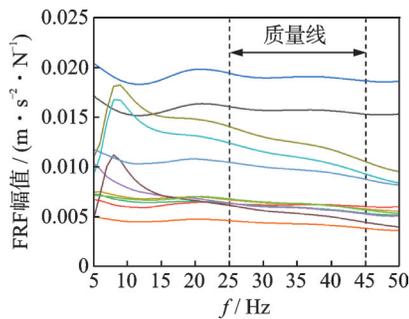


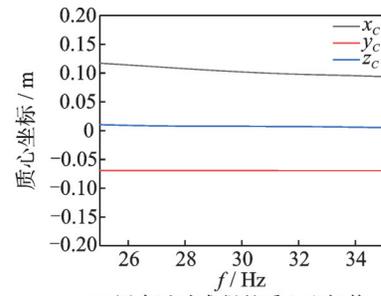
图 13 加速度计受力方向的 FRF 幅值

Fig.13 Amplitude of FRF for force direction on accelerometers

### 3.2 测试结果分析

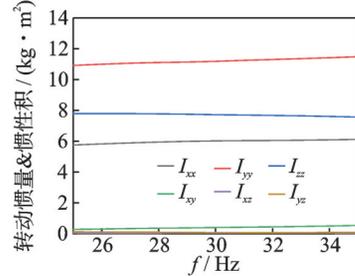
确定质量线所在频段后,将质量线频段数据代入式(20)进行计算,锤击试验求得的惯性参数如图 14 所示。图中惯性参数曲线随着频率增大而变化,这是由于在所选质量线频段内,部分 FRF 幅值曲线并不完全水平,FRF 幅值存在波动。因此,选取各频率计算结果的平均值作为测试结果。

笔者采用 2 种平均方法计算惯性参数:①对质量线频段内各频率的惯性参数取平均;②先平均 FRF 再计算惯性参数。表 6 为 2 种平均方法计算出的质心坐标及转动惯量。



(a) 锤击试验求得的质心坐标值

(a) Centroid coordinates obtained from the impact test



(b) 锤击试验求得的转动惯量及惯性积

(b) Moment of inertia and product of inertia obtained from the impact test

图 14 锤击试验求得的惯性参数

Fig.14 Inertial parameters obtained from hammer impact testing

表 6 2 种平均方法计算出的质心坐标及转动惯量

Tab.6 Centroid coordinates and moments of inertia calculated using two averaging methods

参数	仿真值	方法 1	误差/%	方法 2	误差/%
$x_c/m$	0.085	0.092	8.38	0.085	0.24
$y_c/m$	-0.067	-0.069	2.97	-0.069	2.38
$z_c/m$	0	0.004	0.41	0.004	0.42
$I_{xx}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	6.117	6.176	0.97	6.099	0.29
$I_{yy}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	11.373	11.579	1.81	11.475	0.90
$I_{zz}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	7.532	7.551	0.25	7.420	1.49
$I_{xy}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	1.137	0.594	47.77	0.504	55.68
$I_{xz}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	$1.0\times 10^{-5}$	0.072	7.20	0.049	4.90
$I_{yz}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	$2.6\times 10^{-4}$	0.118	11.80	0.081	8.07

表 6 显示,2 种方法所得质心坐标与仿真结果基本吻合,但方法 1 在  $x$  轴坐标上的误差略大。由于转动惯量测试结果与仿真值差异较小,导致相对误差较大,因而惯性积  $I_{xy}$  的测试值仅为仿真值的一半。总体而言,方法 2 的精度优于方法 1。

求出质心坐标后,可得测试坐标系原点相对于质心在各个方向的偏移量,理论力学中的平行轴定理为

$$J_z = J_{zc} + md^2 \quad (21)$$

其中: $m$ 为车轮质量; $d$ 为偏移量。

由式(21)可计算出质心坐标系下的转动惯量,并与有限元软件给出的参考值进行对比,2 种方法计算出的质心坐标下的转动惯量如表 7 所示。

表7 质心坐标系下的转动惯量

Tab.7 Moments of inertia in centroid coordinate system

参数	仿真值	方法1	误差/%	方法2	误差/%
$I_{xx}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	5.213	5.263	0.96	5.197	0.31
$I_{yy}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	9.941	9.978	0.37	10.118	1.78
$I_{zz}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	5.198	5.037	3.10	5.161	0.71

2种方法的计算结果均与参考值接近,但方法2更具优势。其中,3个转动惯量的误差均小于2%,仅方法1绕 $z$ 轴的误差达3%。由于方法2计算步骤更简便且精度更高,因此优先推荐采用方法2,即先平均FRF幅值再计算惯性参数。

为检验本方法的再现性,3名测试人员在相同条件下进行3次重复试验,采用方法2计算得到的3次重复性试验转动惯量结果见表8。3次试验结果高度一致,各参数标准差与均值的比率均小于2%,证实该方法具有良好的重复性。

表8 3次重复性试验转动惯量结果

Tab.8 Results of 3 repetition tests for moments of inertia

参数	第1次	第2次	第3次	比率/%
$I_{xx}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	5.197	5.086	5.115	0.92
$I_{yy}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	10.118	9.797	10.013	1.34
$I_{zz}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	5.161	5.244	5.103	1.12

## 4 结论

1) 为确保矩阵方程有唯一解,须至少设置3个锤击点和3个测点(共27个FRF),且增加激励点可提升精度。

2) 应分别在 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 轴方向实施锤击,以产生对应角加速度,必要时可加装轻质工装。

3) 用于测试的三轴加速度计不应放置在同一直线上,而应尽量分散开。

4) 对比2种数据处理方法,“先平均质量线再计算参数”的方法步骤更简便且误差更小(各轴转动惯量误差 $<2\%$ ),推荐采用此方法。

## 参 考 文 献

- [1] 于锋. 基于模态模型法的动力总成惯性参数辨识研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2019.
- [2] 高峰, 郭长立, 白冰. 落体法测刚体转动惯量的误差分析[J]. 力学与实践, 2019, 41(3): 345-348.  
GAO Feng, GUO Changli, BAI Bing. The error analysis in measurement of rigid body inertia by the falling body method[J]. Mechanics in Engineering, 2019, 41(3): 345-348.(in Chinese)
- [3] CONTI P, BRETL J. Mount stiffnesses and inertia properties from modal test data[J]. Journal of Vibration

Acoustics Stress and Reliability in Design, 1989, 111(2): 134-138.

- [4] TOIVOLA J, NUUTILA O. Comparison of three methods for determining rigid body inertia properties from frequency response functions[J]. Proceedings of SPIE—The International Society for Optical Engineering, 1993, 1923: 1126-1132.
- [5] 张勇, 侯之超. 考虑振型修正的识别惯性参数的一种模态模型方法[J]. 振动工程学报, 2016, 29(3): 436-443.  
ZHANG Yong, HOU Zhichao. Identification of rigid body inertia properties by utilizing modal parameters[J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(3): 436-443.(in Chinese)
- [6] 刘承骛, 温晶晶, 邓聃, 等. 基于质量线法的大尺寸飞行器质量特性参数一体化测量的仿真研究[J]. 西北工业大学学报, 2017, 35(4): 568-577.  
LIU Chengwu, WEN Jingjing, DENG Dan, et al. The emulation study on the integration measurement of mass property of large-size flight vehicle based on mass line method[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2017, 35(4): 568-577.(in Chinese)
- [7] 高云凯, 冯海星, 方剑光, 等. 基于质量线法的驾驶室惯性参数识别试验研究[J]. 振动与冲击, 2013, 32(16): 193-197.  
GAO Yunkai, FENG Haixing, FANG Jianguang, et al. Experimental study on identification of inertia parameters of truck cab based on mass line method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(16): 193-197.(in Chinese)
- [8] 徐传燕. 发动机惯性参数和激励力的振动识别方法研究[D]. 广州: 华南理工大学, 2012.
- [9] 熊杰, 雷晓燕. 低噪声车轮阻尼控制的有限元分析[J]. 中国铁道科学, 2006, 27(1): 94-98.  
XIONG Jie, LEI Xiaoyan. Finite element analysis of low-noise wheel with damping control[J]. China Railway Science, 2006, 27(1): 94-98.(in Chinese)
- [10] 刘玉霞, 韩健, 周信, 等. 弹性车轮减振降噪特性分析[J]. 铁道学报, 2015, 37(6): 48-53.  
LIU Yuxia, HAN Jian, ZHOU Xin, et al. Analysis of vibration and noise reduction characteristics of elastic wheels[J]. Journal of the China Railway Society, 2015, 37(6): 48-53.(in Chinese)



**第一作者简介:**郑沂昕,男,1999年10月生,硕士生。主要研究方向为轨道车辆的减振降噪。  
E-mail:1540249683@qq.com

**通信作者简介:**圣小珍,男,1962年6月生,博士、教授、博士生导师。主要研究方向为轨道交通减振降噪理论与应用。  
E-mail:shengxiaozhen@hotmail.com